اروین کرویت سیگ

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد اوّل

www.Mech-88.blogfa.com

ترجمهٔ عبدالله شیدفر   حسین فرمان

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد اول

اروین کرویت‌سیگ

ترجمهٔ عبدالله شیدفر حسین فرمان

Advanced Engineering Mathematics
Erwin Kreyszig
Fourth Edition
Printed in the United States of America, 1979

ریاضیات مهندسی پیشرفته
جلد اول
تألیف اروین کرویت سیگ
ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان
ویراستهٔ اکبر آقاابراهیمیان، علی راکعی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۳
چاپ چهارم ۱۳۷۶
تعداد ۶۰۰۰
شابک: ۶ـ ۰۱۲۰ـ ۰۱ـ ۹۶۴
شابک: ۱ـ ۸۰۵۲ـ ۰۱ـ ۹۶۴(سری)
ISBN 964-01-0120-6
ISBN 964-01-8052-1(set)
چاپ و صحافی: محمد
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

عنوان | **صفحه**

عنوان	صفحه
مقدمهٔ مترجمان	یازده
مقدمهٔ مؤلف	سیزده
فصل ۱	
معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول	
۱.۱ مفاهیم و ایده‌های اساسی	۲
۲.۱ ملاحظات هندسی، منحنیهای همشیب	۱۲
۳.۱ معادلات تفکیک‌پذیر	۱۷
۴.۱ معادلات قابل تحویل به‌صورت تفکیک‌پذیر	۳۴
۵.۱ معادلات دیفرانسیل کامل	۳۷
۶.۱ عوامل انتگرالساز	۴۲
۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی	۴۵
۸.۱ تغییر پارامترها	۵۳
۹.۱ مدارهای الکتریکی	۵۶
۱۰.۱ خانوادهٔ منحنیها، مسیرهای متعامد	۶۴
۱۱.۱ روش تکرار پیکار	۷۲
۱۲.۱ وجود و یکتایی جوابها	۷۵

عنوان | صفحه

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی

۱.۲ معادلات خطی همگن مرتبهٔ دوم ۸۴
۲.۲ معادلات مرتبهٔ دوم همگن با ضرایب ثابت ۸۹
۳.۲ جواب عمومی پایه ، مسائل با مقدار اولیه ۹۲
۴.۲ ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مختلط، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصه ۹۸
۵.۲ عملگرهای دیفرانسیل ۱۰۶
۶.۲ نوسانات آزاد ۱۰۹
۷.۲ معادلهٔ کشی ۱۲۱
۸.۲ وجود و یکتایی جوابها ۱۲۴
۹.۲ معادلات دیفرانسیل همگن از مرتبهٔ دلخواه ۱۳۲
۱۰.۲ معادلات خطی همگن از مرتبهٔ دلخواه با ضرایب ثابت ۱۳۶
۱۱.۲ معادلات خطی غیرهمگن ۱۴۰
۱۲.۲ روشی برای حل معادلات خطی غیرهمگن ۱۴۲
۱۳.۲ نوسانات واداشته . تشدید ۱۴۹
۱۴.۲ مدارهای الکتریکی ۱۵۷
۱۵.۲ روش مختلط برای به دست‌آوردن جوابهای خصوصی ۱۶۴
۱۶.۲ روش عمومی حل معادلات غیرهمگن ۱۶۸

فصل ۳

دستگاههای معادلات دیفرانسیل ، صفحهٔ فاز ، پایداری

۱.۳ دستگاههای معادلات دیفرانسیل ۱۷۳
۲.۳ صفحهٔ فاز ۱۸۱
۳.۳ نقاط بحرانی ــ پایداری ۱۸۶

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به‌کمك سری توانی

توابع متعامد

۱.۴ روش سری توانی ۱۹۸

عنوان	صفحه

۲.۴ مبنای نظری روش سری توانی ۲۰۳

۳.۴ معادلهٔ لژاندر، چندجمله‌ایهای لژاندر ۲۱۱

۴.۴ روش توسعه یافتهٔ سری توانی، معادلهٔ شاخصی ۲۱۷

۵.۴ معادلهٔ بسل، توابع بسل نوع اول ۲۳۴

۶.۴ توابع بسل نوع دوم ۲۴۱

۷.۴ مجموعه‌های متعامد توابع ۲۴۷

۸.۴ مسئلهٔ استورم - لیوویل ۲۵۲

۹.۴ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل ۲۵۸

فصل ۵

تبدیل لاپلاس

۱.۵ تبدیل لاپلاس، تبدیل معکوس، خطی بودن ۲۶۸

۲.۵ تبدیلات لاپلاس مشتق و انتگرال ۲۷۵

۳.۵ انتقال بر محور s ها. انتقال بر محور t ها، تابع پله‌ای واحد ۲۸۲

۴.۵ مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات ۲۹۵

۵.۵ پیچش ۲۹۹

۶.۵ کسرهای جزئی ۳۰۵

۷.۵ توابع دوره‌ای. کاربردهای بیشتر ۳۱۷

۸.۵ جدول برخی از تبدیلات لاپلاس ۳۳۱

فصل ۶

جبرخطی، قسمت اول: بردارها

۱.۶ اسکالر و بردار ۳۳۶

۲.۶ مؤلفه‌های یك بردار ۳۳۹

۳.۶ جمع بردارها، ضرب بردار در اسکالر ۳۴۲

۴.۶ فضاهای برداری، وابستگی و استقلال خطی ۳۴۷

۵.۶ ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای) ۳۵۲

۶.۶ فضاهای ضرب داخلی ۳۶۰

عنوان | صفحه

۷.۶ ضرب برداری (ضرب خارجی) ۳۶۲
۸.۶ حاصل ضرب برداری برحسب مؤلفه‌ها ۳۶۴
۹.۶ حاصل ضرب سه گانهٔ اسکالر، سایر ضربهای مکرر ۳۷۲

فصل ۷

جبرخطی، قسمت دوم: ماتریس و دترمینان

۱.۷ مفاهیم اساسی ۳۸۰
۲.۷ جمع ماتریسها، ضرب ماتریس در یك عدد ۳۸۳
۳.۷ ترانهاد یك ماتریس. ماتریسهای مخصوص ۳۸۵
۴.۷ ضرب ماتریسی ۳۹۱
۵.۷ دستگاههای معادلات خطی. روش حذفی گاوس ۴۰۳
۶.۷ مرتبهٔ ماتریس ۴۱۴
۷.۷ دستگاههای معادلات خطی: وجود وخواص عمومی جوابها ۴۱۹
۸.۷ معکوس ماتریس ۴۲۳
۹.۷ دترمینانهای مرتبهٔ دوم و سوم ۴۳۰
۱۰.۷ دترمینانهای با مرتبهٔ دلخواه ۴۳۸
۱۱.۷ ارتباط رتبه با دترمینانها. قاعدهٔ کرامر ۴۵۲
۱۲.۷ صور دوخطی: درجه دوم. هرمیتی و هرمیتی کج ۴۶۱
۱۳.۷ مقادیر ویژه، بردارهای ویژه ۴۶۷
۱۴.۷ مقادیر ویژهٔ ماتریسهای هرمیتی، هرمیتی کج ویکانی ۴۷۴
۱۵.۷ دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی ۴۸۱

فصل ۸

حساب دیفرانسیل برداری، میدانهای برداری

۱.۸ میدانهای اسکالر و میدانهای برداری ۴۹۳
۲.۸ حساب برداری ۴۹۸
۳.۸ منحنیها ۵۰۲
۴.۸ طول قوس ۵۰۶

عنوان	صفحه
۵.۸ مماس . انحنا و تاب	۵۰۹
۶.۸ سرعت و شتاب	۵۱۴
۷.۸ قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ مقدار میانگین در توابع چند متغیره	۵۲۰
۸.۸ مشتق جهتی . گرادیان میدان اسکالر	۵۲۵
۹.۸ تبدیل دستگاههای مختصات و مؤلفه‌های بردار	۵۳۴
۱۰.۸ دیورژانس یك میدان برداری	۵۳۹
۱۱.۸ تاو میدان برداری	۵۴۵
فصل ۹	
انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح . قضایای انتگرال	
۱.۹ انتگرال روی خط	۵۵۰
۲.۹ محاسبهٔ انتگرال روی خط	۵۵۳
۳.۹ انتگرالهای دو گانه	۵۶۰
۴.۹ تبدیل انتگرال دو گانه به انتگرال روی خط	۵۶۹
۵.۹ سطحها	۵۷۷
۶.۹ صفحهٔ مماس . صورت بنیادی اول . مساحت	۵۸۱
۷.۹ انتگرال روی سطح	۵۸۹
۸.۹ انتگرالهای سه گانه ، قضیهٔ دیورژانس گاوس	۵۹۶
۹.۹ نتایج وکاربردهای قضیهٔ دیورژانس	۶۰۱
۱۰.۹ قضیهٔ استوکس	۶۱۰
۱۱.۹ نتایج وکاربردهای قضیهٔ استوکس	۶۱۴
۱۲.۹ انتگرالهای روی خط مستقل از مسیر	۶۱۷

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

مقدمهٔ مترجمان

کتاب حاضر برای دانشجویانی که مایلند مفاهیم اساسی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی، جبرخطی، آنالیزبرداری، توابع مختلط، آنالیزعددی، آمار و احتمال وکاربرد همهٔ آنها را درمهندسی وفیزیك بدانند بسیارسودمند است. با آنکه کتاب به حد خودکفا از مطالب نظری لازم برخوردار است درتألیف آن، همچنانکه از مثالها ومسائل ارائه‌شده درآن به خوبی مشهود است، بیشترزمینه‌های کاربردی موردنظر بوده است. تلفیق این دوجنبه و نیز سادگی وروانی بیان مطالب، که شیوه مؤلف است، کتاب را به صورت مرجعی معقول برای بسیاری از مراکز علمی درنقاط مختلف جهان درآورده است.

ترجمهٔ این کتاب درسال ۱۳۵۸ از روی چاپ سوم آن که آخرین چاپ کتاب (در آن زمان) بود به‌وسیلهٔ مترجمین آغاز شد. بعد ازآنکه ترجمهٔ بیش از ثلث کتاب به‌اتمام رسیده بود چاپ چهارم آن درنخستین روزهای انتشارش به دست ما رسید. مقایسه چاپ سوم و چهارم تغییرات زیادی را (که در مقدمهٔ مؤلف آمده است) نشان می‌داد. ازاین‌رو ترجمهٔ چاپ چهارم کتاب ازآغاز شروع گردید. ادامهٔ ترجمهٔ کتاب توسط مترجمین مورد تأیید مرکزنشردانشگاهی که از سال ۱۳۵۹ فعالیت خود راآغاز نمود قرار گرفت و این مرکز ویراستاری، چاپ و انتشارآن را وجههٔ همت خود قرار داد.

درنظربود که ترجمهٔ کل کتاب همانند اصل آن دریك جلد منتشرشود ولی حجم زیاد کتاب انتشار آن را در دو جلد موجه‌تر نمود. از این‌رو ۹ فصل اول کتاب درجلد اول و ۱۱ فصل بقیه در جلد دوم انتشار یافت.

ویراستاری جلد اول دردوقسمت به ترتیب توسط آقایان اکبرآقاابراهیمیان و علی راکعی صورت گرفت و ویرایش جلد دوم توسط آقای علی‌راکعی انجام پذیرفت که دقت و حوصلهٔ آنان درخور تقدیر است. ازآقای همایون معین که دستنویسهای جلد اول کتاب را مطالعه کردند و پیشنهاداتی ارائه دادند قدردانی می‌شود.

از آقای دکتر نصرالله پورجوادی سرپرست محترم مرکز نشر دانشگاهی به خاطر همکاریهای مؤثرشان در رفع مشکلات و تسهیل انتشار کتاب سپاسگزاریم. راهنمایی و مشاورت آقای دکتر علی‌اکبر جعفریان مسئول محترم گروه ریاضی مرکز نشر که ناشی‌از علاقه واعتقاد ایشان به ترویج ونشر کتابهای علمی‌است کمك بزرگی برای ما بوده است؛ با تشکر فراوان،توفیق بیشتری برای ایشان آرزو می کنیم. ازکارکنان گروه ریاضی مرکز

نشر وهمچنین ازکارکنان تولید فنی مرکزنشردانشگاهی کمال تشکر را داریم.

درخاتمه ازهمهٔ دانش‌پژوهان وهمکارانی که باتذکرات وراهنماییهای‌خود ایرادات مترجمین را گوشزد و آنها را در رفع اشکالات برای چاپهای بعدی کمک می‌نمایند قبلا تشکر می‌شود.

عبدالله شیدفر
گروه ریاضی دانشگاه علم وصنعت‌ایران

حسین فرمان
گروه فیزیک دانشگاه علم‌وصنعت‌ایران

مقدمهٔ مؤلف

هدف کتاب . منظور این کتاب ارائهٔ قسمتهایی از ریاضیات به‌دانشجویان مهندسی وفیزیك است که ازدیدگاه نوین در رابطه با مسائل عملی ازاهمیت بیشتری برخوردارند. مطالب این کتاب به تناسب فراوانی کاربردشان انتخاب شده‌اند. ایده‌های جدید آموزش نوین ریاضی، که در سمپوزیومهای اخیرآموزش مهندسی برآنها تأکید شده در این کتاب مد نظر قرارگرفته است. این کتاب هم برای مؤسسه‌هایی که سابقه‌ای طولانی در آموزش ریاضیات درسطحی گسترده دارند مناسب است و هم برای آنهایی که هدف کلی خود را توسعهٔ برنامهٔ آموزش ریاضیات قرار داده‌اند مفید است.

تنها پیشنیاز لازم برای این کتاب یك دورهٔ مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

مباحث این کتاب پایهٔ دوره‌های درسی دانشجویان لیسانس وفوق لیسانس مهندسی، فیزیك و ریاضیات را در آمریکا، کانادا و اروپا تشکیل می‌دهد.

تغییرات چاپ چهارم

چاپ جدید با چاپهای اول، دوم و سوم تفاوتهای اساسی زیر را دارد:

مجموعهٔ مسائل. مسائل عوض شده‌اند و بـه آنها جنبه‌های کاربردی بیشتری داده شده است.

مدلسازی. با ارائهٔ کاربردهای تازه دربخشهای مختلف تأکید بیشتری بر مدلسازی کرده‌ایم.

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی. بخش جدیدی دربارهٔ عملگرهای دیفرانسیلی به فصل ۲ اضافه شده است. روشهای صفحهٔ فاز، پایداری و معادلهٔ مشهور واندرپل درفصل جدیدی (فصل ۳) بررسی شده‌اند.

دستگاههای معادلات دیفرانسیل. یك رهیافت مقدماتی (بدون استفاده از ماتریس)

افزوده شده‌است. زهیافت ماتریسی گسترش یافته و بخش جدیدی به‌آن اختصاص‌یافته‌است.

تبدیل لاپلاس. پیچش اضافه شده است. تمامی این فصل بازنویسی شده است تا از حجم آن‌کاسته شود. درنوشتهٔ جدید دو قضیهٔ انتقال دریك بخش‌آمده است، معادلات دیفرانسیل را جلوتر بررسی کرده‌ایم، پیچش تعریف شده و مورد استفاده قرار گرفته است؛ کسرهای جزئی بعد از پیچش و با تأکید کمتری تشریح شده‌اند.

معادلات دیفرانسیل جزئی. به‌این فصل‌بخش جدیدی دربارهٔ کاربرد تبدیل‌لاپلاس در معادلات دیفرانسیل جزئی اضافه شده است.

ماتریس. بعضی ازمباحث این فصل با توجه به‌جبرنوین خطی بازنویسی شده‌است. تعداد کاربردهای ماتریس نیز درچاپ جدید افزایش یافته است.

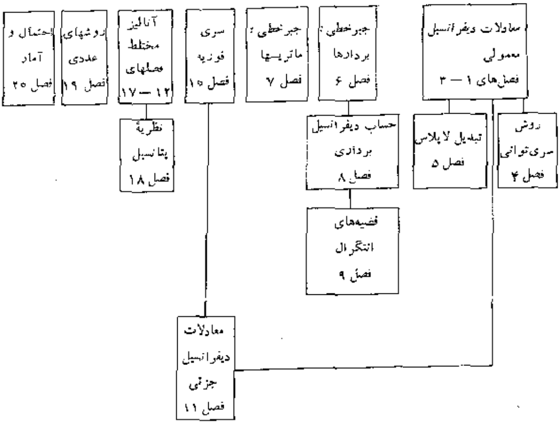
آنالیز مختلط. به ترتیب زیر ارائه شده است . در سه بخش کوتاه (به جای یك بخش طولانی در چاپهای قبل) آنالیز مختلط را به سادگی معرفی کرده‌ایم. به‌دلایل‌مشابه درآغاز فصل مربوط به نگاشت همدیسی که راجع به اعداد مختلط بحث می کند مثالهای بیشتری آورده‌ایم. فصل‌مربوط‌به دنباله‌ها وسریها بازنویسی‌شده به‌طوری که درکلاسهای آنالیز مختلط فقط تدریس دو بخش‌اول فصل‌کافی است وبدین ترتیب بدون‌آنکه‌پیوستگی مطالب ازدست برود صرفه‌جویی زیادی دروقت می‌شود. سری توانی، سری‌تیلور وسری لوران دراین چاپ دریك فصل قرار دارند، یعنی نسبت به چاپهای قبلی آنها را به هم نزدیکتر کرده‌ایم.

آنالیز عددی . دراین‌چاپ بخش جدیدی دربارهٔ اسپلاین که برای مهندسین‌اهمیت روزافزونی دارد اضافه شده است.

احتمال وآمار. مجموعه‌های مسائل را با افزودن کاربردهای بیشتر توسعه داده‌ایم.

مراجع. که در ضمیمهٔ ۱ آمده‌اند با توجه به انتشارات و مقالات روز تدوین شده‌اند.

محتویات و ترتیب. ترتیب موضوعها به‌طورعمده‌درنمودارزیرنشان داده‌شده‌است:



صفحات زیادی به‌سه‌موضوع معادلات‌دیفرانسیل‌معمولی، جبرخطی و آنالیز برداری، وآنالیزمختلط که احتمالا برای مهندسین در درجه اول اهمیت قرار دارند اختصاص یافته است. درعین حال فصلهای مربوط به سری فوریه، معادلات دیفرانسیل جزئی ، روشهای عددی و غیره ، آنقدر مفصل هستند که بتوان از آنها برای تدریس در دوره‌های معمولی استفاده کرد.

برای آنکه استفاده ازقسمتهای مختلف آسان باشد فصلها را تا جایی که ممکن بوده است مستقل از یکدیگر نوشته‌ایم.

فصلهای کتاب به بخشهای نسبتاً کوتاه تقسیم شده‌اند. هربخش شامل مثالهای نوعی ومسائلی است که مفاهیم، روشها ونتایج وکاربرد مهندسی آنها را روشن می‌کنند.

کتاب شامل یادداشتهای تاریخی، ارجاع به مقاله‌های اصلی ، وحدود ۴۰۰ شکل نیز هست.

مراجع. درآخر کتاب فهرستی از کتابهای مرجع ومنابعی برای مطالعه بیشتر آورده شده است ؛ این فهرست از صفحهٔ ض - ۱ شروع می‌شود . چند فرمول در مورد توابع خاص درضمیمهٔ ۳ که از صفحهٔ ض - ۵۴ شروع می‌شودآمده است.

مسائل و جوابها. دراین کتاب بیش از ۳۵۰۰ مسئله وجود داردکه در انتخاب آنها دقت شده است ؛ این مسائل از تمرینهای ساده تا کاربردهای عملی نسبتاً پیچیده را در بر می گیرند. جواب مسائلی که شمارهٔ آنها فرد است در آخر کتاب (صفحهٔ ض - ۶ به بعد) آمده است.

جدولهای توابع. در ضمیمهٔ ۴ چاپ شده است ؛ این ضمیمه از صفحهٔ ض - ۶۱ شروع می‌شود.

توصیه‌هایی در مورد درسهای چند ترمی. مندرجات این کتاب رامی‌توان در۴ترم متوالی و با هفته‌ای ۳ — ۵ ساعت تدریس کرد :

ترم اول معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱ — ۵).

ترم دوم جبرخطی و آنالیز برداری (فصلهای ۶ — ۹).

ترم سوم سری فوریه ومعادلات دیفرانسیل جزئی (فصلهای ۱۰ و ۱۱).
روشهای عددی (فصل ۱۹).

ترم چهارم آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲ — ۱۸)

آمار مهندسی. (۳ — ۵ ساعت درهفته ؛ فصل ۲۰) را می‌توان در خلال هریك از این چهار ترم فوق یا بعد ازآنها تدریس کرد.

دوره‌های یك‌ترمی مستقل. این کتاب برای دوره‌های یك‌ترمی مستقل مختلف باسه ساعت تدریس درهفته مناسب است ؛ مثلا :

مختصری دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱ و ۲).
تبدیل لاپلاس (فصل ۵).

جبر برداری و حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصلهای ۶ و ۸).
ماتریسها و دستگاههای معادلات خطی (فصل ۷).
سری فوریه ومعادلات دیفرانسیل جزئی (فصلهای ۱۰ و ۱۱).
آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲ و ۱۷).
آنالیز عددی (فصل ۱۹).

دوره‌های کوتاهتر. بخشهایی که در دوره‌های کوتاهتر قابل حذفند درآغاز هرفصل مشخص شده‌اند.

اصولی که درانتخاب موضوعها موردنظرقرارگرفته‌اند. کتابی نظیر این کتاب چه موضوعهایی را باید دربرداشته باشد وترتیب وارائهٔ آنها چگونه باید باشد؟
برای یافتن جواب این سؤالات اساسی می‌توان نگاهی به‌سیرتحول تاریخ‌ریاضیات مهندسی انداخت، این فرایند تحول دو مشخصهٔ جالب دارد:

۱. اهمیت ریاضیات درعلوم مهندسی روز به روز بیشترشده و قابل پیش بینی است که درآینده نیز این اهمیت افزایش یابد. واقعیت آن است که امروزه مسائل مهندسی به اندازه‌ای پیچیده‌اندکه بیشتر آنها را نمی‌توان صرفاً با استفاده از شهود فیزیکی و تجارب‌گذشته حل کرد. رهیافت تجربی درحل بسیاری از مسائل‌درگذشته موفق بوده است، اما به محض اینکه سرعتهای بالا، نیروهای بزرگ، دماهای بالا یا سایر شرایط غیرعادی وارد مسئله می‌شوند با شکست روبرو می‌شود؛ این وضعیت به این دلیل که مواد جدید (نظیر پلاستیکها، آلیاژها وغیره) خواص فیزیکی غیر عادی دارند حادتر می‌شود. امروزه‌کارهای‌آزمایشی پیچیده، وقت‌گیر و پرهزینه شده‌اند. دراین زمینه ریاضیات در برنامه‌ریزی آزمایشها، بررسی داده‌های آزمایشی، و تقلیل کار و هزینهٔ یافتن جواب کمک می‌کند.

۲. آن دسته از روشهای ریاضی که به دلایل نظری محض توسعه یافته بودند ناگهان از اهمیت زیادی در ریاضیات مهندسی برخوردارشدند. برای مثال می‌توان از نظریهٔ ماتریسها، نگاشت همدیسی ونظریهٔ معادلات دیفرانسیلی‌که جوابهای تناوبی دارند نام‌برد.

بازتاب این وضعیت درآموزش ریاضیات‌مهندسی چیست؟ آیا چون مقدار ریاضیات مورد نیاز مهندسین روز به روز بیشتر می‌شود باید در دوره‌های آموزش ریاضی تعداد مطالب بیشتر وبیشتری بگنجانیم ولی به هر مطلب دقت کمتر و کمتری اختصاص دهیم؟ یا باید توجه خود را روی چند ایدهٔ اساسی که از اهمیت کاربردی عمومی برخوردارند و با دقت زیاد طوری انتخاب شده‌اند که به خصوص برای‌آموزش تفکر ریاضی به دانشجو وپرورش قدرت ابتکار وی مناسب باشند متمرکز کنیم؟
شصت یا هشتاد سال پیش‌هیچکس نمی‌توانست پیش‌بینی کند که روزی نگاشت همدیسی یاماتریس درقسمت ریاضی‌کارمهندسین اهمیتی‌پیداخواهدکرد. امروزهم‌پیش‌بینی نظریه‌های جدید ریاضی که بیست یا سی سال بعد کاربردهایی درمهندسی خواهند داشت

دشوار است، اما این مسئله مهمی نیست. اگر دانشجو اساس ریاضی را به خوبی آموخته باشد پاسخگوی احتیاجات آتی نیزخواهدبود چرا که می‌تواند با مطالعهٔ بیشتر ازروشهای جدید نیز آگاهی یابد.

بنابراین به‌نظر می‌رسد که مهمترین هدف ریاضیات مهندسی آشنا کردن دانشجو با تفکر ریاضی است. دانشجو باید اصول راهنما و ایده‌هایی را که افق دید را گسترش می‌دهد و مهمتر از عملیات دستوری هستند بشناسد. او باید معتقد شود که ریاضیات مجموعه‌ای ازدستورالعملها وفنون حل مسئله نیست بلکه علمی سیستماتیك ودارای اهمیت کاربردی است که برتعداد نسبتاً کمی مفهوم بنیادی‌استواراست و ازروشهای وحدت‌بخش قدرتمندی بهره می گیرد. دانشجوی مهندسی باید خود را به لزوم اعمال رویهٔ ریاضی‌در مسائل‌مهندسی متقاعد سازد و دریابد که نظریه و کاربردش همان ارتباطی را دارند که درخت و میوه‌اش.

دانشجو درخواهد یافت که‌کاربرد ریاضیات دریك مسئلهٔ مهندسی سه مرحله دارد:

۱. ترجمهٔ اطلاعات فیزیکی به‌صورت ریاضی (مدلسازی). به این ترتیب مدلی ریاضی از وضعیت فیزیکی موردنظربه‌دست می‌آید. این مدل ممکن‌است یك‌معادلهٔ دیفرانسیل، دستگاهی ازمعادلات خطی یا برخی دیگر از عبارات ریاضی باشد.

۲. بحث دربارهٔ مدل به دست آمده به کمك روشهای ریاضی. این کار باعث می‌شود که جواب مسئلهٔ داده شده به‌صورت ریاضی تعیین شود.

۳. تبیین نتیجهٔ ریاضی حاصل با عبارات فیزیکی.

به نظر می‌رسد که هر سهٔ این مراحل از اهمیت یکسانی برخوردارند، وروش این کتاب طوری است که به دانشجو کمك می‌کند تا مهارت لازم برای طی هر سه مرحله را کسب کند. از این‌رو به‌کاربردهایی که جنبهٔ عمومیتری دارند اولویت داده شده است.

در برخی موارد پذیرش بدون اثبات قضایایی که اثبات آنها درسطح کتابی از این نوع نیست غیرقابل اجتناب است. این موارد را مشخص کرده‌ایم، زیرا معتقدیم که‌پنهان کردن دشواریها و بیش از حدآسان جلوه دادن مطلب هیچ کمکی به‌آمادگی دانشجو به منظورتصدی کار حرفه‌ایش نمی‌کند.

آنچه ذکر شد بعضی ازاصولی است که من در انتخاب و عرضهٔ مباحث این کتاب از آنها پیروی کرده‌ام. در انتخاب مطالب با استفاده از تجربیات آموزشی و تحقیقاتی قدیم و جدید نهایت دقت را مبذول داشته‌ام و در مقابل این وسوسه که «هرآنچه را که در ریاضیات مهندسی اهمیت دارد» درکتاب خود بیاورم مقاومت کرده‌ام.

کوشش خاصی به عمل آمده است تا مطالب حتی‌الامکان ساده، روشن ودقیق بیان شود، چنین تلاشی در امرانتخاب نمادها هم صورت گرفته است. درهرفصل سطح درس به تدریج بالا می‌رود و از جهشهای ناگهانی و نیز انباشتن مطالب نظری مشکل احتراز شده است.

آخر هر اثبات با علامت ▲ مشخص شده است. این علامت درآخر بعضی تعاریف و درآخر مجموعه مثالهایی که متن دیگری به دنبال دارند هم به‌کار رفته است.

سپاسگزاری. من به بسیاری از استادان پیشین ، همکاران و دانشجویانم بـه خاطر راهنمایی و کمك آنها در امر آماده کردن این کتاب مدیونم. بسیاری از قسمتهای کتاب قبل از چاپ در کلاسهای درسی من توزیع شده است و دانشجویان با توصیه‌هایی که به نظرشان می‌رسید آن را بـه من بازگردانده‌اند. بحثهایی کـه با مهندسین و ریاضیدانها داشته‌ام (همچنین نظرهای کتبی آنها) کمك شایانی به‌من کرده‌است؛ مایلم به‌ویژه ازاساتید :

S.Bergman ، S. L. Campbell ، J. T. Cargo ، P. L. Chambré ، A. Cronheim ، J. Delany ، J. W. Dettman ، R.G. Helsel ، W. N. Huff ، E. C. Klipple ، V. Komkow ، H. Kuhn ، G. Lamb ، H. B. Mann ، I. Marx ، W. D. Munroe ، H. - W. Pu ، T. Rado ، P. V. Reichelderfer ، J.T. Scheick ، H. A. Smith ، J. P. Spencer ، J. Todd ، H. J. Weiss ، A. Wilansky که همگی در آمریکاهستند، استاد H. S. M. Coxeler از تورونتو و اساتید B. Baule ، H. Behnke ، H. Florian ، H. Graf ، F. Hohenberg ، K. Klotter ، M. Pinl ، F. Reutter ، C. Schmieden ، H. Unger ، A. Walther ، H. Wielandt که دراروپا هستند نام ببرم. دراینجا فقط می‌توانم تشکروسپاس خود را تقدیم حضورشان کنم.

سرانجام از جان وایلی و پسران به خاطرهمکاری مؤثرشان و نیز دقت فراوانی که در چاپ این کتاب مبذول داشته‌اند سپاسگزاری می کنم.

پیشنهادهای بسیاری از خوانندگان در این چاپ اعمال شده است . از نظرهـای اصلاحی و هرگونه توصیه با تشکر فراوان استقبال خواهم کرد.

اروین کرویت سیگ

۱

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل در ریاضیات مهندسی از اهمیتی بنیادی برخوردار است زیرا بسیاری از قوانین و روابط فیزیکی به صورت ریاضی به‌شکل چنین معادلاتی ظاهر می‌شوند. ما مسائل مختلف فیزیکی وهندسی راکه‌منجر به‌معادلات دیفرانسیل می‌شوند ومهمترین‌روشهای متعارف‌برای حل چنین معادلاتی‌را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. درحالت کلی چنین معادلاتی منجر به‌انتگرالگیری خواهند شد.

همچنین در مورد بـه‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل وضعیتهای فیزیکی داده شده را به‌دقت بررسی می کنیم. این انتقال از مسئلهٔ فیزیکی به‌یك «مدل ریاضی» متناظر با آن **مدلسازی** نام دارد‌که برای مهندسین و فیزیکدانان از اهمیت عملی فراوانی برخوردار است وبا مثالهای نوعی مجسم خواهد شد.

پنج فصل اول‌کتاب اختصاص به‌معادلات دیفرانسیل معمولی دارد. در فصل حاضر باساده‌ترین معادلات ازاین‌نوع، یعنی معادلات دیفرانسیل باصطلاح مرتبه‌اول آغازمی کنیم.

معادلات دیفرانسیل بویژه برای‌حسابگرهای‌نوین مناسب‌اند. **روشهای عددی** متناظر برای‌یافتن جوابهای تقریبی‌معادلات دیفرانسیل مرتبه اول «بخش ۷.۱۹» که مستقل ازسایر بخشهای فصل ۱۹ است، گنجانده شده است. روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم دربخش ۸.۱۹

پیشنیاز این فصل: حساب انتگرال.

بخشهایی‌که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۸.۱ الی ۱۲.۱

مراجع: ضمیمهٔ ۱ قسمت ب.

جواب مسائل : ضمیمهٔ ۲.

۱۰۱ مفاهیم و ایده‌های اساسی

دراین بخش‌مفاهیم اساسی مربوط به‌معادلات‌دیفرانسیل را تعریف وتشریح کرده آنها رابا مثالهایی روشن می‌سازیم. سپس دومسئلهٔ عملی ساده راکه ازفیزیك وهندسه اتخاذشده‌اند بررسی می‌کنیم. این بررسی، نخستین ایده از ماهیت وهدف معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها را به‌ما نشان خواهد داد.

منظور ازیك **معادلهٔ دیفرانسیل معمولی** رابطه‌ای است‌که شامل یك یا چند مشتق تابع غیر مشخص y از x باشد؛ این رابطه ممکن است شامل خود y ، توابع معلومی از x ومقادیر ثابت نیز باشد.

مثلا ،

$$y' = \cos x , \tag{۱}$$

$$y'' + ۴y = ۰ , \tag{۲}$$

$$x^۲ y''' y' + ۲e^x y'' = (x^۲ + ۲) y^۲ \tag{۳}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند.

اصطلاح معمولی برای تمیز دادن این نوع معادلــه از معادلهٔ با مشتق جزئی است که شامل مشتقات جزئی یك تابع غیرمشخص از دو یا چند متغیر مستقل است. مثلا

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

یك معادلهٔ با مشتق جزئی است. درفصل حاضرما فقط به‌بررسی‌معادلات دیفرانسیل‌معمولی خواهیم پرداخت.

یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی را از **مرتبهٔ** n نامند هرگــاه مشتق n ام y نسبت به x بالاترین مشتق y موجود درآن معادله باشد.

مفهوم مرتبهٔ یك معادلهٔ دیفرانسیل منجر به‌رده‌بندی مفیدی از آنها به‌معادلات مرتبه اول، دوم، وغیره می‌شود. بنابراین (۱)، یك معادلهٔ مرتبهٔ اول است، (۲) از مرتبهٔ‌دوم است، و (۳) از مرتبهٔ سوم.

در این فصل به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌پردازیم. معادلات مرتبهٔ دوم وبالاتر درفصول ۲ تا ۵ مورد بحث قرار خواهندگرفت.

تابع

$$y = g(x) \tag{۴}$$

را یك **جواب** معادلــهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول داده شده در فــاصله‌ای مثل $a < x < b$ (احتمالا نامتناهی) نامند درصورتیکه g درسراسر این فاصله تعریف شده ومشتق‌پذیرباشد

وبا جایگزینی g و g' بجای y و y'، معادله به‌یك اتحاد تبدیل گردد.
مثلا تابع :

$$y = g(x) = e^{۲x}$$

به‌ازای هر x یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول

$$y' = ۲y$$

است زیرا با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$g' = ۲e^{۲x}$$

وبا جایگزینی g و g' ملاحظه می‌کنیم که معادله به اتحاد

$$۲e^{۲x} = ۲e^{۲x}$$

تبدیل می‌شود.

گاهی اوقات جواب معادلهٔ دیفرانسیل به صورت تابعی ضمنی ظاهر می‌شود، یعنی به‌طور ضمنی به‌شکل

$$G(x, y) = ۰$$

معین می‌شود. چنین جوابی را، درمقابل جواب صریح (۴)، جواب ضمنی می‌نامند.
مثلا،

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \qquad (y > ۰)$$

جواب ضمنی معادلهٔ دیفرانسیل

$$yy' = -x$$

درفاصلهٔ $۱ > x > ۱-$ است، که دانشجو می‌تواند صحت آن را تحقیق کند.

کارعمدهٔ نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی یافتن کلیهٔ جوابهای یك معادلهٔ دیفرانسیل مفروض و تحقیق در خواص آنها است. ما روشهای متعارف مختلفی راکه بدین منظور ارائه شده‌اند، مورد بحث قرار خواهیم داد.

یك معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است دارای چند جواب باشد. این مطلب رابا مثالهای زیر روشن می‌کنیم.

مثال ۱

هریك از توابع

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + ۳, \quad y = \sin x - \frac{۴}{۵}$$

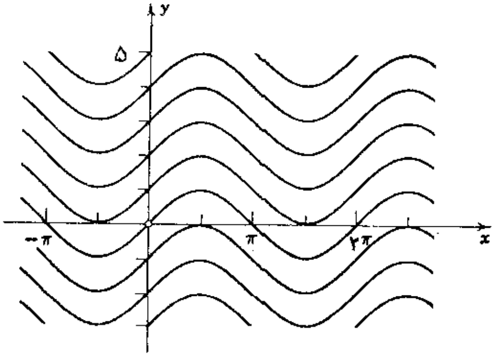
جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) یعنی

$$y' = \cos x$$

است، واز حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که هرجواب معادله بشکل

$$y = \sin x + c \qquad (۵)$$

است که درآن c عددی ثابت است. هرگاه c را دلخواه بگیریم در آن صورت (۵) کلیهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را نمایش خواهد داد. (به‌شکل ۱ رجوع کنید.)



شکل ۱. جوابهای $y' = \cos x$

مثال ۲

دانشجو می‌تواند تحقیق کند که هریك از توابع

$$y = e^x, \quad y = ۲e^x, \quad y = -\frac{۶}{۵}e^x \qquad (۶)$$

به‌ازای هر x جواب معادلهٔ دیفرانسیل،

$$y' = y$$

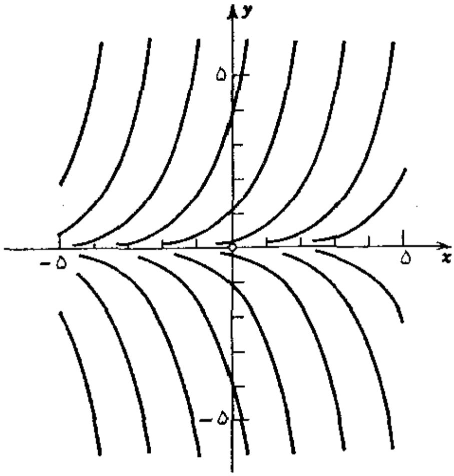
است. بعداً خواهیم دید که هرجواب این معادله به‌شکل

$$y = ce^x \qquad (۷)$$

است که در آن c عددی است ثابت. بنابراین، دستور (۷) با c دلخواه، کلیه جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل را نمایش می‌دهد. (به‌شکل ۲ رجوع کنید.)

این مثالها معلوم می کنند که یك معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است (ودرحالت کلی حتماً) بیش از یك، حتی بینهایت، جواب داشته باشد که می‌توان آنها را با یك فرمول که متضمن

ثابت دلخواه c است نمایش داد. معمول است که چنین تابعی را که شامل ثابت دلخواهی[1] است **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول متناظر بنامند. هرگاه مقدار معینی به این ثابت دلخواه بدهیم آنگاه جواب حاصل را یک **جواب خصوصی** می‌خوانند.



شکل۲. جوابهای $y' = y$

مثلا (۷) یک جواب عمومی و (۶) جوابهای خصوصی معادلهٔ $y = y'$ هستند.

دربخشهای زیرروشهای مختلف یافتن جوابهای عمومی معادلات مرتبه‌اول را نشان می‌دهیم. جواب عمومی یک معادلهٔ مفروض که از چنین روشی به‌دست می‌آید، صرفنظراز نمادگذاری، منحصر بفرد است ودرنتیجه این‌جواب را جواب عمومی آن معادله می‌نامند.

یادآور می‌شویم کــه در بعضی موارد ممکن است جوابهای دیگری از یک معادلهٔ مفروض موجود باشندکه نتوان‌آنها را با دادن مقدار معینی به ثابت دلخواه c در جواب عمومی به‌دست آورد؛ چنین جوابی را **جواب منفرد** معادله می‌خوانند.

مثلا، معادلهٔ

$$y'^{2} - xy' + y = 0 \qquad (8)$$

دارای جواب عمومی

$$y = cx - c^{2}$$

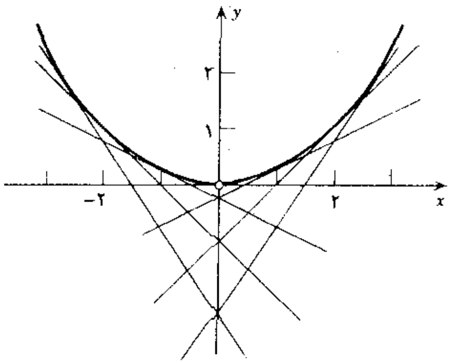
است. این جواب مبین خانواده‌ای از خطوط راست است‌که هرخط، متناظر مقدار معینی

۱. ممکن است در برخی حالات برای احتراز از عبارات موهومی یا عبارات نامناسب دیگر مجبور شویم برد عدد ثابت را محدودکنیم.

از c است. جواب دیگر

$$y=\frac{x^2}{4}$$

است که خواننده می‌تواند با گذاردن آن در معادله، درستی آن را تحقیق کند. این یك جواب منفرد (۸) است زیرا نمی‌توانیم با تخصیص مقدارمعینی به c درجواب عمومی آن را به‌دست آوریم. واضح است که هرجواب‌خصوصی، یك خط مماس برسهمی، که توسط جواب منفرد مشخص می‌شود، را نمایش می‌دهد (شکل ۳).



شکل ۳. جواب منفرد (نمایش سهمی) وجوابهای خصوصی معادلهٔ (۸)

جوابهای منفرد بندرت درمسائل مهندسی ظاهر می‌شوند.

لازم است یادآورشویم که دربرخی از کتابها مفهوم جواب عمومی به‌جوابی اطلاق می‌شود که کلیهٔ جوابهای یك معادله، یعنی هم خصوصی و هم منفرد، را دربرداشته باشد. ما این تعریف را به‌دو دلیل نمی‌پذیریم. نخست آنکه اغلب اثبات اینکه دستوری شامل همهٔ جوابهاست واقعاً مشکل است؛ لذا این تعریف جواب عمومی در عمل تا حدودی بلااستفاده است. بعلاوه خواهیم دیدکه رده‌ای بزرگ وبسیار مهم از معادلات (معادلات دیفرانسیل باصطلاح خطی) جواب منفرد ندارند وتعریف ما ازجواب عمومی را می‌توان به‌آسانی برای معادلات مراتب بالاترچنان تعمیم دادکه مفهوم حاصل، شامل همهٔجوابهای یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد.

خواهیم دیدکه شرایطی که تحت آنها یك معادلهٔ دیفرانسیل مفروض دارای جواب باشد تقریباً عمومی است. اما باید یادآور شویم که معادلات ساده‌ای موجودانداکه اصلا جواب ندارند، ومعادلات دیگری یافت می‌شوندکه فاقد جواب عمومی هستند. مثلامعادلهٔ $y'^2=-1$ دارای جوابی حقیقی نسبت به y نیست. (چرا؟) معادلهٔ $|y'|+|y|=0$ جواب عمومی ندارد چون تنها جواب آن $y\equiv 0$ است.

معادلات دیفرانسیل ازاهمیت زیادی درمهندسی برخوردارند زیرا بسیاری‌ازقوانین وروابط فیزیکی به‌طور ریاضی به‌شکل معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند.

حال یك مثال سادهٔ فیزیکی را درنظر می‌گیریم که مراحل کلی **مدلسازی** را شرح می‌دهد، یعنی، مراحلی که ما را از وضعیت فیزیکی (دستگاه فیزیکی) به یك فرمولبندی ریاضی (مدل ریاضی) وتعیین جواب، وتعبیر فیزیکی ماحصل، می‌رساند. این‌کار شاید ساده‌ترین راه بدست‌آوردن یك ایدهٔ مقدماتی دربارهٔ ماهیت و هدف معادلات دیفرانسیل وکاربردهای آنها باشد.

مثال ۳. رادیو اکتیویته، تلاشی نمایی

تجربه نشان می‌دهدکه میزان تجزیهٔ یك مادهٔ رادیو اکتیو متناسب با مقدار مادهٔ موجود است. اگر درلحظهٔ معینی مثلا $t=0$ فرضاً جرم مادهٔ رادیواکتیو ۲ گرم باشد مقدار این مادهٔ رادیواکتیو درمدت زمانی بعداز آن چه اندازه است؟

مرحلهٔ اول (بیان ریاضی فرایند فیزیکی به‌وسیلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل). اگر مقدار مادهٔ رادیواکتیو موجود در لحظهٔ t را با $y(t)$ نمایش دهیم میزان تغییر برابر dy/dt خواهد بود. بنابه‌قوانین تابش dy/dt با y متناسب است. بنابراین

$$\frac{dy}{dt}=ky. \qquad (۹)$$

دراینجا k یك ثابت فیزیکی معین است که مقدار عددی‌آن برای مواد رادیواکتیومختلف معلوم‌شده‌است. (مثلا درمورد رادیوم، $k\approx -۱٫۴\times ۱۰^{-۱۱}S^{-۱}$.) بدیهی‌است که چون مقدار ماده مثبت‌است ونسبت به‌زمان‌کاهش می‌یابد dy/dt منفی است واز اینرو k منفی است. می‌بینیم که فرآیند فیزیکی مورد بحث از نقطه‌نظر ریاضی با یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول بیان شده است. از اینرو این معادله، مدل ریاضی آن فرآیند فیزیکی است. هرقانون فیزیکی که شامل میزان تغییر تابعی مانند سرعت، شتاب وغیره باشد منجر به یك معادلهٔ دیفرانسیل خواهد شد. بدین جهت معادلات دیفرانسیل بکرات در مسائل فیزیکی و مهندسی ظاهرمی‌شوند.

مرحلهٔ دوم (حل معادلهٔ دیفرانسیل). دراین مرحلهٔ ابتدایی‌از بحثمان، هیچ روشی سیستماتیك برای حل (۹) نمی‌شناسیم. معهذا می‌دانیم که اگر(۹) جوابی بصورت $y(t)$ داشته باشدآنگاه لازم‌است‌که مشتق آن‌با y متناسب باشد. ازحساب دیفرانسیل وانتگرال بیاد داریم‌که توابع نمایی دارای این خاصیت‌اند. درواقع، تابع e^{kt} یا به‌طور کلی‌تر

$$y(t)=ce^{kt} \qquad (۱۰)$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، به ازای هر t جوابی برای (۹) به‌شمار می‌رود و

درستی این گفته را با جایگزینی (۱۰) در (۹) می‌توان تحقیق نمود. چون (۱۰) متضمن یك ثابت دلخواه است، پس یك جواب عمومی معادلهٔ مرتبهٔ اول (۹) است. [بعداً (در بخش ۱.۳) خواهیم دید که (۱۰) همهٔ جوابهای (۹) را شامل می‌شود یعنی (۹) جواب منفرد ندارد.]

مرحلهٔ سوم (تعیین جواب خصوصی). واضح است که فرآیندهای فیزیکی رفتاری منحصر بفرد دارند. بنا براین با استفاده ازاطلاعات داده شدهٔ بیشتری قادر خواهیم بود که مقدار عددی معینی را برای c در (۱۰) انتخاب کنیم به طوری که جواب خصوصی حاصل فرآیند فیزیکی مزبور را به طور کامل چنانکه باید وشاید توصیف کند. مقدارمادهٔ موجود در لحظهٔ t یعنی $y(t)$ به مقدار اولیهٔ ماده بستگی دارد. این مقدار درلحظهٔ $t=0$ برابر ۲ گرم است. ازاینرو باید مقدار c را طوری انتخاب کنیم که در لحظهٔ $t=0$ مقدار y برابر ۲ گرم شود. این شرط را **شرط اولیه** نامند زیرا به حالت اولیهٔ دستگاه فیزیکی مربوط می‌شود. با گذاشتن شرط

$$y(0)=2 \tag{11}$$

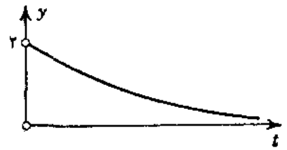
در (۱۰) به‌دست می‌آوریم

$$y(0)=ce^{0}=2 \quad \text{یا} \quad c=2$$

هر گاه این مقدار c را به‌کار ببریم آنگاه (۱۰) چنین می‌شود

$$y(t)=2e^{kt} \tag{12}$$

این‌جواب خصوصی(۹)، مقدار ماده موجود درهرلحظهٔ $t \geqslant 0$ را مشخص می‌کند. ثابت فیزیکی k منفی است و $y(t)$، همچنانکه درشکل ۴ نشان داده شده است، نزول می‌کند.



شکل ۴. رادیواکتیویته (تلاشی نمایی)

مرحلهٔ چهارم (بازبینی). از (۱۲) داریم

$$\frac{dy}{dt}=2ke^{kt}=ky \quad \text{و} \quad y(0)=2e^{0}=2.$$

تابع (۱۲) درمعادلهٔ (۹) و نیز شرط اولیهٔ (۱۱) صدق می‌کند.

دانشجو مرحلهٔ مهم آخر را که در آن درستی حل مسئله معلوم می‌گردد هرگز نباید فراموش کند.

حال نشان می‌دهیم که مسائل هندسی هم به‌معادلات دیفرانسیل منجر می‌شوند.

مثال ۴. یك کاربرد هندسی

منحنی‌ای را بیابید که از نقطهٔ (۱ ,۱) واقع در صفحهٔ xy گذشته و در هریك از نقاطش دارای‌شیب $-y/x$ باشد. واضح است که تابع نمایش منحنی‌مطلوب باید جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر باشد

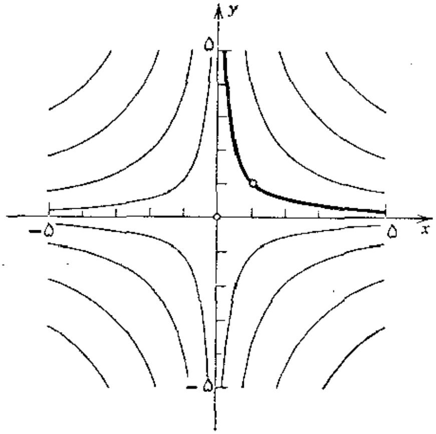
$$y' = -\frac{y}{x} \qquad (۱۳)$$

چگونگی حل چنین معادلاتی را بزودی یاد خواهیم گرفت. دراین مقطع دانشجو می‌تواند تحقیق کند که

$$y = \frac{c}{x}$$

به ازای هرمقدار ثابت c جوابی بـرای (۱۳) می‌باشد. بعضی از منحنیهای مربوطه در شکل (۵) نشان داده شده است. از آنجایی کـه منحنی مطلوب از (۱ ,۱) می گذرد باید به ازای $x=۱$ داشته باشیم $y=۱$ و بنابراین $c=۱$ می‌شود. ازاینرو جواب مسئلهٔ ما عبارت است از

$$y = \frac{۱}{x}$$



شکل ۵. جوابهای $y' = -y/x$

مسائل بخش ۱.۱

در هر یك از موارد زیر، مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل را بیان نمایید و تحقیق کنید که تابع مفروض جواب معادله است.

۱. $y'+3y=0$ ، $y=ce^{-3x}$

۲. $y''=e^{x}$ ، $y=e^{x}+ax+b$

۳. $y''+9y=0$ ، $y=A\cos 3x+B\sin 3x$

۴. $y'+y\tan x=0$ ، $y=c\cos x$

۵. $xy'+y=\sin x$ ، $y=(c-\cos x)/x$

۶. $y''+4y'+5y=0$ ، $y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

در هریك از موارد زیر تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادلهٔ متناظرش است و نمودار منحنیهای متناظر را برای برخی مقادیر ثابت c رسم کنید.

۷. $2y'+y=0$ ، $y=ce^{-0/5x}$

۸. $y'+2xy=0$ ، $y=ce^{-x^2}$

۹. $y'=-x/y$ ، $x^2+y^2=c$

۱۰. $y'^2=4y$ ، $y=0,\ y=(x+c)^2$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱۱. $y'=e^{-x}$ ۱۲. $y'''=1$ ۱۳. $3y''=\cos 2x$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی‌را بیابید که متضمن y و y' هردو بوده و تابع داده شده یك جواب آن باشد.

۱۴. $y=\cos x$ ۱۵. $y=xe^{-x}$ ۱۶. $y=5x^3$

درهریك ازموارد زیر $y=\int f(x)dx$ را بیابید و ثابت انتگرالگیری c راطوری تعیین کنید که y درشرط داده شده صدق کند.

۱۷. $f=x^2$ ، $y=-5$ وقتی که $x=2$

۱۸. $f=xe^{-x^2}$ ، $y=1$ وقتی که $x=0$

۱۹. $f=\cos^2 x$ ، $y=\pi/2$ وقتی که $x=\pi/2$

در هرمورد تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است و c را طوری تعیین کنید که جواب خصوصی حاصل در شرط داده شده، صدق کند. نمودار این

جواب را رسم کنید.

۳۰. $y'+y=1$ ، $y=1+ce^{-x}$ ، $y=3$ وقتی که $x=0$

۳۱. $xy'=3y$ ، $y=cx^3$ ، $y=1$ وقتی که $x=-2$

۳۲. $y'=-2xy$ ، $y=ce^{-x^2}$ ، $y=3$ وقتی که $x=0$

۳۳. (حرکت سقوطی) تجربه نشان می‌دهد که هرگاه جسمی در خلأ تحت تأثیر جاذبه سقوط کند شتابش ثابت است. این شتاب برابر است با

$$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

و آن را شتاب ثقل نامند. این قانون را بصورت یك معادلهٔ دیفرانسیل نسبت به $s(t)$، فاصلهٔ سقوط که تابعی از t است، بیان کنید. نشان دهید که با حل این معادله می‌توان قانون معروف

$$s(t)=\frac{g}{2}t^2$$

را به دست آورد. (عملا این قانون در مورد سقوط آزاد در هوا هم صادق است در صورتی که بتوان ازمقاومت هوا صرفنظر نمود، مثلا، اگر یك سنگ ویا گلولهٔ آهنی را ازفاصله‌ای که ازسطح زمین خیلی دور نباشد رها نماییم.)

۳۴. اگر درمسئلهٔ ۳۳ جسم در $t=0$ از وضعیت اولیه $s=s_0$ و با سرعت اولیه $v=v_0$ رها شود نشان دهید که درآن صورت جواب عبارت است از

$$s(t)=\frac{g}{2}t^2+v_0t+s_0$$

۳۵. کارخانهٔ سازندهٔ نوع معینی‌ازاتومبیل تبلیغ می کند که شتاب این‌اتومبیل به‌اندازه‌ای است که درمدت ۳۰ ثانیه آن را ازسرعت صفر به ۱۶۰ کیلومتر درساعت می‌رساند. درصورتی که شتاب ثابت باشد اتومبیل دراین مدت چه مسافتی را طی می کند؟

۳۶. هواپیمایی تـا هنگام بلند شدن دوکیلومتر روی زمین حـرکت می کند. هرگاه این هواپیما باسرعت $10\ \mathrm{m/s}$ شروع به‌حرکت نماید وبا شتابی ثابت درمدت ۵۰ ثانیه مسافت مزبور را طی کند با چه سرعتی از زمین بلند می‌شود؟

۳۷. موشکی به طور مستقیم به طرف بالا پرتاب می‌شود. در مراحل اولیهٔ پرواز شتابش برابر $7t\ \mathrm{m/s^2}$ است. پس از ۱۰ ثانیه موتور از آن جدا می‌شود. موشك تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (ازمقاومت هوا صرفنظر کنید.)

۳۸. شتاب‌دهنده‌های خطی درفیزیك برای‌شتاب‌دادن به‌ذرات باردار به‌کار می‌روند. فرض کنید یك ذرهٔ آلفا به شتاب دهنده‌ای وارد شود و تحت تأثیر شتاب ثابتی قرار گیرد

که سرعت آن را درمدت $10^{-3}\,s$ از $10^{3}\,m/s$ به $10^{4}\,m/s$ افزایش دهد. شتاب ذره، a، و مسافتی را که دراین مدت $10^{-3}\,s$ پیموده است پیدا کنید.

۲۹. (کاستی نمایی؛ فشار آتمسفریک) مشاهدات نشان می‌دهند که میزان تغییر فشار آتمسفریک p نسبت به ارتفاع h با فشارمتناسب است. با فرض‌آنکه فشاردرارتفاع ۶۰۰۰ متری به اندازهٔ نصف مقدار آن در سطح دریا، p_0، باشد، فرمولی برای اندازهٔ فشار در هر ارتفاع پیدا کنید. راهنمایی: ازحساب انتگرال به‌یاد بیاورید که اگر $y = e^{kx}$ درآن صورت $y' = ke^{kx} = ky$.

۳۰. (رشد نمایی؛ مدلی برای جمعیت) هر گاه در جمعیتهای نسبتاً کوچك (از انسانها، حیوانات، باکتریها و غیره) دگرگونیهای ناگهانی اتفاق نیفتد اغلب طبق قانون مالتوس* که می گوید: میزان زمانی رشد با جمعیت موجود متناسب است، رشد صورت می گیرد. این قانون را به صورت معادلهٔ دیفرانسیلی فرموله کنید. نشان دهید که جواب معادله عبارت است از $y(t) = y_0 e^{kt}$. در مورد ایالات متحده مقادیر مشاهده شده برحسب میلیون عبارت‌اند از

t	۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰
سال	۱۸۰۰	۱۸۳۰	۱۸۶۰	۱۸۹۰	۱۹۲۰
جمعیت	۵٫۳	۱۲٫۹	۳۱٫۴	۶۲٫۹	۱۰۶٫۵

با استفاده ازدو ستون اول، y_0 و k را تعیین کنید. سپس مقادیر مربوط به سالهای ۱۸۶۰، ۱۸۹۰ و ۱۹۲۰ را محاسبه و آنها را با مقادیر مشاهده شده مقایسه کنید. تفسیر کنید.

۲.۱ ملاحظات هندسی. منحنیهای همشیب

بحث را با رفتار سیستماتیك معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول آغاز می کنیم. هرمعادله‌ای از این نوع را می‌توان به صورت ضمنی زیر نوشت

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

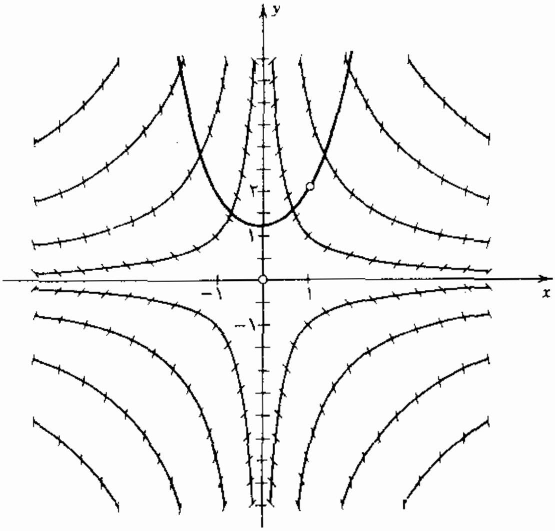
در بسیاری از موارد، ولی نه همیشه، قادر خواهیم بود که یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول

* Malthus's law

را به **صورت صریح**

$$y' = f(x, y) \tag{۲}$$

بنویسیم. قبل ازبحث دربارهٔ روشهای متعارف مختلف برای حل معادلاتی به صورت (۲) با مثالی نشان خواهیم داد که معادلهٔ (۲) یك تعبیر هندسی بسیار ساده دارد. این‌کار منجر به‌یك روش نموداری مفید برای به‌دست‌آوردن تصویری‌تقریبی ازجوابهای خصوصی (۲) می‌شود بدون آنکه عملا معادله را حل کنیم.



شکل ۶. میدان راستای معادلهٔ دیفرانسیل (۳)

فرض می‌کنیم که تابع f در ناحیه‌ای ازصفحهٔ xy تعریف شده باشد به طوری‌که به هرنقطه در آن ناحیه یك (و فقط یك) مقدار نسبت دهـد. جوابهای (۲) را می‌تـوان به صورت منحنیهائی در داخل صفحهٔ xy رسم نمود. ما جوابها را نمی‌دانیم اما با توجه به (۲) می‌بینیم کـه جوابی که از نقطهٔ (x_0, y_0) می‌گذرد در این نقطه باید شیبی برابر $f(x_0, y_0)$ داشته باشد. با توجه به این نکته می‌توان روش زیر را به‌کار بـرد. نخست نمودار بعضی منحنیهایی را کـه در طول آنها $f(x, y)$ ثابت است در صفحهٔ xy رسم

می‌کنیم. این‌منحنیها را منحنیهای با شیب‌ثابت، یا **همشیب** (۲) می‌نامند. بنابراین‌هرمنحنی همشیب (۲) از رابطهٔ

$$f(x, y) = k = \text{ثابت}$$

به دست می‌آید (که ثابت k در همشیب‌های مختلف متفاوت است). در امتداد منحنیهای همشیب $f(x, y) = k$ تعدادی پاره‌خط کوتاه موازی (**اجزای خطی**) با شیب k رسم می‌کنیم که شیب منحنیهای جواب (۲) در هر نقطه ازمنحنی همشیب هستند. این‌کار را برای همهٔ منحنیهای همشیبی کـه قبلا نمودار آنها را رسم‌کرده‌ایم انجام می‌دهیم. بدین طریق میدانی از اجزای خطی به دست می‌آوریم کـه آن را **میدان راستا** (۲) می‌نامند. با کمك اجزای خطی، حال بسادگی می‌توانیم نمودار منحنیهای تقریبی بـرای منحنیهای جـواب (مجهول) معادلهٔ داده شدهٔ (۲) را رسم کنیم بنابراین تصویر نسبتاً درستی از این منحنیهای جواب را به‌دست می‌آوریم.

با یك مثال ساده این روش را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. همشیبها، میدان راستا

نمودار میدان جهت‌دار معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$y' = xy \qquad (۳)$$

و تقریبی برای منحنی جواب راکه ازنقطهٔ (۲ , ۱) می‌گذرد رسم کنید. منحنیهای همشیب عبارت از هذلولیهای متساوی‌الساقین $xy = k$ درمختصات دوبعدی هستند. نمودار بعضی ازآنها را رسم می‌کنیم. سپس با لغزاندن یك مثلث در طول خط کشی‌ثابت، اجزای خطی را رسم می‌کنیم. حاصل این‌کار در شکل (۶) نشان داده شده است که تقریبی برای منحنی جواب را نیز که ازنقطهٔ (۲ , ۱) می‌گذرد نشان می‌دهد.

در بخش بعد خواهیم دیدکه (۳) بآسانی قابل حل است، از اینرو مثال فوق صرفاً جزئیات تکنیکی‌روش میدان راستا را نشان می‌دهد. این روش مخصوصاً درمسائل مهندسی شامل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، کـه جواب آن را نمی‌توان برحسب توابع معلوم بیان داشت و یا عبارت پیچیده‌ای دارد، مفید است.

مسائل بخش ۱.۲

برای هرحالت یك میدان راستای مناسب رسم کنید. چند منحنی جواب تقریبی را بکشید. سپس معادله را به‌طریق تحلیلی حل نمایید و با روش ترسیمی مقایسه کنید تا به‌مقدار دقت این روش پی ببرید.

۱. $y' = x$ ۲. $y' = x^2$ ۳. $y' = y$

میدانهای راستای مناسبی برای‌معادلات دیفرانسیل زیر رسم کنید وچند منحنی جواب تقریبی

را بکشید.

۴. $y' = -xy$ ۵. $y' = -x/y$ ۶. $y' = x^۲ + y^۲$

۷. $y' = x + y$ ۸. $۴yy' + x = ۰$ ۹. $y' = \sin y$

با استفاده ازمیدانهای راستابرای هریك ازمعادلات دیفرانسیل زیر یك منحنیجواب تقریبی چنان پیدا کنیدکه درشرط داده شده صدق کند.

۱۰. $y' = ۲x$ ، $y(۲) = ۴$ ۱۱. $yy' + ۹y = ۰$ ، $y(۱) = ۳$

۱۲. $y' + ۲y^۲ = ۰$ ، $y(۴) = ۱$ ۱۳. $y' + ۴x^۳y = ۰$ ، $y(۰) = ۵$

۱۴. **(انتگرالگیری تقریبی)** با استفاده ازمیدانهای راستا مقادیرتقریبی انتگرالهای زیر را پیدا کنید (دو انتگرال آخری جزو انتگرالهای مقدماتی نیستند).

$$\int_۰^۱ x^۲ dx, \qquad \int_۰^\pi \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int_۰^۱ e^{-x^۲} dx.$$

۱۵. **(پرش‌کننده با چتر بسته)** میدان راستای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dv}{dt} = ۱۰ - ۰/۴v^۲$$

را رسم کنید و با استفاده ازآن، این نتایج را به‌دست آورید: همشیبها خطوط مستقیم افقی هستند. همشیب $v = ۵$ در عین‌حال یك منحنی جواب است. وقتی‌که $t \to \infty$ تمام منحنیهای جواب واقع در نیمصفحهٔ بالایی $(v > ۰)$ ظاهراً به خط $v = ۵$ میل می‌کنند؛ اگر $۰ < v(۰) < ۵$ این‌منحنیها صعودی‌یکنوا هستند و اگر $v(۰) > ۵$ نزولی یکنوا خواهند بود. تحقیق کنیدکه

$$v(t) = ۵\frac{۱ + ce^{-۴t}}{۱ - ce^{-۴t}}$$

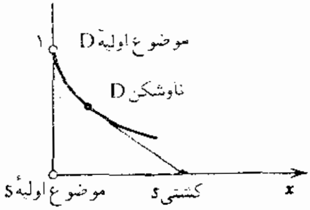
که درآن c دلخواه است ، در معادله صدق می‌کند. (در بخش بعد خواهیم دید که حرکت یك‌چترباز، بافرض‌آنکه مقاومت هوامتناسب بامجذورسرعت $v(t)$ باشد ازاین معادله تبعیت می‌کند. ازاینرو نتیجه نشان می‌دهدکه سرعت حد حرکت $v = ۵$ است که، عملاً، پس‌از زمانی نسبتاً طولانی به‌دست می‌آید.)

۱۶. **(مسئلهٔ تعقیب،کشاننده)** دریك مسئلهٔ مربوط به‌تعقیب، جسم یا هدفی درطول‌منحنی مفروضی‌حرکت می کند وجسم دوم ویا تعقیب‌کننده‌ای آن‌رادنبال یا تعقیب می‌نماید یعنی، همیشه درجهت هدف حرکت می کند. فرض کنیدکه هدف کشتی S باشد که در طول خط مستقیمی‌حرکت می کند وتعقیب کننده ناوشکن D است و به‌قسمی حرکت

می‌کندکه فاصلهٔ آن، a ، از S مقداری است ثابت مثلاً، $a=۱$ (مایل دریایی)*.
نشان دهیدکه (شکل ۷)

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

یك میدان راستا رسم کنید ($a=۱$ بگیرید) و یك منحنی جواب تقریبی متناظر با $y(0)=a=1$ را رسم نمایید؛ شکل ۷ را ببینید. (چنین منحنیهایی راکشاننده می‌نامند.)



شکل ۷. کشاننده و نمادگذاری مسئلهٔ ۱۶

۱۷. (حلزونی) نشان دهید که منحنیهای همشیب

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

خطوط مستقیمی هستندکه ازمبدأ می‌گذرند وازمیدان راستا چنین برداشت می‌شودکه منحنیهای جواب حلزونی هستند.

۱۸. میدان‌راستای $y' = y - x$ را رسم کنید. توجه کنیدکه میدان راستا نشان‌دهندهٔ نتایج زیراست. همشیب $y - x = 1$ درعین حال یك منحنی جواب است و به نظرمی‌رسد وقتی که $t \to -\infty$ سایرمنحنیهای جواب به‌آن میل می‌کنند. این‌مطلب‌را با تحقیق اینکه $y = x + 1 + ce^x$ یك جواب معادله است مسجل نمایید.

۱۹. نمودار میدان راستای

$$y' = ay - by^2$$

را به‌ازای $a=۳$ و $b=۱$ رسم کنید وبا توجه به آن نتایج زیررا به‌دست‌آورید. همشیبهای $y=0$ و $y=3$ نیزمنحنیهای جواب هستند. تمام منحنیهای جواب واقع درنوار افقی مابین $y=0$ و $y=3$ به شکل s و صعودی یکنوا هستند. همچنین

* هرمایل برابر ۱۸۵۳٫۲۵ متر است.

برای هرمنحنی از این‌گونه وقتی‌که $x\to\infty$ آنگاه $y(x)\to 3$ وهنگامی‌که $x\to-\infty$ آنگاه $y(x)\to 0$. دربارهٔ منحنیهای جواب واقع‌دربالای خط $y=3$ و در نیمصفحهٔ پایینی، $y<0$، چه می‌توان گفت؟

۲۰. (یك مدل جمعیت) طبق قانون مالتوس میزان زمانی رشد جمعیت $p(t)$ متناسب با جمعیت موجود $p(t)$ است. این قانون دربارهٔ جمعیتهایی‌که خیلی زیاد نباشند صادق است. مدل دقیقتر قانون لوژیستکی است که عبارت است از

$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2$$

درسال ۱۸۴۵ ورهالست* پیش بینی‌کردکه برای ایالات متحده $a=0{,}03$ و $b=1{,}6\times10^{-4}$ است‌که $P(t)$ برحسب میلیون اندازه‌گیری می‌شود. نمودار یك میدان راستا برای $1950\leqslant t\leqslant 1850$ و $200\geqslant p>0$ را رسم کنید. منحنی جوابی راکه از نقطهٔ $(1900,76)$ می‌گذرد بکشید ودقت آن را با مقادیر واقعی زیر مقایسه کنید

۱۸۵۰	۱۸۷۰	۱۸۹۰	۱۹۱۰	۱۹۳۰
۲۳	۳۹	۶۳	۹۲	۱۲۳

نشان دهید وقتی که $t\to\infty$ از میدان راستا نتیجه می گیریم‌که $p(t)\to a/b$

۳.۱ معادلات تفکیك پذیر

بسیاری ازمعادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را می‌توان با عملیات جبری به‌صورت

$$g(y)y'=f(x) \tag{1}$$

درآورد. چون $y'=dy/dx$ بهتر است‌که بنویسیم

$$g(y)dy=f(x)dx \tag{2}$$

اما توجه داریم کــه این صرفاً طریق نوشتن دیگری برای (۱) است. چنین معادلاتی را معادلات با متغیرهای تفکیك‌پذیر یا **معادلهٔ تفکیك‌پذیر** می‌نامند زیــرا در (۲) متغیرهای x و y طوری تفکیك شده‌اند که در سمت راست فقط x و در سمت چپ فقط y وجود دارد. با انتگرالگیری از دو طرف (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+c \tag{3}$$

هر گاه فرض‌کنیم f و g توابع پیوسته‌ای هستند درآن‌صورت انتگرالهای(۳) موجودند وبا محاسبهٔ این انتگرالها جواب عمومی (۱) را به‌دست می‌آوریم.

---

* Verhulst

مثال ۱
معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$9yy' + 4x = 0$$

با تفکیك متغیرها داریم

$$9y\,dy = -4x\,dx$$

با انتگرالگیری از دو طرف این رابطه، جواب عمومی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \tilde{c} \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \qquad \left(c = \frac{\tilde{c}}{18}\right)$$

این جواب یك خانواده از بیضیها را نمایش می‌دهد.

مثال ۲
معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' = -2xy$$

با تفکیك متغیرها داریم

$$(y \neq 0) \qquad \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

با انتگرالگیری نتیجه می‌شود

$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{c} \qquad (4)$$

در واقع، درستی نتیجهٔ سمت چپ را می‌توان با مشتقگیری به صورت زیر تحقیق نمود. هرگاه $y > 0$، آنگاه $(\ln y)' = y'/y$. هنگامی‌که $y < 0$ در آن صورت $-y > 0$ و $(\ln(-y))' = -y'/(-y) = y'/y$. حال $y = |y|$ وقتی $y > 0$ و $-y = |y|$ وقتی $y < 0$. از اینرو می‌توانیم با ترکیب هر دو دستور به $(\ln|y|)' = y'/y$ برسیم.

این نکته بسیار مهم است که بلافاصله پس از انتگرالگیری ثابت انتگرال را داخل کنیم. از (۴) به‌دست می‌آوریم

$$|y| = e^{-x^2 + \tilde{c}}$$

یا با توجه به‌اینکه $e^{a+b} = e^a e^b$، وقتی‌که $y > 0$ قرار می‌دهیم $e^{\tilde{c}} = c$ و زمانی که $y < 0$ می‌نویسیم $e^{\tilde{c}} = -c$ درنتیجه

$$y = ce^{-x^2}$$

این جواب یك خانوادهٔ باصطلاح **منحنیهای زنگی‌شکل** را نمایش می‌دهد (شکل ۸).

$c=0$، که از آن جواب $y\equiv 0$ به‌دست می‌آید، را نیز می‌توان پذیرفت.

مثال ۳

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید.

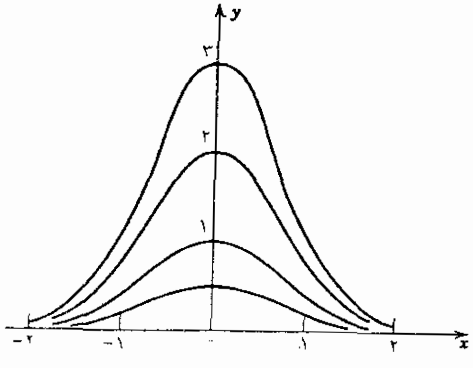
$$y'=1+y^2.$$

با تفکیک متغیرها و انتگرالگیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{1+y^2}=dx,\quad \arctan y=x+c,\quad y=\tan(x+c).$$

در بسیاری ازکاربردهای مهندسی ما علاقه‌ای به‌جواب‌عمومی یك معادلهٔ دیفرانسیل مفروض‌نداریم‌بلکه فقط جواب خصوصی‌ای رامی‌خواهیم که در**شرط اولیه** مفروضی‌صدق کند، مثلاً، این شرط که در نقطهٔ x_0 جواب $y(x)$ دارای مقدار مشخص y_0 باشد، یا باختصار

$$y(x_0)=y_0 \qquad (5)$$



شکل ۸. جوابهای $y'=-2xy$ (منحنیهای زنگی شکل) در نیمصفحهٔ بالایی ($y>0$).

یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول توأم با یك شرط اولیه را **مسئلهٔ با مقدار اولیه** می‌نامند. برای حل چنین مسئله‌ای باید جواب خصوصی معادله را طوری بیابیم که شرط اولیه در آن صدق کند.

اصطلاح «مسئلهٔ با مقدار اولیه» را به‌این دلیل به‌کار می‌بریم که متغیر مستقل معمولا زمان است، بنابراین (۵) وضعیت اولیه را دریك لحظه تعیین می‌کند و جواب مسئله نشان

می‌دهد که از آن‌پس چه روی خواهد داد.

مثال ۴

مسئلهٔ با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$(x^{۲}+۱)y'+y^{۲}+۱=۰, \qquad y(۰)=۱.$$

مرحلهٔ اول. با تفکیک متغیرها پیدا می کنیم

$$\frac{dy}{۱+y^{۲}}=-\frac{dx}{۱+x^{۲}}$$

با انتگرالگیری به‌دست می‌آوریم

$$\arctan y=-\arctan x+c$$

یا

$$\arctan y+\arctan x=c$$

با گرفتن تانژانت از هردو طرف داریم

$$\tan(\arctan y+\arctan x)=\tan c \qquad (۶)$$

حال دستور تانژانت مجموع عبارت است از

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{۱-\tan a\tan b}$$

وبه‌ازای $a=\arctan y$ و $b=\arctan x$ این دستور چنین می‌شود

$$\tan(\arctan y+\arctan x)=\frac{y+x}{۱-xy}$$

درنتیجه، (۶) را می‌توان اینطور نوشت

$$\frac{y+x}{۱-xy}=\tan c \qquad (۷)$$

مرحلهٔ دوم. از روی شرط اولیه c را معین می کنیم. باقرار دادن $x=۰$ و $y=۱$ در (۷)، داریم $\tan c=۱$ ، بنابراین

$$\frac{y+x}{۱-xy}=۱ \quad \text{یا} \quad y=\frac{۱-x}{۱+x}$$

مرحلهٔ سوم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۵. (قانون تبرید نیوتن)[1]

یك گوی مسی را تا دمای $100^\circ C$ گرم کرده‌ایم ، سپس در لحظهٔ $t=0$ آن را در آبی گذاشته‌ایم که دمای آن $30^\circ C$ نگاهداشته شده‌است. پس از ۳ دقیقه‌دمای گوی به $70^\circ C$ تقلیل یافته است. زمانی را که دمای گوی به $31^\circ C$ می‌رسد بیابید.

اطلاعات فیزیکی. تجربه نشان می‌دهد که میزان تغییر دمای گوی ، T ، در واحد زمان با تفاضل دمای جسم ومحیط اطراف آن متناسب است (قانون تبرید نیوتن).

تجربه همچنین نشان می‌دهد که جریان گرمایی در مس آنقدر سریع است که درهر لحظه دمای همهٔ نقاط گوی عملا یکسان است.

مرحلهٔ اول. دستور ریاضی قانون تبرید نیوتن دراین مورد عبارت است از

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-30) \tag{8}$$

که درآن ثابت تناسب را با $-k$ نشان داده‌ایم به‌طوری که $k>0$.

مرحلهٔ دوم. با تفکیك متغیرها جواب عمومی (۸) چنین به‌دست می‌آید

$$T(t)=ce^{-kt}+30$$

مرحلهٔ سوم. شرط اولیه داده شده اینست که $T(0)=100$. جواب خصوصی که این شرط درآن صادق باشد عبارت است از

$$T(t)=70e^{-kt}+30$$

مرحلهٔ چهارم. k را می‌توان از اطلاع داده شدهٔ $T(3)=70$ معلوم نمود. به‌دست می‌آوریم.

$$k=\frac{1}{3}\ln\frac{7}{4}=0.1865 \quad \text{یا} \quad T(3)=70e^{-3k}+30=70$$

با استفاده از این مقدار k می‌بینیم که دمای گوی، $T(t)$ ، برابر است با

$$T(t)=70^{-0.1865t}+30$$

وبرای رسیدن به‌دمای $31^\circ C$ باید

$$t=\frac{\ln 70}{0.1865}=22.78 \quad \text{یا} \quad 0.1865t=\ln 70 \ ، \ 70e^{-0.1865t}=1$$

---

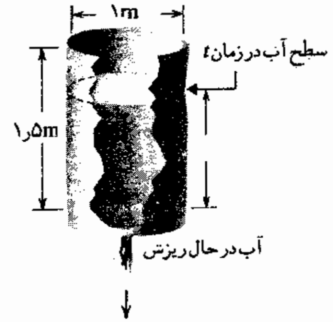
۱. **آیزك نیوتن** (Isaac Newton) ، ۱۶۴۲ــ۱۷۲۷ ، فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی. نیوتن و ریاضیدان و فیلسوف آلمانی **گوتفرید ویلهلم لایبنیتز** (Gottfried Wilhelm Leibniz)، ۱۶۴۶ــ۱۷۱۶، حساب دیفرانسیل و انتگرال را (به‌طورمستقل) ابداع کردند. نیوتن بسیاری ازقوانین فیزیکی پایه را کشف کرد و روش بررسی مسائل فیزیکی را به وسیلهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه داد . کارهای او هم در ریاضی و هم در فیزیك از بیشترین اهمیت برخوردار است.

باشد، یعنی تقریباً پس‌از ۲۳ دقیقه.

مرحلهٔ پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۶. جریان آب از سوراخهای ظرف (قانون توریچلی[1])

مخزنی به شکل استوانه به ارتفاع ۱٫۵ متر که پراز آب است روی قاعدهٔ خود به قطر ۱ مترقرار دارد. درانتهای مخزن سوراخی به‌قطر ۱ سانتیمتروجود داردکه در لحظهٔ معینی باز می‌شود به‌طوری‌که آب تحت تأثیر جاذبه شروع به‌ریختن می‌کند (شکل ۹). ارتفاع آب مخزن، $h(t)$، را درزمان t بیابید. زمانهای لازم را برای‌آنکه ۱/۲، ۳/۴ ویاتمام مخزن خالی شود پیدا کنید.



شکل ۹. مخزن مثال ۶

مرحلهٔ اول. مدل ریاضی (معادلهٔ دیفرانسیل) مسئله‌را طرح می‌کنیم. حجم آبی که درفاصلهٔ زمانی کوچك Δt از ظرف بیرون می‌ریزد عبارت است از

$$\Delta V = Av\Delta t$$

که درآن $A = ۰٫۲۵\pi \text{cm}^۲$ سطح مقطع سوراخ و v سرعت آب درحال ریزش‌است. طبق قانون توریچلی سرعت آب درحال ریزش از یك سوراخ عبارت است از

$$v = ۰٫۶\sqrt{۲gh}$$

که $g = ۹۸۰ \text{cm/s}^۲$ شتاب ثقل در سطح زمین و h ارتفاع لحظه‌ای آب از سطح سوراخ است. این دستور منطقی به‌نظر می‌رسد. درواقع، $\sqrt{۲gh}$ عبارت ازسرعت‌جسمی

---

۱. **ایوانگلیستا توریچلی** (Evangelista Torricelli)، ۱۶۰۸–۱۶۴۷، فیزیکدان ایتالیایی. (ضریب انقباض) ۰٫۶ در ۱۷۶۶ توسط **ژ. ش. بوردا** J. C. Borda به کار برده شد و علت این امر آن بودکه سطح مقطع جریان مایع در حال ریزش تا حدی کوچکتر اندازهٔ سوراخ است.

است که از ارتفاع h سقوط می‌کند اگر مقاومت هوا آنقدر کوچك باشد که بتوان از آن صرفنظر نمود. ضریب ۶ر۰ از این نظر به‌کار می‌رود که سطح مقطع جریان آب در حال ریزش تا حدی کوچکتر از سطح مقطع دهانهٔ سوراخ است. ΔV باید با تغییرات حجم آب درمخزن، ΔV^*، برابر باشد، یعنی،

$$\Delta V^* = -B\Delta h$$

که درآن $B(h)$ سطح مقطع مخزن درارتفاع $h(t)$ و Δh عبارت ازکاهش ارتفاع آب، $h(t)$، است. علامت منفی به‌دلیل کم شدن حجم آب درمخزن است. چون $\Delta V = \Delta V^*$، داریم

$$Av\Delta t = ۰{/}۶ A\sqrt{۲gh} = -B\Delta h$$

با تقسیم این رابطه بر Δt نتیجه می‌شود

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{۰{/}۶ A\sqrt{۲gh}}{B}.$$

با فرض $\Delta t \to ۰$ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dh}{dt} = -۰{/}۶ A\sqrt{۲g}\frac{\sqrt{h}}{B(h)}$$

دراین مورد $A = ۰{/}۲۵\pi\ \mathrm{cm}^۲$ وسطح مقطع مخزن ثابت است وبا ارتفاع تغییر نمی‌کند، یعنی $B = ۲۵۰۰\pi\ \mathrm{cm}^۲$. چون $A/B = ۱\times ۱۰^{-۴}$ و

$$\sqrt{۲g} = \sqrt{۲\times ۹۸۰} = ۴۴{/}۳[\mathrm{cm}/\mathrm{s}^۲]^{۱/۲}$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dh}{dt} = -۰{/}۶\frac{A}{B}\sqrt{۲gh} = -۰{/}۰۰۲۶۶h^{۱/۲}$$

شرط اولیه اینست که

$$h(۰) = ۱۵۰\ \mathrm{cm}$$

که درآن $t = ۰$ لحظه‌ای است که دهانهٔ سوراخ باز می‌شود.

مرحلهٔ دوم. معادلهٔ دیفرانسیل را حل می‌کنیم. با تفکیك متغیرها نتیجه می‌شود که

$$h^{-۱/۲}dh = -۰{/}۰۰۲۶۶dt$$

با انتگرالگیری داریم

$$۲h^{۱/۲} = -۰{/}۰۰۲۶۶t + \tilde{c}$$

و با تقسیم طرفین این رابطه بر ۲ وقرار دادن $c = \tilde{c}/۲$ ومجذور نمودن دو طرف نتیجه

می‌شود که

$$h(t)=(c-۰٫۰۰۱۳۳\,t)^{۲}$$

بنابه شرط اولیه $h(۰)=c^{۲}=۱۵۰$ است از اینرو جواب خصوصی این مسئله عبارت است از

$$h(t)=(۱۲٫۲۵-۰٫۰۰۱۳۳\,t)^{۲}$$

مرحلهٔ سوم. برای اینکه به‌بقیهٔ سؤالات جواب دهیم t را برحسب h می‌نویسیم

$$۱۲٫۲۵-۰٫۰۰۱۳۳\,t=\sqrt{h} \qquad \text{بنابراین} \qquad t=\frac{۱۲٫۲۵-\sqrt{h}}{۰٫۰۰۱۳۳}$$

این رابطه نشان می‌دهد که زمان نصف شدن مخزن عبارت است از

$$t=\frac{۱۲٫۲۵-\sqrt{۷۵}}{۰٫۰۰۱۳۳}=۲٫۷\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{s}=۴۵\,\mathrm{min}$$

وزمان لازم برای رسیدن به ۱/۴ حجم ۷۶٫۸ دقیقه و برای تخلیهٔ‌کامل ۱۵۴ دقیقه است.

مرحلهٔ چهارم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۷. سرعت‌گریز از زمین

کمترین سرعت اولیهٔ جسمی را بیابید‌که درراستای شعاعی زمین پرتاب شده و از زمین فرار نماید. از مقاومت هوا وجاذبهٔ ثقلی سایر اجرام آسمانی صرفنظر کنید.

مرحلهٔ اول. بر طبق قانون جاذبهٔ نیوتن ، نیروی ثقلی و بنابراین شتاب a یك پرتابه متناسب با $۱/r^{۲}$ که در آن r فاصلهٔ بین جسم ومرکز زمین است. بنابراین

$$a(r)=\frac{dv}{dt}=\frac{k}{r^{۲}}$$

که در آن v سرعت و t زمان است. از آنجایی که سرعت نزولی است $a<۰$ و $k<۰$. فرض می‌کنیم شعاع زمین برابر R باشد. وقتی $r=R$ آنگاه $a=-g$ می‌شود که شتاب ثقل درسطح زمین است. توجه داشته باشید‌که علامت منفی به‌خاطر این ظاهر می‌شود که g مثبت است وجاذبه درجهت خلاف‌حرکت (به‌طرف مرکز زمین) عمل می‌کند. بنابراین

$$-g=a(R)=\frac{k}{R^{۲}} \qquad \text{و} \qquad a(r)=-\frac{gR^{۲}}{r^{۲}}.$$

حال $v=dr/dt$ ، ومشتقگیری منجر به

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}\,v$$

می‌شود. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل سرعت عبارت است از

$$\frac{dv}{dr}v = -\frac{gR^2}{r^2}$$

مرحلهٔ دوم. با تفکیک متغیرها وانتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$v\,dv = -gR^2\frac{dr}{r^2} \quad \text{و} \quad \frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + c \tag{10}$$

مرحلهٔ سوم. درسطح زمین $r = R$ و $v = v_0$ است. به ازای این مقادیر r و v دستور (۱۰) چنین می‌شود

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{gR^2}{R} + c \quad \text{و} \quad c = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

با قراردادن این مقدار c در (۱۰) داریم

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR \tag{11}$$

مرحلهٔ چهارم. اگر $v^2 = 0$ ، آنگاه $v = 0$ ، جسم می‌ایستد وازوضعیت فیزیکی پیداست که سرعت از مثبت به منفی تغییر می‌کند و جسم به زمین باز می‌گردد. درنتیجه، باید v_0 را آنقدر بزرگ اختیار کنیم که چنین اتفاقی نیفتد. اگر v_0 را برابر

$$v_0 = \sqrt{2gR} \tag{12}$$

بگیریم دراینصورت عبارت $v_0^2 - 2gR$ در (۱۱) صفر است و v^2 به‌ازای هیچ‌مقداری از r صفر نمی‌شود. معهذا، هرگاه مقدارکوچکتری برای سرعت اولیهٔ v_0 انتخاب کنیم آنگاه بـه ازای مقدار مشخصی از r داریم $v = 0$. عبارت (۱۲) سرعت فرار از زمین نامیده می‌شود. نظر به‌اینکه $R = 6372\ \text{km}$ و $g = 9.8\ \text{m/s}^2$ داریم

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2\ \text{km/s}$$

مرحلهٔ پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۸. پرش‌کننده با چتر بسته

فرض کنید یك پرش‌کننده با چتر بسته از حالت سکون به‌طرف زمین سقوط کند و چتر او دریك‌لحظه، که $t = 0$ می‌نامیم، بازشود ودراین‌حال‌سرعت اوبرابر $v(0) = v_0 = 10\text{m/s}$ باشد. سرعت $v(t)$ پرش‌کننده را در هـر لحظهٔ بعدی t حساب کنید، آیا $v(t)$ به‌طور نامحدودی افزایش می‌یابد؟

فرضیات وقوانین فیزیکی. فرض کنید وزن شخص و وسائل او، $W = 712\text{N}$ و مقاومت هوا، U، با v^2 متناسب باشد. مثلا $U = bv^2\ \text{N}$ که درآن ثابت‌تناسب b عمدتاً

به‌چتر بستگی دارد وما فرض می‌کنیم که $b = ۳۰ \, N \times (s)^۲/m^۲ = ۳۰ \, kg/m$.

مرحلهٔ اول. مدل ریاضی (معادلهٔ دیفرانسیل) مسئله را بنا می‌نهیم. **قانون دوم نیوتن** عبارت است از

نیرو = شتاب × جرم

که درآن «نیرو» به‌معنی برآیند نیروهای وارد برپرش‌کننده درهر لحظه است. این نیروها عبارت‌اند از وزن، W ومقاومت هوا، U. وزن برابر است با $W = mg$ که درآن‌شتاب ثقل در سطح زمین، $g = ۹٫۸ \, m/s^۲$ است. بنابراین جرم شخص و وسائل او $m = W/g = ۷۲٫۷ \, kg$ است. مقاومت هوا، U، به طرف بالا عمل می‌کند (برخلاف جهت حرکت)، بنابراین برآیند عبارت است از

$$W - U = mg - bv^۲.$$

شتاب، a، مشتق سرعت نسبت به‌زمان است. یعنی $a = dv/dt$. از اینرو بنابه‌قانون‌دوم نیوتن داریم

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^۲$$

این معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ مورد بحث ماست. بنا به فرض در لحظهٔ $t = ۰$ سرعت $v = v_۰ = ۱۰ \, m/s$ است. از اینرو جواب $v(t)$ را باید طوری پیدا کنیم که در شرط اولیهٔ زیر صدق کند

$$v(۰) = v_۰ = ۱۰$$

مرحلهٔ دوم. معادلهٔ دیفرانسیل را حل می‌کنیم. با تقسیم بر m نتیجه می‌گیریم که

$$k^۲ = \frac{mg}{b} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-b}{m}(v^۲ - k^۲)$$

با تفکیک متغیرها داریم

$$\frac{dv}{v^۲ - k^۲} = -\frac{b}{m}dt \tag{۱۳}$$

درسمت چپ داریم

$$\frac{۱}{v^۲ - k^۲} = \frac{۱}{۲k}\left(\frac{۱}{v - k} - \frac{۱}{v + k}\right)$$

که درستی آن بسادگی قابل تحقیق است. این‌کارعبارت است از نمایش یک‌کسر برحسب کسرهای جزئی که برای انتگرالگیری مناسب است:

$$\int \frac{dv}{v^۲ - k^۲} = \frac{۱}{۲k}[\ln(v - k) - \ln(v + k)] = \frac{۱}{۲k}\ln\frac{v - k}{v + k}.$$

بنابراین با توجه به (۱۳) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2k}\ln\frac{v-k}{v+k}=-\frac{b}{m}t+\tilde{c}$$

با ضرب طرفین در $2k$ و به‌صورت نمایی درآوردن آن نتیجه می گیریم

$$\frac{v-k}{v+k}=ce^{-pt} \qquad p=\frac{2kb}{m}. \qquad (14^*)$$

که درآن $c=e^{2-kc}$. با حل معادله نسبت به v داریم

$$v(t)=k\,\frac{1+ce^{-pt}}{1-ce^{-pt}} \qquad (14)$$

می بینیم که $v(t)\to k$ هر گاه $t\to\infty$؛ یعنی، $v(t)$ بطور نامحدود افزایش نمی‌یابد بلکه به‌سمت حدی مانند k میل می کند. توجه به‌این مطلب جالب است که این‌حد مستقل از شرط اولیهٔ $v(0)=v_0$ است.

مرحلهٔ سوم. c را در (۱۴) طوری معین می کنیم کـه یك جواب خصوصی به دست آوریم تا در شرط اولیهٔ $v(0)=v_0$ صدق کند. از (۱۴*) با قرار دادن $t=0$ داریم

$$c=\frac{v_0-k}{v_0+k}$$

با این c دستور (۱۴) جواب مطلوب را نمایش می‌دهد.

مرحلهٔ چهارم. توجه کنید که تابحال‌مقادیرعددی داده شده را به‌کار نبرده‌ایم. بیشتر اوقات مناسب است که ابتدا دستور کلی را به دست آوریم و بعداً داده‌های عددی را در آن قرار دهیم. با این روش بهتر می‌توان به چگونگی امر پی بـرد ، علاوه براین ، اگر جوابهای مختلف متناظر با داده‌های متفاوتی موردنظر باشند کار ساده می‌شود.

حال با توجه به‌داده‌های مذکور دربالا به‌محاسبهٔ مقادیرعددی می‌پردازیم

$$k^2=\frac{mg}{b}=\frac{W}{b}=\frac{712}{30}=23/7[\mathrm{m^2/s^2}]$$

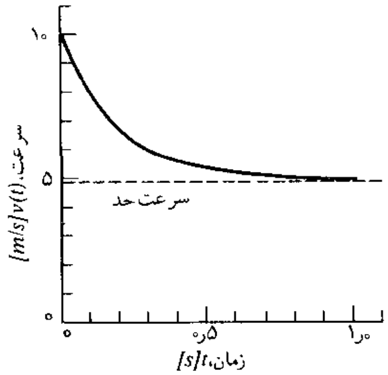
از اینرو $k=4/87\mathrm{m/s}$. این سرعت حد است. عملا می‌توان گفت که پرش کننده پس از زمانی نسبتاً طولانی به‌این‌سرعت می‌رسد.

مقدار c متناظر با $v(0)=v_0=10\ \mathrm{m/s}$ برابر است با

$$c=\frac{v_0-k}{v_0+k}=0/345$$

و سرانجام

$$p=\frac{۲kb}{m}=\frac{۲\times ۴/۸۷\times ۳۰}{۷۲/۷}=۴/۰۲\ s^{-۱}$$



شکل ۱۰. سرعت، $v(t)$ پرش‌کنندهٔ مثال ۸

نتیجهٔ کلی عبارت است از (شکل ۱۰)

$$v(t)=۴/۸۷\frac{۱+۰/۳۴۵e^{-۴/۰۲t}}{۱-۰/۳۴۵e^{-۴/۰۲t}} \qquad (۱۵)$$

مرحلهٔ پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مسائل بخش ۱.۳

۱. با استفاده از (۳) نشان دهید که جواب (۱) که در (۵) صدق کند از

$$\int_{y_0}^{y} g(y^*)\,dy^*=\int_{x_0}^{x} f(x^*)\,dx^* \qquad (۱۶)$$

به‌دست می‌آید. از این دستور برای تأیید نتیجهٔ مثال ۴ استفاده کنید.

۲. گاهی دانشجو می‌پرسد که آیا نتیجه گیری (۳) از (۲) صحیح است زیرا به نظر می‌رسد که انتگرالگیری در دو طرف نسبت به دو متغیر متفاوت انجام می گیرد. شما چه جواب می‌دهید؟

۳. چرا اضافه نمودن ثابت انتگرالگیری بلافاصله بعد از انجام انتگرالگیری مهم است؟

جواب عمومی هریک‌ازمعادلات زیررا پیدا کنید (a ، b ، n مقادیر ثابت‌اند).

۴. $y' = -xy$ ۵. $yy' + x = 0$

۶. $y' = -\frac{x-a}{y-b}$ ۷. $y' = \frac{y}{x \ln x}$

۸. $y' = ny/x$ ۹. $y' + ay + b = 0 \quad (a \neq 0)$

۱۰. $yy' = 2x \exp(y^2)$ ۱۱. $xy' = 2\sqrt{y-1}$

۱۲. $y' \sin 2x = y \cos 2x$ ۱۳. $y' + 2y \tanh x = 0$

مسائل بامقدار اولیهٔ زیر را حل کنید (L، R، α ثابت‌اند و نقطهٔ بالای حروف معرف مشتقگیری نسبت به‌زمان است.)

۱۴. $y' = 3y/x, \quad y(1) = 2$ ۱۵. $L\dot{I} + RI = 0, \quad I(0) = I_0$

۱۶. $(x+1)y' = 2y, \quad y(0) = 1$ ۱۷. $y' = \sec y, \quad y(0) = 0$

۱۸. $v\, dv/dx = g =$ ثابت و $v(x_0) = v_0$

۱۹. $y' = -2xy, \quad y(0) = y_0$

۲۰. $2yy' = \sin^2 \alpha x, \quad y(0) = 0$

۲۱. $(x \ln x)\, dy = y\, dx, \quad y(3) = 4$

۲۲. $y' = -6y \tan 2x, \quad y(0) = -2$

۲۳. $dr \sin\theta = 2r \cos\theta\, d\theta, \quad r(\pi/2) = 2$

کاربردهای فیزیکی

۲۴. گلوله‌ای بطور قائم با سرعت اولیهٔ v_0 به طرف بالا پرتاب می‌شود. نشان دهید که زمان لازم برای رسیدن گلوله به زمین دو برابر زمانی است که گلوله به بالاترین نقطه می‌رسد. (مقاومت هوا ناچیز فرض می‌شود.)

۲۵. **(سرعت فرار)** درسطح زمین سرعت فرار ۱۱٫۲ km/s است؛ ر.ك. مثال ۷. هرگاه پرتابه‌ای که به‌موشکی سوار شده در ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتری سطح زمین از موشك جدا شود حداقل سرعت لازم درآن نقطه، برای فرار جسم از زمین، چقدر است؟

۲۶. در مثال ۷ هرگاه سرعت اولیه نصف سرعت فرار باشد جسم تا چه ارتفاعی از زمین بالا می‌رود؟ این ارتفاع را اول حدس بزنید سپس محاسبه کنید.

۲۷. **(قانون بویل ـ ماریوت برای گازهای ایده‌آل)**[1] تجربه نشان می‌دهد که برای یك

---

۱. رابرت بویل (Robert Boyle)، ۱۶۲۷ـ۱۶۹۱، فیزیکدان انگلیسی؛ اِدمِه ماریوت (Edme Mariotte)، ۱۶۲۰ـ۱۶۸۴، فیزیکدان فرانسوی.

گاز درفشارپایین p (و دمای ثابت) میزان تغییرحجم، $V(p)$، برابر $-V/p$ است معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با آن را حل کنید.

۲۸. **(رشد نمایی)** هرگاه درکشت باکتریها میزان رشد با جمعیت، $p(t)$، موجود در زمان t متناسب باشد و درمدت ۱ روز جمعیت دوبرابر شود پس ازیك هفته، باهمان میزان رشد، چه رشدی را می‌توان انتظار داشت؟

۲۹. **(تحلیل رفتن به صورت نمایی) طبق قانون جذب لامبر**[۱]، جذب نور در یك لایهٔ بسیار نازك متناسب است با ضخامت لایه و مقدار نوری که به‌لایه وارد می‌شود. این قانون را به‌صورت یك معادلهٔ دیفرانسیل بنویسید و آن را حل نمایید.

۳۰. **(تلاشی نمایی، نیم عمر)** تجربه نشان می‌دهد که میزان تجزیه دربیشتراجسام رادیواکتیو با مقدار مادهٔ موجود در هرلحظه متناسب است. زمان لازم برای آنکه ۵۰٪ از مادهٔ مفروضی تجزیه‌شود را نیم‌عمرآن‌ماده گویند. نیم‌عمررادیوم $Ra^{۲۲۶}_{۸۸}$، $H=۱۶۰۰$ سال است.* درمدت یك سال چند درصد این ماده نابود می‌شود؟ در ده سال چند درصد؟

۳۱. نشان دهید که نیم عمر، H، یك مادهٔ رادیواکتیو را می‌توان برطبق دو اندازه‌گیری $y_۱=y(t_۱)$ و $y_۲=y(t_۲)$ از مقادیر موجود در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ بوسیلهٔ دستور زیر معین نمود

$$H=\frac{(t_۲-t_۱)\ln ۲}{\ln (y_۱/y_۲)}$$

۳۲. تجربه نشان می‌دهد که میزان وارونگی‌نیشکر درمحلول رقیق با غلظت شکرتبدیل‌شده $y(t)$، متناسب است. فرض کنید این غلظت در $t=۰$ برابر ۱/۱۰۰ و در ساعت $t=۴$ برابر ۱/۳۰۰ باشد. $y(t)$ را پیدا کنید.

۳۳. **(چرخ طیار)** چرخ طیاری به‌گشتاور لختی I با سرعت زاویه‌ای نسبتاً کم $\omega_۰$ (رادیان‌برثانیه) می‌چرخد. درلحظهٔ $t=۰$ قدرت محرکهٔ چرخ قطع می‌گردد و براثر اصطکاك سرعت چرخ رو به‌کاهش می‌گذارد. با فرض آنکه گشتاور نیروی اصطکاك با $\sqrt{\omega}$، که در آن ω سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای است، متناسب باشد و با استفاده از صورت پیچشی **قانون دوم نیوتن** یعنی

گشتاور نیرو = شتاب زاویه‌ای × گشتاور لختی

سرعت زاویه‌ای، $\omega(t)$، و زمان لازم برای نصف شدن سرعت چرخ، $t_۱$، و نیززمان

---

۱. جوهان هنریخ لامبر (Johann Heinrich Lambert)، ۱۷۲۸ـ۱۷۷۷، فیزیکدان و ریاضی‌دان آلمانی.

* صفحهٔ B ـ ۵۰۴ کتاب زیر را ملاحظه کنید.

CRC, *Handbook of Chemistry and Physics*, 54 th ed, 1973-74

لازم برای توقف چرخ، t_2، را پیدا کنید.

۳۴. (تبخیر) تجربه نشان می‌دهد رطوبتی را که یك جسم متخلخل و تر در هوای آزاد ازدست می‌دهد با میزان رطوبت موجود درآن متناسب است. اگرصفحهٔ آویخته‌ای که درمعرض باد قرار دارد در یکساعت اول نصف رطوبت خود را از دست بدهد عملا کی خشك می‌شود، مثلا، پس از چه زمانی ۹۹٫۹٪ رطوبت خود را از دست می‌دهد درصورتی که شرایط جوی تغییر نکند؟

۳۵. (گلولهٔ نفتالین) فرض کنید میزان‌کاهش حجم یك گلولهٔ نفتالین براثرتبخیر در هرلحظه باسطح آن متناسب باشد. هرگاه‌قطر گلوله درظرف ۳ ماه از ۲ سانتیمتر به ۱ سانتیمتر تقلیل یابد، چه مدتی طول می‌کشد تا گلوله عملا محو شود، مثلا، قطر آن ۱ میلیمتر گردد؟

۳۶. درظرفی دونوع مایع درحال جوشیدن است. معلوم شده است‌که نسبت مقادیر بخار دومایع درهرلحظه با نسبت مقادیر x و y موجود از دومایع درظرف متناسب است. نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx}=k\frac{y}{x}$$

و این معادله را حل کنید.

۳۷. (قانون تبرید نیوتن) دماسنجی که $15^\circ C$ را نشان می‌دهد در داخل اطاقی به دمای $23^\circ C$ قرار می‌دهیم. بعد از یك دقیقه دماسنج $19^\circ C$ را نشان می‌دهد. پس از چه مدت دماسنج عملا به $23^\circ C$ می‌رسد، یعنی، $22{,}9^\circ C$ را نشان می‌دهد؟

۳۸. زمان لازم برای خالی شدن مخزن مثال ۶ بیش از ۲ برابر زمانی است که نصف مخزن پر می‌شود. آیا ازنظر فیزیکی این مطلب قابل فهم است؟

شکل ۱۱. مخزن قیفی شکل مسئله ۳۹.

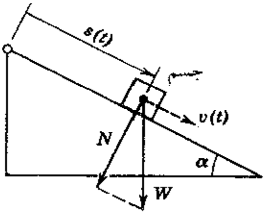
۳۹. قسمت خروجی مخزن قیفی شکلی (شکل ۱۱) به مقطع دایره و به زاویهٔ رأس 60°

دارای سطح مقطعی برابر ۵ر۰ سانتیمتر مربع است. این مخزن محتوی آب است. درلحظهٔ $t = ۰$ قسمت خروجی آن باز می‌شود و آب به خارج جریان می‌یابد. زمان لازم برای خالی شدن مخزن را حساب کنید در صورتیکه ارتفاع اولیهٔ آب $h(۰) = ۱$ m باشد.

راهنمایی: می‌توانید از (۹) استفاده کنید. چرا؟

۴۰. مخزن مسئله ۳۹ را نیمکره‌ای به شعاع R فرض کنید که در ابتدا پر از آب است و قسمت خروجی آب واقع در ته ظرف دارای سطح مقطع ۵ سانتیمتر مربع باشد. در یك لحظه قسمت خروجی باز می‌شود. زمان لازم جهت تخلیه شدن مخزن را (الف) برای هر R مفروض؛ (ب) برای $R = ۱$m، پیدا کنید.

۴۱. (پرش‌کننده با چتر بسته) (الف) در مثال ۸ ارتفاع سقوط آزاد متناظر با سرعت حد ۴ر۸۷ m/s چه اندازه است؟ (ب) درمثال ۸ هرگاه مقاومت هوا را متناسب با v بجای v^2 درنظر بگیریم، یعنی، $U = \bar{b}v$ که درآن $b = ۷ر۳$ kg/s، چه‌تغییراتی درمعادله و جواب آن پدید می‌آید؟ آیا این مدل هنوز مناسب است؟



شکل ۱۲. مسئله ۴۲

۴۲. (اصطکاك) هرگاه جسمی روی سطحی حرکت کند (بلغزد) نیرویی در خلاف جهت حرکت برجسم اثر می‌کند. این نیرو را اصطکاك نامند. قانون کولن[1] دربارهٔ اصطکاك جنبشی خشك چنین است

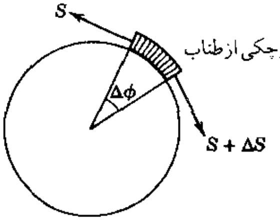
$$|F| = \mu |N|$$

که در آن F اصطکاك، N نیروی قائم (نیرویی که جسم را روی سطح نگه می‌دارد؛ شکل ۱۲ را ببینید) و ثابت تناسب μ را ضریب اصطکاك جنبشی نامند. با استفاده از قانون دوم نیوتن (نیرو = جرم × شتاب) معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به‌شکل ۱۲ را تشکیل دهید. سرعت جسم را وقتی به‌انتهای سطح شیب‌دار می‌رسد پیدا کنید؛ فرض براین است که وزن جسم ۴۵ نیوتن و $\mu = ۰ر۱$ و $\alpha = ۳۰°$ و طول سطح ۱۰ متر

۱. شارل‌آگوستین دوکولن (Charles Augustin de Coulomb)، ۱۷۳۶ـ۱۸۰۶، فیزیکدان فرانسوی.

باشد. سرعت اولیه صفر است و ازمقاومت هوا صرفنظر می‌شود

۴۳. فرض کنید جسم مورد بحث مسئلهٔ ۴۲ طوری باشد که از مقاومت هوا نتوان صرفنظر نمود بلکه نیرویی برابر با v ۵ر۰ را موجب شود. مطلوب است محاسبهٔ $v(t)$، فاصلهٔ $s(t)$ و $s(۲ر۲۲)$ که درآن $t = ۲ر۲۲\ \mathrm{s}$ زمانی است که درصورت صرفنظرنمودن ازمقاومت هوا برای پیمودن طول کل مسیر، یعنی ۱۰ متر، لازم است.



شکل ۱۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۴. (طناب) هرگاه طنابی را دوراستوانه‌ای که سطح آن زبراست وروی زمین ثابت شده است ببندیم با نیروی کمی که به یك انتها وارد می‌کنیم می‌توانیم نیروی زیادی را که برطرف دیگروارد می‌شود تحمل کنیم. فرض کنید S نیروی واردبرطناب باشد. تجربه نشان‌می‌دهد که تغییر ΔS نیروی S دریك قسمت کوچك طناب متناسب با S و زاویهٔ کوچك $\Delta\varphi$ درشکل ۱۳ است. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل برای S عبارت است از

$$\frac{dS}{d\varphi}=\mu S$$

هرگاه $\mu = ۰ر۲\ \mathrm{rad}^{-۱}$ باشد چند دفعه باید طناب را دور استوانه بپیچید تا مردی که یك طرف طناب را نگاهداشته است بتواند در برابر نیرویی کـه ۱۰۰۰ برابر توانش هست مقاومت کند؟

۴۵. (قانون اثر جرم) طبق قانون اثر جرم سرعت واکنشهای شیمیایی در دمای ثابت بـا حاصلضرب غلظت موادی که در واکنش شرکت دارند متناسب است. در واکنشهای دو ملکولی

$$A+B \rightarrow M$$

a مل در لیتر از مادهٔ A با b مل در لیتر از مادهٔ B ترکیب می‌شود. هرگاه پس از زمان t تعداد ملهای ترکیبی برابر y باشد میزان واکنش ازفرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{dy}{dt}=k(a-y)(b-k)$$

این معادله را با فرض $a \neq b$ حل کنید.

کاربردهای هندسی

۴۶. **(منحنی پروانه)** مسئله با مقدار اولیهٔ

$$\frac{dr}{d\theta}+\frac{a^{۲}}{r}\sin ۲\theta=۰ \quad , \quad r^{۲}(۰)=a^{۲} \ ,$$

را که درآن a ثابت و r و θ مختصات‌قطبی است، حل کنید. منحنی‌جواب را منحنی پروانه نامند.

برای هریك ازموارد زیرتمام منحنیهای واقع درصفحهٔ xy را طوری پیدا کنید که خاصیت موردنظر را دارا باشند.

۴۷. شیب مماس برمنحنی با x/y متناسب و ثابت تناسب مثبت باشد.

۴۸. به ازای هرمماس، قطعه‌ای از مماس محصور بین محورهای مختصات به وسیلهٔ نقطهٔ تماس به دوقسمت مساوی تقسیم شده باشد.

۴۹. قائمها همگی از مبدأ بگذرند.

۵۰. قائم درهرنقطهٔ (x, y) محور x ها را در $(x+۱/۲ ، ۰)$ قطع کند.

۵۱. مماسها همگی از مبدأ بگذرند.

۵۲. شیب مماس درهرنقطهٔ (x, y) نصف شیب خطی باشد که ازاین‌نقطه و مبدأ می گذرد.

۵۳. فاصلهٔ نقطهٔ (x, y) تا مبدأ برابر با فاصلهٔ همان نقطه تا محل تقاطع قائم بر منحنی با محور xها باشد.

۵۴. قطعه‌ای از قائم در (x, y) که دو سر آن را (x, y) و نقطهٔ تلاقی قائم با محور x ها تشکیل می‌دهند به‌وسیلهٔ محور y ها به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۵۵. فواصل نقطهٔ (x, y) از نقاط تقاطع مماس و قائم از این نقطه با محور x ها برابر باشد.

۴.۱ معادلات قابل‌تحویل به‌صورت تفکیك‌پذیر

بعضی ازمعادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول تفکیك‌ناپذیرند اما با یك تغییرمتغیرساده تفکیك‌پذیر می‌شوند. معادلاتی به‌صورت

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (۱)$$

ازاین قبیل‌اند[1] که درآن g تابع داده شده‌ای از x/y نظیر $(y/x)^۳$، $\sin(y/x)$ وغیره است. ازشکل معادله می‌توان توجیه نمودکه بهتر است بنویسیم

$$\frac{y}{x}=u$$

که y و u توابعی از x هستند. ازاینرو $y=ux$ است و با مشتقگیری داریم

$$y'=u+u'x \qquad (۲)$$

با قراردادن این مقدار در (۱) و با توجه به‌اینکه $g(y/x)=g(u)$ داریم

$$u+u'x=g(u)$$

حال می‌توانیم متغیرهای u و x را تفکیک کنیم و به‌دست بیاوریم

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

هرگاه انتگرالگیری کنیم و بجای u مقدار y/x را بگذاریم جواب عمومی (۱) به دست می‌آید.

مثال ۱

معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۲xyy'-y^۲+x^۲=۰$$

با تقسیم بر $x^۲$ داریم

$$(\frac{۲y}{x})y'-(\frac{y}{x})^۲+۱=۰$$

اگر بگذاریم $u=y/x$ و از (۲) استفاده کنیم معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$۲xuu'+u^۲+۱=۰ \quad \text{یا} \quad ۲u(u+u'x)-u^۲+۱=۰$$

با جداکردن متغیرها پیدا می‌کنیم

$$\frac{۲u\,du}{۱+u^۲}=-\frac{dx}{x}$$

و با انتگرالگیری نتیجه می‌شود

$$۱+u^۲=(\frac{c}{x}) \quad \text{یا} \quad \ln(۱+u^۲)=-\ln|x|+c^*$$

---

۱. بعضی مواقع این‌معادلات را **معادلات همگن** نامند. ما این نامگذاری را به‌کار نخواهیم برد بلکه اصطلاح «همگن» را برای منظور بس‌مهمتری نگاه می‌داریم (ر.ك. بخش ۱.۷).

با جانشین نمودن u به‌وسیلهٔ y/x سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{c^2}{4} \quad \text{یا} \quad x^2+y^2=cx$$

بعضی مواقع شکل یك معادلهٔ دیفرانسیل داده شده ایجاب می‌کند که جایگزینیهای سادهٔ دیگری را،نظیر مثال زیر، به‌کار ببریم.

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر را حل کنید

$$(2x-4y+5)y'+x-2y+3=0$$

می گذاریم $x-2y=v$. ازآنجا $y'=(1-v')/2$ و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$(2v+5)v'=4v+11$$

با تفکیك متغیرها و انتگرالگیری پیدا می کنیم

$$\left(1-\frac{1}{4v+11}\right)dv=2dx \quad \text{و} \quad v-\frac{1}{4}\ln|4v+11|=2x+c^*$$

چون $v=x-2y$ می‌توان نوشت

$$4x+8y+\ln|4x-8y+11|=c$$

جایگزینی‌سادهٔ بیشتری درمعادلات مربوط به‌مسائل ۱۱ — ۱۵ توضیح داده شده‌اند.

مسائل بخش ۴.۱

در هریك ازحالات زیرجواب عمومی را بیابید

۱. $xy'=x+y$

۲. $xy'-2y=3x$

۳. $x^2y'=x^2-xy+y^2$

۴. $(x^2+1)y(xy'-y)=x^3$

۵. $xy'=y+x^2\sec(y/x)$

۶. $xy'-y-x^2\tan(y/x)=0$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۷. $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$ ، $y(1)=1$

۸. $y'=\dfrac{y+x}{y-x}$ ، $y(0)=2$

۹. $xy'=y+(y-x)^3$ ، $y(1)=1.5$

۱۰. $xyy'=2y^2+4x^2$ ، $y(2)=4$

با استفاده از تبدیلات داده شده جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱۱. $y'=(y-x)^2$ ، $(y-x=v)$

۱۲. $y'=\cot(y+x)-1$ ، $(y+x=v)$

۱۳. $xy'=e^{-xy}-y$ ، $(xy=v)$

۱۴. $e^y y'=k(x+e^y)-1$ ، $(x+e^y=v)$

۱۵. $y'=\dfrac{y-x}{y-x-1}$ ، $(y-x=v)$

۱۶. $y'=f(ax+by+k)$ را درنظر بگیرید که درآن f پیوسته است. اگر $b=0$ جواب آناً پیدا می‌شود. (چرا؟) درصورتیکه $b\neq 0$ باشد نشان دهید که با انتخاب $u(x)=ax+by+k$ به عنوان متغیر وابستهٔ جدید معادلهٔ تفکیك پذیری به دست می‌آید.

۱۷. نشان‌دهید که خط مستقیمی که ازمبدأ می‌گذرد تمام منحنیهای‌جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده شدهٔ $y'=g(y/x)$ را با یك زاویه قطع می‌کند.

۱۸. منحنی‌ای را پیدا کنید که ازنقطهٔ $(x\,,\,y)=(\sqrt{e}$ و $\sqrt{e})$ بگذرد و دارای شیب $x/y+y/x$ باشد.

۱۹. منحنی $y(x)$ را طوری‌پیدا کنید که ازنقطهٔ $(1\,,\,1/2)$ بگذرد وطول‌مماس برمنحنی از هرنقطهٔ $(x,\,y)$ تا محل تقاطع این مماس با محور y ها برابر $2xy^2$ باشد.

۲۰. موقعیت چهار رزمناو دراقیانوس به گونه‌ای‌است که رئوس‌مربعی به‌ضلع l را تشکیل می‌دهند. دریك‌لحظه هر رزمناو گلوله‌ای‌شلیك می‌کندکه حرکت‌آن به‌طوریکنواخت و درامتداد گلولهٔ دست راستی آن انجام می‌گیرد. با فرض آنکه هرچهار گلوله افقی حرکت کنند و سرعتهای برابری داشته باشند مسیر هرکدام را پیدا کنید.

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کامل

یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول به‌صورت

$$M(x,\,y)dx+N(x,\,y)dy=0 \qquad (1)$$

را **کامل** نامند درصورتی که سمت چپ رابطهٔ فوق دیفرانسیل کلی یا دیفرانسیل‌کامل

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{۲}$$

یك تابع $u(x, y)$ باشد. دراین صورت معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$du=0 .$$

با انتگرالگیری جواب عمومی (۱) به‌شکل زیر به‌دست می‌آید

$$u(x, y)=c. \tag{۳}$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌بینیم کـه (۱) وقتی کامل است کـه تابعی مانند $u(x, y)$ موجود باشد به‌طوری که

$$\text{(الف)}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=M \quad ، \quad \text{(ب)}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N \tag{۴}$$

فرض کنید M و N درناحیه‌ای ازصفحهٔ xy، که مرز آن منحنی بسته‌ای است که خود را قطع نمی‌کند، تعریف شده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته بـاشد. آنگاه از (۴) داریم

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

و با توجه به‌فرض پیوستگی مشتقات مرتبهٔ دوم مساوی‌اند. بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{۵}$$

این شرط نه‌تنها لازم است تا اینکه $Mdx+Ndy$ دیفرانسیل کامل باشد بلکه یك شرط کافی نیز هست.[۱]

هرگاه (۱) کامل باشد تابع $u(x, y)$ را می‌توان با حدس ویا با روش سیستماتیك زیر پیدا کرد. از (۴ الف) داریم

$$u=\int M dx+k(y) \tag{۶}$$

در این انتگرالگیری y، مانند یك ثابت در نظر گرفته می‌شود و $k(y)$ نقش یك «ثابت» انتگرالگیری را ایفا می‌کند. برای‌تعیین $k(y)$ از (۶)، $\partial u/\partial y$ را حساب می‌کنیم و از

۱. این‌مطلب را درجای دیگری اثبات خواهیم کرد (دربخش۱۲.۹)؛ همچنین می‌توان اثبات آن را در بعضی کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی یافت ؛ به مرجع [A۱۴] در ضمیمهٔ 1 رجوع کنید.

(۴ ب) مقدار dk/dy را می‌یابیم و انتگرالگیری می‌کنیم.
دستور(۶) از (۴ الف) نتیجه شد. بجای(۴ الف) می‌توان از (۴ ب) استفاده کرد. دراین صورت بجای (۶) نخست داریم

$$u=\int N\,dy+l(x) \qquad (۶^*)$$

برای تعیین $l(x)$ از (۶*)، مقدار $\partial u/\partial x$ را پیدا می‌کنیم و برای تعیین dl/dx رابطهٔ (۴ الف) را به‌کار می‌بریم و انتگرال می‌گیریم.

مثال ۱

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$xy'+y+۴=۰ \cdot$$

معادله را به‌صورت (۱) می‌نویسیم، یعنی،

$$(y+۴)\,dx+x\,dy=۰ \cdot$$

حال می‌بینیم که $M=y+۴$ و $N=x$. از اینرو (۵) برقرار است وبنابراین معادله کامل می‌باشد. از (۶*) داریم

$$u=\int N\,dy+l(x)=\int x\,dy+l(x)=xy+l(x) \cdot$$

برای تعیین $l(x)$ از این فرمول نسبت به x مشتق می‌گیریم و با استفاده از (۴.الف) پیدا می‌کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{dl}{dx}=M=y+۴ \cdot$$

بنابراین $dl/dx=۴$ و $l=۴x+c^*$. از اینرو جواب عمومی معادله را به‌صورت

$$u=xy+l(x)=xy+۴x+c^*=\text{ثابت}$$

به‌دست می‌آوریم که با تقسیم بر x شکل صریح

$$y=\frac{c}{x}-۴$$

حاصل می‌شود. دانشجویان با هوش، که می‌دانند تفکردرریاضیات مهم است، معادلهٔ داده شده را به‌صورت

$$y\,dx+x\,dy=-۴\,dx$$

می‌نویسند که سمت چپ آن دیفرانسیل کامل xy است و با انتگرالگیری از آن

$xy=-۴x+c$ حاصل می‌شود، که با نتیجهٔ قبلی معادل است.

مثال ۲

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$۲x\sin ۳y\,dx+۳x^{۲}\cos ۳y\,dy=۰\,.$$

این معادله کامل است و با توجه به (۶) به‌دست می‌آوریم

$$u=\int ۲x\sin ۳y\,dx+k(y)=x^{۲}\sin ۳y+k(y)\,.$$

بنابراین $\partial u/\partial y=۳x^{۲}\cos ۳y+dk/dy$ ، و $dk/dy=۰$ یا $k=c^{*}=$ ثابت.
جواب عمومی عبارت است از $u=$ ثابت یا $x^{۲}\sin ۳y=c$.

مسائل بخش ۵۰۱

برای هر حالت بعضی منحنیهای تراز $u(x\,,\,y)=c=$ ثابت را رسم نمایید و دیفرانسیل کلی u را پیدا کنید.

۱. $u=۴x^{۲}+۹y^{۲}$ ۲. $u=y/x$

۳. $u=e^{xy}$ ۴. $u=\sin(y^{۲}-x)$

معادلات دیفرانسیل کاملی را پیدا کنید که دارای جوابهای عمومی زیر باشند

۵. $x^{۳}y+\cos ۲x=c$ ۶. $e^{x}\sin y=c$

۷. $xe^{-۲xy}=c$ ۸. $\tan x=c\tan y$

نشان دهید که معادلات دیفرانسیل زیر کامل هستند و آنها را حل کنید.

۹. $y^{۲}dx+۲xy\,dy=۰$ ۱۰. $\cos x\,dx+y\,dy=۰$

۱۱. $x^{-۱}dy-x^{-۲}y\,dx=۰$ ۱۲. $۳re^{۲\theta}d\theta+e^{۲\theta}dr=۰$

۱۳. $۲x\ln y\,dx+y^{-۱}x^{۲}dy=۰$

۱۴. $(\cot y+x^{۲})\,dx=x\,\mathrm{cosec}^{۲}y\,dy$

۱۵. هرگاه معادلهٔ دیفرانسیلی کامل باشد می‌توانیم $u(x\,,\,y)=c$ را با روشی که درمتن کتاب بیان شد از (۶) به دست آوریم. اما اگر معادله کامل نباشد این روش عملی نیست. برای روشن شدن موضوع معادلهٔ $x\,dy-y\,dx=۰$ را در نظر بگیرید. نشان‌دهید که این معادله کامل نیست. u را از (۶) به‌دست آورید و $\partial u/\partial y$ رامحاسبه کنید و نشان دهید کــه با (۴ ب) تناقض دارد. معادله را با روشهای دیگری که قبلا

بحث شده‌اند حل کنید. آیا معادلات زیر کامل‌اند؟ جواب عمومی را پیدا کنید.

۱۶. $ye^{xy}dx+(1+xe^{xy})\,dy=0$

۱۷. $xdy+3y^2\,dx=0$

۱۸. $xy\,(dx+dy)=0$

۱۹. $\cosh x\sin y\,dy=\sinh x\cos y\,dx$

۲۰. $(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0$

۲۱. $x^{-1}\cos 2y\,dx=2\ln x\sin 2y\,dy$

۲۲. نشان دهید که هرمعادلهٔ تفکیک‌پذیر، کامل نیزهست. آیا عکس این مطلب درست است؟ بعضی اوقات ممکن‌است یک معادلهٔ دیفرانسیل را با روشهای مختلفی حل کرد. برای روشن نمودن این مطلب معادلات زیر را (الف) با روش فعلی؛ (ب) باتفکیک متغیرها؛ (پ) با حدس و بررسی، حل کنید.

۲۳. $b^2x\,dx+a^2y\,dy=0$

۲۴. $4x^{-5}y\,dx=x^{-4}dy$

۲۵. $2x\,dx+x^{-2}(x\,dy-y\,dx)=0$

۲۶. $\cos x\cos y\,dx=\sin x\sin y\,dy$

۲۷. هرگاه $F(x, y)\,dx+G(x, y)\,dy=0$ کامل باشد نشان دهید که معادلهٔ زیرنیز کامل است.

$$[F(x, y)+f(x)]dx+[G(x, y)+g(y)]dy=0$$

۲۸. تحت چه شرایطی $(ax+by)\,dx+(kx+ly)\,dy=0$ کامل است؟ (دراینجا a، b، l و k ثابت هستند.) معادلهٔ کامل را حل کنید.

۲۹. تحت چه شرایطی $[f(x)+g(y)]\,dx+[h(x)+p(y)]\,dy=0$ کامل است؟

۳۰. تحت چه شرایطی $f(x, y)\,dx+g(x)h(y)\,dy=0$ کامل است؟

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۳۱. $3x^2y^4dx+4x^3y^3\,dy=0\ ,\ \ y(1)=2$

۳۲. $4x\,dx+9y\,dy=0\ ,\ \ y(3)=0$

۳۳. $(y-1)\,dx+(x-3)dy=0\ ,\ \ y(0)=\frac{2}{3}$

۳۴. $\cos\pi x\cos ۲\pi y\,dx=۲\sin\pi x\sin ۲\pi y\,dy,\quad y(۳/۲)=۱/۲$

۳۵. $[e^x\cos y+۲(x-y)]\,dx=[e^x\sin y+۲(x-y)]\,dy,\quad y(۰)=\pi$

۳۶. $\cos ۲x\cosh ۲y\,dx+\sin ۲x\sinh ۲y\,dy=۰,\quad y(\pi/۴)=۰$

منحنی‌ای به‌شیب y' را که‌از نقطهٔ داده شدهٔ (x, y) بگذرد پیدا کنید ونمودار آن را رسم نمایید

۳۷. $y'=\dfrac{x+۲}{y+۱}\,,\ (-۳, -۱)$ ۳۸. $y'=-\dfrac{y-۲}{x-۲}\,,\ (۰, ۰)$

۳۹. $y'=\dfrac{۱-x}{۱+y}\,,\ (۱, ۰)$ ۴۰. $y'=\dfrac{x}{۴-۴y}\,,\ (۰, ۲)$

۶.۱ عوامل انتگرالساز

بعضی اوقات معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=۰ \qquad (۱)$$

کامل نیست اما می‌توان با ضرب آن در یك تابع مناسب $(\not\equiv ۰)$ $F(x, y)$ آن را بـه صورت‌کامل در آورد. در این صورت این تابع را **عامل انتگرالساز** (۱) نامند. با کمی تجربه می‌توان عامل انتگرالساز را با حدس وبررسی پیدا کرد. بدین منظور دانشجو باید دیفرانسیلهایی را که در مثال ۲ زیر آورده شده‌اند به خاطر بسپارد. دربرخی از حالات خاص مهم عوامل انتگرالساز را می‌توان با روشی سیستماتیك، کـه در بخش بعد توضیح داده می‌شود، معین نمود.

مثال ۱

معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$x\,dy-y\,dx=۰\,.$$

این معادلهٔ دیفرانسیل کامل نیست. یك عـامل انتگرالساز $F=۱/x^۲$ است ، و به دست می‌آوریم

$$F(x)(x\,dy-y\,dx)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^۲}=d\left(\frac{y}{x}\right)=۰,\qquad y=cx.$$

قضیهٔ ۱

هرگاه (۱) کامل نبوده و جوابی عمومی به صورت $u(x, y)=c$ داشته باشد آنگاه یك

عامل انتگرالساز برای (۱) موجود است (و حتی تعداد بی‌شماری از این عوامل).

اثبات. با مشتقگیری از $u(x, y)=c$ داریم

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0 .$$

با مقایسهٔ این رابطه با (۱) می‌بینیم که

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y}=P : Q$$

باید یك اتحاد باشد. از اینرو تابعی مانند $F(x, y)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{\partial u}{\partial x}=FP, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=FQ.$$

با استفاده از این عبارات برای $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ داریم

$$du=FPdx+FQdy=F(Pdx+Qdy) .$$

این نشان می‌دهد که F یك عامل انتگرالساز برای (۱) است. بعلاوه، ضرب (۲) در یك تابع $H(u)$ منجر به‌عبارت‌کامل زیر می‌شود

$$H(u)F(pdx+Qdy)=H(u)du$$

بدین‌ترتیب $H(u)F(x, y)$ عامل انتگرالسازدیگری است، وچون H دلخواه است‌تعداد بیشماری عوامل انتگرالساز برای (۱) وجود دارد.

مثال ۲

عوامل انتگرالساز $xdy-ydx=0$ را پیدا کنید؛ به‌مثال ۱ رجوع کنید. نظر به‌این که

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{2}} \ , \quad d\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{xy} \ ,$$

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^{2}+y^{2}}$$

توابع $1/y^{2}$ ، $1/xy$ و $1/(x^{2}+y^{2})$ چنین عواملی هستند. جوابهای متناظر

$$\frac{x}{y}=c, \qquad \ln\frac{y}{x}=c, \qquad \arctan\frac{y}{}$$

الزاماً یکی هستندزیراهرکدام نمایش دهندهٔ خانواده‌ای ازخطوط مستقیم ماربرمبدأ هستند.

مسائل بخش ۶.۱

در هر یك از موارد زیر نشان دهیدکه تابع داده شده یك عامل انتگرالساز است و معادله را حل کنید

۱. $۲ \cos \pi y\, dx = \pi \sin \pi y\, dy, \quad e^{۲x}$

۲. $y \cos x\, dx + ۳ \sin x\, dy = ۰, \quad y^{۲}$

۳. $۳(y+۱)\, dx = ۲x\, dy, \quad (y+۱)/x^{۴}$

۴. $۲\sinh x\, dx + \cosh x\, dy = ۰, \quad e^{y} \cosh x$

۵. $(\sin xy \cos xy + xy)\, dx + x^{۲}\, dy = ۰, \quad \sec^{۲} xy$

۶. $(a+۱) y\, dx + (b+۱) x\, dy = ۰, \quad x^{a} y^{b}$

درهرمورد یك عامل انتگرالساز F پیداکنید ومعادله را حل نمایید.

۷. $۳y\, dx + ۲x\, dy = ۰$

۸. $۲dx - e^{y-x} dy = ۰$

۹. $\sin y\, dx + \cos y\, dy = ۰$

۱۰. $x \cosh y\, dy - \sinh y\, dx = ۰$

۱۱. $۲ \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy = ۰$

۱۲. $(y+۱)\, dx - (x+۱)\, dy = ۰$

عوامل انتگرالساز را پیداکنید ومسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل نمایید

۱۳. $۲y\, dx + x\, dy = ۰, \quad y(۲) = -۱$

۱۴. $۲y\, dx - x\, dy = ۰, \quad y(۱) = ۲$

۱۵. $(۲y + xy)\, dx + ۲x\, dy = ۰, \quad y(۳) = \sqrt{۲}$

۱۶. $dx + \frac{۱}{۲} \sec x \cos y\, dy = ۰, \quad y(۰) = ۰$

در هر حالت نشان دهیدکه تابع داده شده یك عامل انتگرالساز است و عوامل انتگرالساز بیشتری را پیداکنید.

۱۷. $y\, dx + ۲x\, dy = ۰, \quad F = y$

۱۸. $2y \sinh x\, dx + \cosh x\, dy = 0, \quad F = \cosh x$

برای هرحالت شرایطی‌راکه تحت آن F یك عامل انتگرالساز(۱) باشد پیدا کنید.
راهنمایی: فرض کنید $F(Pdx+Qdy)=0$ کامل است ورابطهٔ (۵) بخش ۵.۱ را به‌کار برید.

۱۹. $F = x^a$ **۲۰.** $F = y^b$ **۲۱.** $F = e^y$ **۲۲.** $F = x^a y^b$

۲۳. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۹، مسائل ۱۰، ۱۳ و ۱۴ را حل کنید.

۲۴. امتحان‌کردن جوابها‌همیشه حائزاهمیت‌است. درارتباط باروش حاضراین‌کارمخصوصاً ضروری است زیرا گاهی لازم می‌آیدکه تابع $y(x)$ حاصل از $F(x, y)=0$ کنارگذاشته شود. برای روشن شدن مطلب معادلهٔ $(xy)^{-1}dy - x^{-2}dx = 0$ را درنظر بگیرید؛ نشان دهیدکه یك عامل انتگرالساز عبارت‌از $F=y$ است واین منجربه $d(y/x)=0$ می‌شود ازاینرو $y=cx$، که درآن c دلخواه است، اما $F=y=0$ جواب معادلهٔ اصلی نیست.

۲۵. این نکته جالب توجه است که هرگاه $F(x, y)$ یك عامل انتگرالساز باشد $1/F(x, y)=0$ ممکن است گاهی منجر به جوابی اضافی برای معادلهٔ متناظر گردد. برای روشن شدن مطلب $xdy - ydx = 0$ را درنظر بگیرید؛ نشان دهید که یك عامل انتگرالساز $F = 1/x^2$ است که منجربه $y=cx$ می‌شود. نشان دهید که $1/F = x^2 = 0$ منجر به جواب اضافی $x=0$ برای معادلهٔ مفروض می‌شود که در $y=cx$ وجود ندارد.

۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی

یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول را **خطی** نامند هرگاه بتوان آن را به صورت

$$y' + f(x)y = r(x) \tag{1}$$

نوشت. خصوصیت این معادله آن است که برحسب y و y' خطی است درحالی که f و r می‌توانند هرتابع مفروضی از x باشند.

هرگاه $r(x) \equiv 0$، معادله را **همگن**؛ درغیراین‌صورت،آن را **غیرهمگن** نامند. دراینجا منظور از $r \equiv 0$ این است که $r=0$ به‌ازای تمام مقادیر x درقلمرو r.

حال دستوری برای جواب عمومی (۱) دریك فاصلهٔ I پیدا می کنیم. با این‌فرض که f و g در I پیوسته باشند، برای معادلهٔ همگن

$$y' + f(x)y = 0 \tag{2}$$

این‌کار بسیار ساده است. با تفکیك متغیرها داریم

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \quad \text{و ازاینرو} \quad \ln|y| = -\int f(x)dx + c^*$$

یا

$$y(x)=ce^{-\int f(x)dx} \qquad (y\gtrless 0 \text{ وقتی که } c=\pm e^{c^*}) \tag{۳}$$

دراینجا همچنین می‌توانیم c را برابر صفر بگیریم و جواب بدیهی $y\equiv 0$ را به‌دست آوریم.

حال برای حل معادلهٔ غیرهمگن (۱) آن را به‌صورت

$$(fy-r)dx+dy=0$$

می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که می‌توانیم که یك عامل انتگرالساز $F(x)$ بیابیم که فقط به x بستگی داشته باشد. هر گاه چنین عاملی وجود داشته باشد معادلهٔ

$$F(x)(fy-r)dx+F(x)dy=0$$

بایدکامل باشد. حال درمورد این معادله شرط (۵) بخش ۵.۱ به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(fy-r)]=\frac{dF}{dx} \quad \text{یا} \quad Ff=\frac{dF}{dx}$$

با تفکیك متغیرها داریم $fdx=dF/F$ که با انتگرالگیری از آن نتیجه می‌شود

$$\ln|F|=\int f(x)dx$$

از اینرو

$$F(x)=e^{h(x)} \quad \text{که درآن} \quad h(x)=\int f(x)dx$$

این بدان معنی است که $F(x)$ یك عامل انتگرالساز (۱) است. حال با ضرب کردن (۱) دراین عامل، پیدا می‌کنیم

$$e^h(y'+fy)=e^hr$$

چون $h'=f$، این را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d}{dx}(ye^h)=e^hr$$

حال می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم و به‌دست بیاوریم

$$ye^h=\int e^hrdx+c$$

با تقسیم طرفین بر e^h فرمول مطلوب را پیدا می‌کنیم

$$y(x)=e^{-h}\left[\int e^hrdx+c\right], \quad h=\int f(x)dx \tag{۴}$$

که جواب عمومی (۱) را به صورت یك انتگرال نشان می‌دهد. انتخاب مقدار ثابتهای انتگرالگیری مهم نیست؛ به‌مسئلهٔ ۲ همین بخش رجوع کنید.)

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل خطی زیر را حل کنید

$$y' - y = e^{2x}$$

دراین‌جا داریم

$$f = -1, \quad r = e^{2x}, \quad h = \int f\,dx = -x$$

وبنابر (۴) جواب عمومی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$y(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}dx + c\right] = e^{x}[e^{x}+c] = ce^{x} + e^{2x}$$

یا اینکه، می‌توانیم معادلهٔ مفروض را در $e^{h} = e^{-x}$ ضرب کنیم

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^{x}$$

وبا انتگرالگیری از طرفین معادله همان نتیجهٔ قبلی را به‌دست بیاوریم

$$y = e^{2x} + ce^{x} \quad \text{یعنی} \quad ye^{-x} = e^{x} + c$$

مثال ۲

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$xy' + y + 4 = 0$$

معادله را به‌صورت (۱) می‌نویسیم، یعنی

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}$$

از اینرو $f = 1/x$ ، $r = -4/x$ وبنابراین

$$h = \int dx = \ln|x|, \quad e^{h} = x \quad e^{-h} = \frac{1}{x}$$

از این رابطه و (۴) جواب عمومی به‌دست می‌آید

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\int x\left(-\frac{4}{x}\right)dx + c\right] = \frac{c}{x} - 4$$

واین همان جواب مثال ۱ بخش ۵.۱ است.

البته در حالات ساده‌ای نظیر مثال ۲ ومثالهای ۳ و ۵ (در زیر) می‌توان معادله را بدون‌استفاده از(۴) حل کرد. به‌عنوان‌نمونه درمثال۲ دانشجوممکن است معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $(xy')+4 = 0$ بنویسد وآنگاه جواب را با انتگرالگیری به‌دست بیاورد.

مثال ۳

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$xy'+y=\sin x$$

می‌توانیم معادله را به‌صورت

$$dx\,(xy)=\sin dx$$

بنویسیم و با انتگرالگیری از طرفین آن پیدا کنیم

$$xy=-\cos x+c \quad \text{یا} \quad y=\frac{۱}{x}(c-\cos x) .$$

حال چگونگی حل مسئلهٔ با مقدار اولیه را شرح می‌دهیم

مثال ۴

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y'+y\tan x=\sin ۲x, \qquad y(۰)=۱$$

در اینجا $f=\tan x$ ، $r=\sin ۲x+۲\sin x\cos x$ ، و

$$\int f\,dx=\int \tan x\,dx=\ln|\sec x|$$

با توجه به‌این می‌بینیم که در (۴)

$$e^{h}=\sec x \quad ، \quad e^{-h}=\cos x \quad ، \quad e^{h}r=۲\sin x$$

وجواب عمومی معادلهٔ مفروض عبارت است از

$$y(x)=\cos x\left[۲\int \sin x\,dx+c\right]=c\cos x-۲\cos^{۲}x$$

بنا به‌شرط اولیه به‌ازای $x=۰$ داریم $y=۱$ ، یعنی

$$۱=c-۲ \qquad \text{یا} \qquad c=۳$$

و جواب مسئلهٔ با مقدار اولیه داده شده عبارت است از

$$y=۳\cos x-۲\cos^{۲} x$$

مثال ۵

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$x^{۲}y'+۲xy-x+۱=۰, \quad y(۱)=۰$$

معادله را می‌توان به‌صورت $d(x^{۲}y)=(x-۱)dx$ نوشت. با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$y(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{x}+\frac{c}{x^۲} \quad \text{یا} \quad x^۲y=\frac{۱}{۲}x^۲-x+c$$

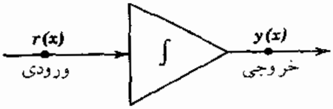
ازاین رابطه و شرط اولیه داریم $y(۱)=۱+c/۲=۰$ یا $c=۱/۲$. ازاینرو

$$y(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x^۲}$$

در بیشترمواقع جوابهای معادلات دیفرانسیل درکاربردهای مهندسی، توابع مقدماتی نیستند. مثلادررابطهٔ (۴) ممکن است انتگرال مقدماتی نباشد. هرگاه این انتگرال یك‌تابع موجود درجدول انتگرال نباشد[۱] می‌توانیم انتگرال را برحسب یك سری توانی بسط دهیم و جمله به جمله انتگرال بگیریم یا اینکه می‌توانیم از روش انتگرالگیری عددی (رجوع کنید به بخش ۶.۱۹) و یا روش عددی حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول (رجوع کنید به بخش ۷.۱۹) استفاده کنیم.

متغیر مستقل x در بسیاری از کاربردها معمولا زمان است؛ تابع $r(x)$ در سمت راست (۱) ممکن است نمایش دهندهٔ یك نیرو باشد و جواب $y(x)$ نمایش دهندهٔ یك جابجایی، یك جریان یا کمیت فیزیکی دیگری. در ریاضیات مهندسی $r(x)$ را در بیشتر مواقع **ورودی** و $y(x)$ را **خروجی** یا پاسخ به‌ورودی (و شرط اولیه) می‌نامند. مثلا، در مهندسی برق معادلهٔ دیفرانسیل می‌تواند ناظر بررفتار یك مدار الکتریکی باشد و خروجی $y(x)$ به‌عنوان حل آن معادله متناظر با ورودی $r(x)$ به‌دست می‌آید. در زمینهٔ کامپیوترهای قیاسی، دستگاه فیزیکی ممکن است یك عنصر انتگرالگیر باشد؛ در آن صورت معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با آن $y'=r(x)$ است و خروجی $y(x)$ متناظر با یك ورودی $r(x)$ و یك شرط اولیهٔ مشخص، مثلا $y(x_۰)=۰$، عبارت از انتگرال $r(x)$ است:

$$y(x)=\int_{x_۰}^{x} r(x^*)dx^*$$



شکل ۱۴. دیاگرام جعبه‌ای سادهٔ یك انتگرالگیر

دستگاه را می‌توان با یك «دیاگرام جعبه‌ای» نظیر شکل ۱۴ نشان داد. چنین دیاگرامی به‌جای آنکه جزئیات فیزیکی دستگاه را نشان دهد نمایانگر روابط تابعی است. دیاگرامهای

۱. جداولی که توابع مشخصی در آن محاسبه شده‌اند را می‌توان درکتاب بسیار مفید مرجع [A۶] ضمیمهٔ ۱ یافت.

جعبه‌ای پیچیده‌تر شامل دو جعبه یا بیشتر و روابط فی‌مابین آنهاست. در ملاحظات بعدی، نمونه‌های مختلفی ازاین دیاگرامها پیش خواهد آمد.

مسائل بخش ۱۰۷

۱. نشان دهید که $e^{-\ln x}=1/x$ (ولی نه مساوی $-x$) و $e^{-\ln(\operatorname{cosec} x)}=\sin x$.

۲. نشان دهید که انتخاب مقدار ثابت انتگرالگیری در $\int f dx$ [ر. ك. (۴)] مهم نیست (بنابراین می‌شود آن را صفر انتخاب کرد).

جوابهای عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۳. $y'-y=1-x$ ۴. $y'+y=1$

۵. $xy'+y=2x$ ۶. $y'+xy=2x$

۷. $y'-4y=2x-4x^2$ ۸. $y'+2y=\cos x$

۹. $y'+3y=e^{2x}+6$ ۱۰. $y'\tan x=y-1$

۱۱. $y'=2y/x+x^2e^x$ ۱۲. $(x^2-1)y'=xy-x$

۱۳. $xy'+2y=e^{x^2}$ ۱۴. $x^2y'+2xy=\sinh 3x$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۱۵. $y'-y=e^x,\ \ y(1)=0$

۱۶. $y'-y\cot x=2x-x^2\cot x,\ y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{4}\pi^2+1$

۱۷. $y'-(1+3x^{-1})y=x+2,\ \ y(1)=e-1$

۱۸. $y'-x^3y=-4x^3,\ \ y(0)=6$

ثابت کنید کــه معادلات دیفرانسیل خطی (۱) و (۲) دارای خواص مهم زیراندوبا مثالهایی آنهارا تشریح کنید. [درفصل بعد (بخشهای ۳۰۲ و ۹۰۲) خواهیم دیـد که معادلات دیفرانسیل خطی ازمرتبه‌های بالاتر دارای خواص مشابهی هستند. این مطلب بسیار حائزاهمیت است زیرا ما را قادر می‌سازد که از جوابهای داده شده جوابهای جدیدی را به‌دست بیاوریم.]

۱۹. معادلهٔ همگن (۲) دارای «جواب بدیهی» $y\equiv 0$ است.

۲۰. هرگاه y_1 جوابی برای (۲) باشدآنگاه $y=cy_1$ (c ثابت دلخواه) جوابی برای (۲) است.

۲۱. هرگاه y_1 و y_2 جوابهایی برای (۲) باشند آنگاه مجموع آنها $y=y_1+y_2$ جوابی برای (۲) است.

۲۲. هرگاه y_1 جوابی برای (۱) باشد آنگاه $y=cy_1$ جوابی برای $y'+fy=cr$ است.

۲۳. هرگاه y_1 جوابی برای (۱) و y_2 جوابی برای (۲) باشد آنگاه $y=y_1+y_2$ جوابی برای (۱) است.

۲۴. تفاضل دوجواب (۱)، $y=y_1-y_2$، جوابی برای (۲) است.

۲۵. هرگاه $f(x)$ و $r(x)$ در (۱) ثابت باشند، مثلاً، $f(x)=f_0$ و $r(x)=r_0$ نشان دهید روش تفکیك متغیرهـا از روش بیان شده در متن درس آسانتر است و به همان نتیجه، یعنی (۴)، منجر می‌شود.

۲۶. قانون نیوتن دربارهٔ سرد شدن به معادلـهٔ دیفرانسیل زیـر منجر می‌شود (ر. ك. بخش ۳.۱)

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_1)$$

کـه در آن $T(t)$ دمـای جسمی است کـه در محیطی با دمای ثابت T_1 قرار داده شده است. این معادله را با روشی که در این بخش بحث شد، با فرض آنکه دمای اولیهٔ جسم $T(0)\neq T_0$ باشد، حل کنید.

۲۷. (حرکت یك قایق) دو مرد رانندگی یك قایق موتوری را به عهده دارنـد. مجموع وزن‌آنها با قایق ۴۹۰۰ نیوتن‌است. فرض کنید نیروی‌ثابت موتور برابر ۲۰۰ نیوتن و مقاومت آب، R، بـا سرعت v متناسب باشد یعنی $R=kv$ که درآن $k=10$ $\mathrm{N\cdot s/m}$. با استفاده‌ازقانون دوم نیوتن (جرم × شتاب = نیرو) معادلهٔ دیفرانسیلی برای $v(t)$ بنویسید. $v(t)$ را طوری پیدا کنید که درشرط اولیهٔ $v(0)=0$ صدق کند. ماکزیمم‌سرعت v_∞ راکه قایق‌حرکت خواهدکرد پیدا کنید (عملا پس‌اززمانی به‌قدر کافی‌طولانی). هرگاه‌این قایق با سرعت صفربه حرکت‌درآید چه‌مدت طول می‌کشد تا به $0{,}9\,v_\infty$ برسد و دراین زمان چه مسافتی را می‌پیماید؟

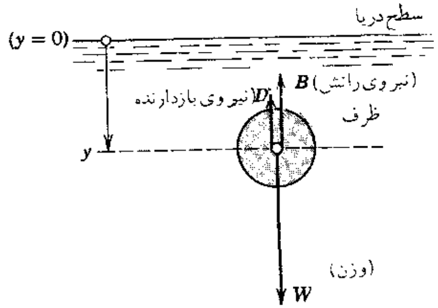
۲۸. (مقاومت هوا) وقتی جسم بزرگی به‌طرف پایین رها می‌شود نیروی مقاومتی از هوا (نیروی بازدارنده) به‌آن‌اثرمی‌کند. فرض می‌کنیم که مقداراین‌نیرو با تندی v متناسب باشد. با استفاده ازقانون دوم نیوتن نشان دهید که

$$m\dot{v}=-kv-mg$$

که درآن $\dot{v}=dv/dt$ و $g=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ شتاب ثقل درسطح زمین است. این معادله

را حل کنید (الف) با روش حاضر، (ب) با تفکیک متغیرها، با فرض آنکه $v(\circ)=v_\circ$.
(پ) با انتگرالگیری ازنتیجه، فاصلهٔ لحظهٔ t را از نقطهٔ آغازی $y_\circ=y(\circ)$، $y(t)$، را پیدا کنید.

۲۹. (دفع زباله‌های اتمی) کمیتهٔ انرژی اتمی، زباله‌های اتمی را در داخل ظرفهای سربسته‌ای قرار می‌دهد و آنها را به‌داخل اقیانوس می‌اندازد. مهم این‌است که وقتی ظرفها به ته اقیانوس می‌رسند شکسته نشوند. فرض کنید تا زمانی که این‌سرعت کمتر از ۱۲ m/s باشد چنین‌اتفاقی نیفتد. نشان دهید که قانون دوم نیوتن به‌معادلهٔ حرکت زیر منجر می‌شود (شکل ۱۵)



شکل ۱۵. سیستم و نیروهای مسئلهٔ ۲۹

$$m\frac{dv}{dt}=W-B-kv, \qquad v(\circ)=\circ$$

که در آن فرض شده است نیروی بازدارندهٔ $D=-kv$ با سرعت متناسب است. (تجربه این فرض را برای سرعتهایی که خیلی زیاد نباشند تأیید می‌کند.) با حل معادله، $v(t)$ را به دست بیاورید. با انتگرالگیری از آن $y(t)$ را چنان پیدا کنید که $y(\circ)=\circ$. زمانی‌بحرانی، t_c، که ظرف به‌سرعت بحرانی $v_c=۱۲\ \mathrm{m/s}$ می‌رسد را با فرض $W=۲۲۵۴\ \mathrm{N}$، $B=۲۰۹۰\ \mathrm{N}$ و $k=۰٫۶۳۷\ \mathrm{kg/s}$ حساب کنید. نشان دهید که اگر بسته‌ای را از نقطه‌ای که فاصلهٔ آن تا تـه اقیانوس تقریباً بیش از ۱۰۵ متر باشد رها کنیم خواهد شکست.

۳۰. درمسئلهٔ ۲۹ وقتی که $t\to\infty$ سرعت $v(t)$ به‌یك مقدار حدی میل می کند. چگونه می‌توان این حد را از روی معادلهٔ دیفرانسیل به دست آورد بدون آنکه عملا آن را حل کرد؟ اگر نیروی بازدارنده وجود نداشته باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

۸.۱ تغییر پارامترها

راه حل جالب دیگری برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$y' + f(x)y = r(x) \quad (۱)$$

وجود دارد. دیده‌ایم که یك جواب معادلهٔ همگن متناظر با آن عبارت است از

$$v(x) = e^{-\int f(x)dx} \quad (۲)$$

حال با استفاده ازاین تابع $v(x)$ تابعی مانند $u(x)$ را طوری تعیین می کنیم که

$$y(x) = u(x)v(x) \quad (۳)$$

جواب عمومی (۱) باشد. این‌فکر ازشکل‌جواب عمومی معادلهٔ همگن، $cv(x)$، القاء شده و چیزی نیست جز تعویض پارامتر c با متغیر $u(x)$. این روش را، که لاگرانژ[۱] بکار برد **روش‌تغییر پارامترها** می‌نامند. روش مزبور قابل تعمیم به‌معادلات ازمرتبه‌های بالاتر بوده و از اهمیت زیادی برخوردار است. مورد سادهٔ حاضر نمونه خوبی برای درك این روش است.

با جایگزینی (۳) در (۱) به‌دست می‌آوریم

$$u'v + u(v' + fv) = r$$

چون v جواب معادلهٔ همگن است این معادله به

$$u' = \frac{r}{v} \qquad \text{یا} \qquad u'v = r$$

تحویل می‌یابد. با انتگرالگیری داریم

$$u = \int \frac{r}{v}\, dx + c$$

بنابراین نتیجهٔ

$$y = uv = v\left(\int \frac{r}{v}\, dx + c\right) \quad (۴)$$

حاصل می‌شود و با توجه به (۲) می‌بینیم که این رابطه همانند (۴) بخش قبل است.

---

۱. ژوزف‌لوئی‌لاگرانژ (Joseph Louis Lagrange)، ۱۸۱۳-۱۷۳۶، ریاضیدان‌بزرگ فرانسوی، به مدت ۲۰ سال درآلمان زندگی‌کرد و سپس به پاریس عزیمت نمود. کارمهم‌اصلی او در زمینهٔ حساب‌تغییرها، مکانیك‌عمومی و سماوی، معادلات دیفرانسیل و جبر بود.

مثال ۱
با حل معادله زیر روش تغییر پارامترها را تشریح کنید

$$y'-\frac{۲y}{x}=x^{۲}\cos ۳x$$

معادله همگن عبارت است از $y'-۲y/x=۰$. یك جواب $x^{۲}$ است. از این‌رو باید $y=ux^{۲}$ و $y'=u'x^{۲}+۲ux$ را درمعادلهٔ داده شده قرار دهیم. به‌دست می‌آوریم:

$$u'x^{۲}+۲ux-۲ux=x^{۲}\cos ۳x,\quad u'=\cos ۳x,\quad u=\frac{۱}{۳}\sin ۳x+c$$

که بنابراین داریم

$$y=ux^{۲}=\left(\frac{۱}{۳}\sin ۳x+c\right)x^{۲}$$

خواننده ممکن است معادله را با استفاده از رابطهٔ (۴) بخش ۷.۱ حل نماید.

مسائل بخش ۸.۱

معادلات زیر را با روش تغییر پارامترها حل کنید.

۱. $y'+y=۲$

۲. $y'+۲y=x^{۲}$

۳. $y'-y=۳e^{x}$

۴. $(x+۴)y'+۳y=۳$

معادلات زیر را با درنظر گرفتن x به‌عنوان متغیر وابسته حل کنید.

۵. $(۲x+y^{۴})y'=y$

۶. $y'=\dfrac{۱}{\cos y-۲x}$

تحویل معادلات غیرخطی به‌صورت خطی. مسائل زیر روشن می‌نمایند که بعضی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول غیرخطی را می‌توان با تغییر متغیر وابستهٔ مناسبی به صورت خطی درآورد.

۷. **(معادلهٔ برنولی)** معادله دیفرانسیل

$$y'+f(x)y=g(x)y^{a}\qquad (a \text{ عددی حقیقی است})$$

را **معادلهٔ برنولی**[۱] نامند. به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ معادله خطی و در غیراین‌صورت

---

۱. یاکوب برنولی (Jacob Bernoulli)، ۱۶۵۴ــ۱۷۰۵، ریاضیدان سویسی، در نظریهٔ الاستیسیته و نظریهٔ احتمال منشأ اثر بود. روش حل معادلهٔ برنولی به‌وسیلهٔ لایبنیتز (Leibniz) درسال ۱۶۹۶ ارائه شد.

غیرخطی است. بگذارید $[y(x)]^{1-a}=u(x)$ و نشان دهید که معادله به صورت خطی زیر در می‌آید.

$$u'+(1-a)f(x)u=(1-a)g(x).$$

معادلات برنولی زیر را حل کنید.

۸. $y'+x^{-1}y=xy^2$ ۹. $y'+y=y^2$

۱۰. $3y'+y=(1-2x)y^4$ ۱۱. $y'=x^3y^2+xy$

با جایگزینی مناسب، معادلات زیر را به‌صورت خطی درآورید و آنها را حل کنید.

۱۲. $y'-1=e^{-y}\sin x$

۱۳. $2xyy'+(x-1)y^2=x^2e^x$ (قرار دهید $y^2=xz$)

۱۴. نشان دهید که تبدیل $x=\varphi(t)$ (که در آن φ دارای مشتقی پیوسته است) معادلهٔ (۱) را به یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی شامل y و dy/dt تبدیل می‌نماید.

۱۵. نشان دهید کـه تبدیل $y=a(x)u+b(x)$ که در آن $a\not\equiv 0$ و b مشتق‌پذیرند (۱) را به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌ای شامل u و du/dx تبدیل می‌نماید.

۱۶. نشان دهید که یك جمله از رابطهٔ (۴) از تابع سمت راست (۱) مستقل است و جملهٔ دیگر از یك شرط اولیهٔ مفروض.

۱۷. فرض کنید معادلهٔ f و r در (۱) پیوسته هستند. چرا می‌توان از (۴) نتیجه گرفت که یك مسئله با مقدار اولیه شامل (۱) و یك شرط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ دارای جوابی یکتاست؟

۱۸. هر گاه به‌ازای تمام مقادیر $x\geqslant 0$ ورودی r در $|r(x)|\leqslant M$ صدق کند، نشان دهید که جواب (خروجی) مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y'+y=r(x),\qquad y(0)=0$$

به‌ازای تمام مقادیر $x>0$ در $|y(x)|<M$ صدق می‌کند.

۱۹. (میدان راستا) نشان دهید که میدان راستای (۱) دارای خاصیت جالب زیر است. اجزاء خطی واقع برهر خط قائم $x=x_0$ تماماً از نقطهٔ زیر می گذرند

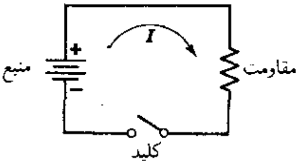
$$\xi=x_0+\frac{1}{f(x_0)}\quad,\quad \eta=\frac{r(x_0)}{f(x_0)}$$

۲۰. با به‌کار بردن نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۹ یك منحنی جواب تقریبی برای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $y'=2xy+1,\ y(1)=1$ پیدا کنید.

۹.۱ مدارهای الکتریکی

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی کاربردهای متعددی در فیزیک ومهندسی دارند. برای تشریح این مطلب، چند مثال استاندهٔ مربوط به مدارهای الکتریکی را ذکرمی‌کنیم. اینها ونمونه‌های مشابه حائز اهمیت بسیارند زیرا به همهٔ دانشجویان کمك می کنندتا چگونگی ایجاد **مدل** را بیاموزند یعنی وضعیت فیزیکی را درقالب ریاضی بیان کنند. گذر از سیستم فیزیکی به‌مدل‌ریاضی متناظرش درریاضیات مهندسی همیشه اولین مرحله است واین‌مرحلهٔ مهم نیاز به تجربه وممارست دارد که‌آن راهم با بررسی مثالهای نوعی درزمینه‌های مختلف می‌توان به‌دست آورد.

ساده‌ترین مدار الکتریکی یك‌مدار سری است که درآن یك منبع انرژی الکتریکی (نیروی محرکه الکتریکی) مانند یك مولد یا باطری ویك مقاومت، که مصرف‌کنندهٔ انرژی است، مانند یك لامپ قرار دارد (شکل ۱۶). اگر کلید را ببندیم جریان I از مقاومت



شکل ۱۶. مدار

عبور می‌کند و سبب افت ولتاژ می‌شود، یعنی، پتانسیل الکتریکی در دو انتهای مقاومت تفاوت خواهدکرد. این اختلاف پتانسیل یا افت ولتاژ را می‌توان با ولتمتر اندازه گرفت. تجربه نشان می‌دهد که قانون زیر برقرار است.

افت ولتاژ E_R درطول یك مقاومت با شدت جریان لحظه‌ای متناسب است، یعنی

$$E_R = RI \qquad \text{(قانون اهم)} \qquad (۱)$$

کــه در آن ثابت متناسب، R، **مقاومت** مصرف‌کننده نامیده می‌شود. شدت جریان، I، برحسب آمپر، مقاومت R، برحسب‌اهم وولتاژ E_R برحسب ولت اندازه گیری‌می‌شوند[۱].

۱. این واحدها و واحدهای بعدی از روی این اسامی نامگذاری شده: آندره ماری آمپر (André Marie Empere)، ۱۷۷۵–۱۸۳۶، فیزیکدان فرانسوی؛ ژرژ سیمون اهم (Georg Simon Ohm)، ۱۷۸۹–۱۸۵۴، فیزیکدان آلمانی؛ آلکساندر ولتا (Allessandro Volta)، ۱۷۴۵-۱۸۲۷، فیزیکدان ایتالیایی؛ ژوزف هانری (Joseph Henry)، ۱۷۹۷–۱۸۷۸، فیزیکدان آمریکایی؛ مایکل فارادی (Michael Faraday)، ۱۷۹۱–۱۸۶۷، فیزیکدان انگلیسی و چارلز آگوستین دو کولن (Charles Augustin de Coulomb) ۱۷۳۶–۱۸۰۶، فیزیکدان فرانسوی.

دوعنصرمهم دیگردرمدارهای پیچیده‌ترعبارت‌است از القاءکننده وخازن. القاءکننده با تغییر شدت جریان مخالفت نموده ودارای یك اثر لختی در الکتریسیته شبیه لختی جرم درمکانیك است؛ این شباهت را بعداً بررسی خواهیم کرد (بخش ۱۴.۲). آزمایش قانون زیر را نتیجه می‌دهد.

افت ولتاژ E_L در طول یك القاء کننده با میزان تغییرات شدت جریان لحظه‌ای I نسبت به زمان متناسب است، یعنی

$$E_L = L\frac{dI}{dt} \qquad (۲)$$

که‌درآن ثابت‌تناسب L را **ضریب القایی** القاء کننده می‌نامندوبرحسب هانری‌اندازه گیری می‌شود؛ زمان t برحسب ثانیه است.

خازن عنصری است که انرژی ذخیره می‌کند. نتیجهٔ آزمایش در این باره قانون زیر است:

افت ولتاژ دریك خازن، E_c، با بار الکتریکی لحظه‌ای در آن، Q، متناسب است، یعنی

$$E_c = \frac{1}{c}Q \qquad (۳^*)$$

که درآن c **ظرفیت** نام دارد و برحسب فاراد اندازه گیری می‌شود؛ بار Q باکولن اندازه گیری می‌شود. چون

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \qquad (۳')$$

می‌توان نوشت

$$E_c = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} I(t^*)dt^* \qquad (۳)$$

شدت جریان $I(t)$ یك مدار را می‌توان با حل معادلهٔ (یا معادلات) منتج ازکاربرد قانون فیزیکی زیر معین نمود.

قانون ولتاژکیرشهف (KVL)[1]

مجموع جبری افت ولتاژهای لحظه‌ای درطول یك مدار بسته صفر است، یا ولتاژ مؤثر دریك مدار بسته با مجموع افت ولتاژهای تمام مدار برابر است.

---

۱. گوستاو روبرت کیرشهف (Gustav Robert Kirchhoff)، ۱۸۲۴–۱۸۸۷، فیزیکدان آلمانی. بعدها به‌قانون جریان کیرشهف KCL نیز احتیاج پیدا خواهیم کرد:
درهرنقطه ازیك‌مدار، مجموع جریانهایی که‌به‌آن نقطه می‌رسند برابر با مجموع‌جریانهایی است‌که از آن نقطه خارج می‌شوند.

مثال ۱. مدار RL

برای «مدار RL» شکل ۱۷ بنا بـه قانون ولتاژ کیرشهف و روابط (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t) \qquad (۴)$$

حالت الف (نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت). هرگاه ثابت $= E_{\circ}$ ،$E = E_{\circ}$ آنگاه رابطهٔ (۴) بخش ۷.۱ جواب عمومی زیر را نتیجه می‌دهد.

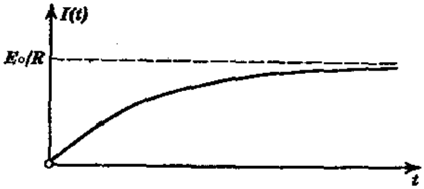
$$I(t)=e^{-\alpha t}\left[\frac{E_{\circ}}{L}\int e^{\alpha t}dt+c\right] \qquad (\alpha=R/L)$$

$$=\frac{E_{\circ}}{R}+ce^{-(R/L)t} \qquad (۵)$$

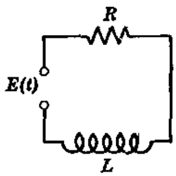
چنانچه t به سمت بینهایت میل کند جملهٔ آخر به سمت صفر میل می‌کند و بنابراین $I(t)$ به‌سمت $E_{\circ}/R$ میل می‌کند؛ پس‌از زمان به‌قدرکافی طولانی جریان I عملا مقداری‌ثابت خواهد بود ومقدار آن مستقل از C واز اینرو مستقل ازشرط اولیه‌ای است که ممکن‌است بخواهیم اعمال نماییم. جواب خصوصی متناظر با شرط اولیهٔ $I(\circ)=\circ$ عبارت است از (شکل ۱۸)

$$I(t)=\frac{E_{\circ}}{R}(1-e^{-(R/L)t})=\frac{E_{\circ}}{R}(1-e^{-t/\tau_L}) \qquad (۵^*)$$

کـه در آن $\tau_L=L/R$ **ثابت زمانی القایی** مدار نامیده می‌شود (بـه مسائل ۵ و ۷ رجوع کنید)



شکل ۱۸. جریان حاصل از یك نیروی محرکه الکتریکی ثابت دریك مدار RL



شکل ۱۷. مدار RL

حالت ب (نیروی محرکه الکتریکی دوره‌ای). هرگـاه $E(t)=E_{\circ}\sin\omega t$ ، آنگاه بنابر رابطهٔ (۴) بخش ۷.۱ جواب عمومی (۴) در اینجا عبارت است از

$$I(t)=e^{-\alpha t}\left[\frac{E_\circ}{L}\int e^{\alpha t}\sin\omega t dt+c\right] \qquad (\alpha=R/L)$$

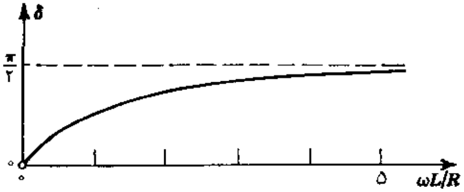
با انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌شود

$$I(t)=ce^{-(R/L)t}+\frac{E_\circ}{R^۲+\omega^۲L^۲}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [به (۱۴) ضمیمهٔ ۳ مراجعه کنید]

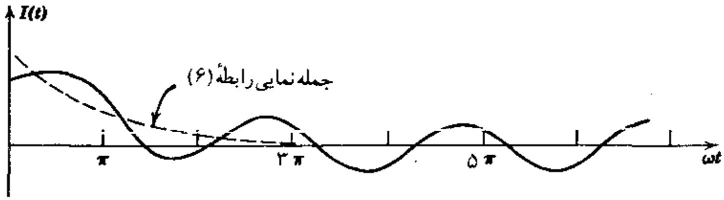
$$I(t)=ce^{-(R/L)t}+\frac{E_\circ}{\sqrt{R^۲+\omega^۲L^۲}}\sin(\omega t-\delta),\quad \delta=\arctan\frac{\omega L}{R} \qquad (۶)$$

وقتی t به‌سمت بینهایت میل کند $e^{-(R/L)t}$ به‌سمت صفرمیل می کند. این بدان معنی است که پس اززمان به قدرکافی طولانی شدت جریان $I(t)$ عملا به صورت نوسان همسازاست (به‌شکل ۲۰ مراجعه شود). شکل ۱۹ زاویهٔ فاز δ را به صورت تابعی از $\omega L/R$ نشان می‌دهد. هرگاه $L=\circ$ آنگاه $\delta=\circ$ ونوسان $I(t)$ با $E(t)$ همفاز است.



شکل ۱۹. زاویهٔ فاز δ دررابطهٔ (۶) به صورت تابعی از $\omega L/R$

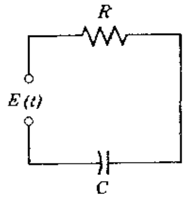
یك سیستم الکتریکی (یا دینامیکی) وقتی **در حالت مانا** گفته می‌شود که متغیرهای بیان کنندهٔ رفتارش توابعی دوره‌ای نسبت به‌زمان ویا ثابت باشند ودرصورتی که درحالت



شکل ۲۰. شدت جریان حاصل از یك نیروی محرکهٔ الکتریکی نظیر (۶) دریك مدار RL $(\delta=\pi/۴)$

مانا نباشد آن را در **حالت گذرا** (یا حالت غیرمانا) می‌نامند. متغیرهای متناظر آنها به‌ترتیب توابع حالت مانا و توابع حالت گذرا نامیده می‌شوند.

درمثال ۱، حالت الف، تابع E_0/R تابع حالت مانا یا **جواب حالت مانای (۴)** در حالت ب جواب حالت مانا به وسیلهٔ جملهٔ آخر رابطهٔ (۶) نموده شده است. قبل از اینکه مدار (عملا) به حالت مانا برسد در حالت گذرا است. واضح است که یك چنین دورهٔ موقت یا دورهٔ عدم تعادل به‌علت ذخیرهٔ انرژی در القاء کننده‌ها و خازنها ظاهر می‌شود و جریانهای متناظر در القاءکننده و ولتاژهای خازن نمی‌توانند آناً تغییر نمایند. وضعیتهای مشابهی برای سیستمهای متنوع فیزیکی پیش می‌آید. مثلا، هر گاه یك گیرندهٔ رادیویی که دارای لامپ خلأ حرارتی است روشن شود، برای آنکه لامپ از وضعیت «سرد» به «گرم» تبدیل شود یك فاصلهٔ زمانی لازم است. عملا، حالت گذرای سیستم حاضر فقط برای زمان کوتاهی طول خواهد کشید.



شکل ۰۲۱ مدار RC

مثال ۲. مدار RC

با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف وروابط (۱) و (۳) درمورد مدار RC شکل ۲۱ معادلهٔ

$$RI+\frac{1}{C}\int I\,dt=E(t) \tag{۷}$$

را به‌دست می‌آوریم. برای رهایی از انتگرال از رابطهٔ فوق نسبت به t مشتق می‌گیریم و پیدا می‌کنیم

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt} \tag{۸}$$

بنابر (۴) بخش ۷۰۱ این معادلهٔ دیفرانسیل دارای جواب عمومی زیر است

$$I(t)=e^{-t/RC}\left(\frac{1}{R}\int e^{t/RC}\frac{dE}{dt}\,dt+C\right) \tag{۹}$$

حالت الف (نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت). هرگاه E ثابت باشد آنگاه $\frac{dE}{dt}=0$ و (۹) به‌شکل ساده زیر درمی‌آید (شکل ۲۲) .

$$I(t)=ce^{-t/RC}=ce^{-t/\tau_c} \qquad (10)$$

که درآن $\tau_c=RC$ ثابت خازنی مدار نامیده می‌شود.

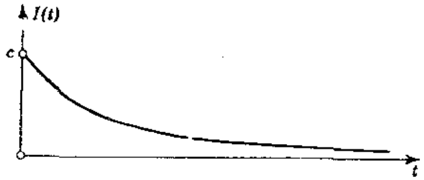
حالت ب (نیروی محرکهٔ الکتریکی سینوسی). هرگاه $E(t)=E_0 \sin \omega t$ آنگاه

$$\frac{dE}{dt}=\omega E_0 \cos \omega t.$$

با قرار دادن این مقدار در (۹) وانتگرالگیری جزء به‌جزء پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} I(t) &= ce^{-t/RC}+\frac{\omega E_0 C}{1+(\omega RC)^2}(\cos \omega t+\omega RC \sin \omega t) \\ &= ce^{-t/RC}+\frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t-\delta) \end{aligned} \qquad (11)$$

که درآن $\tan \delta = -\frac{1}{\omega RC}$. با افزایش t جملهٔ اول به‌طور دائم کاهش می‌یابدو آخرین جمله‌جریان حالت‌مانا را، که سینوسی‌است، نشان می‌دهد. نمودار منحنی $I(t)$ شبیه‌نمودار شکل ۲۰ است.



شکل ۲۲. شدت‌جریان حاصل ازیك نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت دریك‌مدار RC

مدارهای مفصلتروقیاس بین نوسانات مکانیکی والکتریکی دربحث معادلات‌دیفرانسیل مرتبهٔ دوم دربخش ۱۴۰۲ بررسی خواهد شد.

این مدارهای پیچیده‌تر را، به دلیل داشتن مقاومت ، القاءکننده و خازن ، مدارهای RLC خواهیم نامید. مدل ریاضی این مدارها معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دومی است که از

قانون کیرشهف به‌دست می‌آید.

شبکه‌های الکتریکی دربخشهای ۱.۳، ۷.۵، ۵.۷ و ۱۱.۷ بررسی خواهند شد.

مسائل بخش ۹.۱

۱. رابطهٔ (۵) را به‌دست بیاورید وآن را امتحان کنید.

۲. دررابطهٔ (۵) وقتی $t \to \infty$ جواب به‌سمت E_0/R میل می‌کند. آیا می‌توان این را از (۴)، بدون حل کردن آن وبا فرض $E(t)=E_0$، نتیجه گرفت؟

۳. رابطهٔ (۶) را به‌دست بیاورید وآن را امتحان کنید.

۴. جواب حالت مانای (۶) را با قرار دادن $I_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ در (۴) وبا فرض $E(t)=E_0\sin\omega t$ استنتاج کنید وبا مساوی قرار دادن جملات سینوسی وکسینوسی درمعادلهٔ حاصل مقادیر A و B را معین کنید. (توجه کنید که دراین شیوه به‌انتگرالگیری جزء به جزء نیازی نیست.)

۵. نشان دهید که ثابت زمانی القائی $\tau_L = L/R$ عبارت از زمان t لازم برای رسیدن شدت جریان (*۵) به حدود ۶۳٪ مقدارنهاییش می‌باشد. زمانی راکه شدت جریان بـه حـدود ۹۹٪ مقدار نهاییش می‌رسد پیدا کنید، فرض کنید هـانری $L=۱$ و اهم $R=۵۰۰$ باشد.

۶. در مثال ۱، حالت الف، فرض کنید اهم $R=۲۰$، میلی هاری $L=۰٫۰۳$ و $I(۰)=۰$. زمانی را پیداکنیدکه شدت جریان به ۹۹٫۹٪ مقدارنهاییش می‌رسد.

۷. در مثال ۱، حـالت الف، فرض کنیا اهم $R=۱۰۰$، هانـری $L=۲٫۵$، ولت $E_0=۱۱۰$ و $I(۰)=۰$. ثابت زمانی وزمان لازم برای آنکه شدت‌جریان از صفر به ۰٫۶ آمپر برسد را پیداکنید.

۸. هرگاه هانری $L=۱۰$ باشد چه مقاومتی لازم است تا (*۵) درمدت ۱ ثانیه بـه ۹۹٪ مقدار نهاییش برسد؟

۹. تحت چه شرط اولیه‌ای (۶) منجربه جواب حالت مانا می‌شود؟

۱۰. جواب خصوصی (۶) را طوری بـه دست بیاوریدکـه در شرط اولیهٔ $I(۰)=۰$ صدق کند.

۱۱. تحقیق کنیدکه با فرض $E=E_0\sin\omega t$ رابطهٔ (۱۱) جوابی برای (۸) است.

۱۲. (خالی شدن خازن). نشان دهیدکه (۷) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$$

این معادله را بـا فرض $E(t)=۰$ و $Q(۰)=Q_0$ حل کنید. زمانی را پیداکنید که ۹۹٪ بار اولیهٔ خازن تخلیه می‌شود.

۱۳. جواب عمومی معادلهٔ

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}\,Q=E(t)$$

را به‌صورت یك انتگرال بنویسید و با مشتقگیری از آن و سپس انتگرالگیری جزء به جزء دستور (۹) را اشباع کنید.

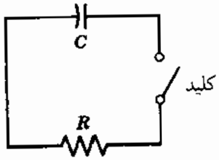
۱۴. در مسئلهٔ ۱۳ فرض کنید $R=20$ اهم، $C=0.01$ فاراد و $E(t)$ به صورت تلاشی نمایی، ولت $E(t)=60e^{-2t}$ باشد. با فرض $Q(0)=0$ معادلهٔ $Q(t)$ را پیدا کنید و نمودار آن را رسم نمائید. همچنین زمانی را که $Q(t)$ ماکزیمم می‌شود و این مقدار ماکزیمم را معین کنید.

۱۵. یك خازن (فاراد $C=0.01$) با یك مقاومت (اهم $R=200$) به‌طور متوالی وصل شده و با ولتاژ (ولت $E_0=12$) پـر شده است؛ شکل ۲۱ را با فرض $E(t)=E_0$ ببینید. اگر درلحظهٔ $t=0$ خازن کاملا خالی باشد ولتاژ $V(t)$ خازن را پیدا کنید.

۱۶. جریان $I(t)$ درمدار RC شکل ۲۱ را با داده‌های زیر حساب کنید. ولت $E=100$، فاراد $C=0.25$، مقاومت R متغیری است که به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 100$ ثانیه برحسب اهم به‌صورت $R=(100-t)$ و به‌ازای $t>100$ ثانیه برابر $R=0$ است و آمپر $I(0)=1$.

۱۷. جواب خصوصی (۱۱) را طوری پیدا کنید که درشرط اولیهٔ $I(0)=0$ صدق کند.

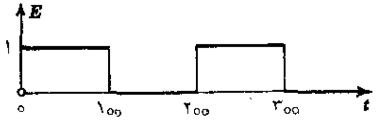
۱۸. درشکل ۲۳ فرض کنید فاراد $C=0.1$، اهم $R=100$ و بار اولیهٔ خازن ۲ کولن باشد. درلحظهٔ $t=0$ کلید را می‌بندیم و خازن شروع به‌تخلیه شدن می‌نماید. جریان $I(t)$، بار $Q(t)$ و ولتاژ $V(t)$ خازن را پیدا کنید.



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. درکاربردها با نیروهای محرکه‌ای که صرفاً بـه صورت سینوسی یا کسینوسی نیستند بکرات بـرخورد می‌کنیم. نمونه‌ای در شکل ۲۴ نشان داده شده است کـه در آن ناپیوستگیها (جهشها) معرف تقریبهای ریاضی مناسبی برای تغییرات ناگهانی $E(t)$ از صفر بـه ۱ و بالعکس هستند. فرض کنید این $E(t)$ به‌یك مدار RL که در آن

اهم $R=1$ و هانری $L=100$ است اعمال شود. با فرض $I(0)=0$، جریان $I(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. این نکته قابل توجه است که متناوب بودن ورودی موجب تناوبی شدن خروجی نمی‌شود زیرا در حالت کلی یك حالت گذرا خواهد بود. اما استثناهای آشکاری وجود دارد. برای تشریح این مطلب نشان دهید که به ازای تمام مقادیر $t \geqslant 0$ جریان $I(t)$ مسئلهٔ ۱۹ دررابطهٔ $I(t+200)=I(t)$ صدق می‌کند اگروتنها اگر شرط اولیهٔ $I(0)=(e-1)/(e^2-1)$ را انتخاب کنیم.

۱۰.۱ خانوادهٔ منحنیها. مسیرهای متعامد

هرگاه به‌ازای هرمقدار حقیقی مشخص c معادلهٔ

$$F(x, y, c)=0 \qquad (1)$$

منحنی‌ای را درصفحهٔ xy نشان دهد و اگر برای متغیر c بینهایت منحنی را نمایش دهد دراین‌صورت کل این‌منحنیها را **خانوادهٔ منحنیهای یك پارامتری** و c را پارامترخانواده می‌نامند.

مثال ۱

معادلهٔ

$$F(x, y, c)=x+y+c=0 \qquad (2)$$

یك گروه از خطوط راست موازی را نمایش می‌دهد؛ هرخط فقط با یك مقدار c متناظر است. معادلهٔ

$$F(x, y, c)=x^2+y^2-c^2=0 \qquad (3)$$

نمایش دهندهٔ یك خانواده از دوایر متحدالمرکز به شعاع c است که مرکز آن در مبدأ مختصات واقع است.

جواب عمومی یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول شامل یك پارامتر c است واز این‌رو

یك خانوادهٔ منحنی را نمایش می‌دهد. این موضوع امکان نمایش دادن تعداد زیادی از خانوادهٔ منحنیهای یك پارامتر را به وسیلهٔ چنین معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهد. استفادهٔ عملی از چنین نمایشهایی دربررسیهای بعدی روشن خواهد شد.

مثال ۲

با مشتقگیری از (۲) می‌بینیم که

$$y' + ۱ = ۰$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل ازآن خانوادهٔ خطوط مستقیم است. به‌همین ترتیب معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ (۳) عبارت است از

$$y' = -x/y$$

هرگاه معادلهٔ حاصل ازمشتقگیری (۱) نیز شامل c باشد مجبوریم c را با استفاده ازرابطهٔ (۱) حذف کنیم

مثال ۳

معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ سهمیهای

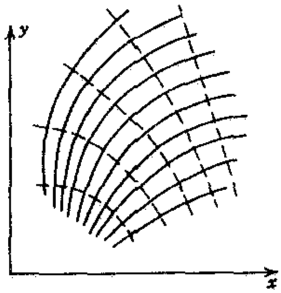
$$y = cx^۲ \qquad (۴)$$

با مشتقگیری از (۴)،

$$y' = ۲cx, \qquad (۵)$$

وبا حذف c از (۵) به‌دست می‌آید. از (۴) داریم $c = \frac{y}{x^۲}$ وبا قرار دادن این مقدار در (۵) نتیجهٔ مطلوب را پیدا می‌کنیم

$$y' = \frac{۲y}{x}$$



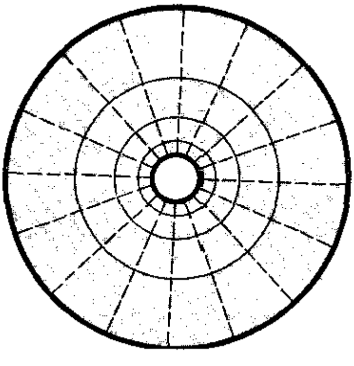
شکل ۲۵. چند منحنی ومسیرهای متعامد آنها

توجه کنید که به طریق زیر نیز می‌توان عمل نمود. با حل (۴) نسبت به c داریم $c=y/x^{2}$ و با مشتقگیری از این معادله نسبت به x مقدار y' همانند سابق به‌دست می‌آید

$$\frac{y'}{x^{2}}-\frac{2y}{x^{3}}=0 \quad \text{بنابراین} \quad y'=\frac{2y}{x}.$$

در بسیاری از کاربردهای مهندسی یك خانواده از منحنیها داده می‌شود و خانوادهٔ دیگری خواسته می‌شود که منحنیهایش هریك ازمنحنیهای داده شده را با زاویهٔ قائمه قطع کنند[1]. دراین صورت منحنیهای دوخانواده را دوبدو متعامد نامند، این دو خانواده تشکیل یك شبکهٔ متعامد می‌دهند؛ ومنحنیهای خانواده‌ای که بایدبه‌دست بیایند را **مسیرهای متعامد** منحنیهای داده شده (و بالعکس) می گویند؛ ر. ك. شکل ۲۵.

حال به ذکر چند مثال ملموس می‌پردازیم. نصف‌النهارها در سطح زمین مسیرهای متعامد مدارها هستند. روی یك نقشهٔ جغرافیا منحنیهای تندترین شیب عبارت‌اند از مسیرهای متعامد خطوط مرزی. در الکترو استاتیك خطوط همپتانسیل و خطوط قوای الکتریکی مسیرهای متعامد یکدیگراند. یك مثال مصور درشکل ۲۶ نشان داده شده است. بعداً خواهیم دید که مسیرهای متعامد نقش‌مهمی را در زمینه‌های مختلف فیزیك نظیردینامیك سیالات وهدایت گرمائی ایفا می کنند.



شکل ۲۶. خطوط همپتانسیل و خطوط قوای الکتریکی (خط چین) مابین دو استوانهٔ متحدالمرکز

برای خانوادهٔ مفروض $F(x, y, c)=0$ که می‌توان آن را به صورت معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'=f(x, y) \tag{۷}$$

1. یادآور می‌شویم که زاویهٔ تقاطع دومنحنی طبق تعریف، زاویهٔ بین مماسهای وارد برمنحنیها درنقطهٔ تقاطع است.

نمایش داد، مسیرهای متعامد متناظر را به‌طریق‌زیر پیدا می‌کنیم. از (۷) می‌بینیم که منحنی‌ای از خانوادهٔ مفروض که از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ بگذرد دارای شیبی برابر $f(x_\circ, y_\circ)$ در آن نقطه است. شیب مسیر متعامد مار بر $(x_\circ, y_\circ)$ دراین نقطه باید منهای عکس $f(x_\circ, y_\circ)$، یعنی $-۱/f(x_\circ, y_\circ)$، باشد زیرا این شرط عمود بودن مماسهای دو منحنی در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ است. درنتیجه معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$y' = -\frac{۱}{f(x, y)} \qquad (۸)$$

و با حل این معادله مسیرها به‌دست می‌آیند.

می‌توان نشان داد که تحت شرایطی نسبتاً کلی خانوادهٔ منحنیها مسیرهای متعامد دارد اما این موضوع را دراینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم.

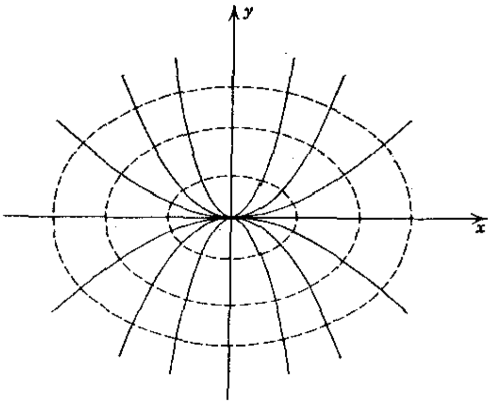
مثال ۴. مسیرهای متعامد

مسیرهای متعامد سهمیهای مثال ۳ را پیدا کنید. از (۶) می‌بینیم که معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$y' = -\frac{۱}{۲y/x} = -\frac{x}{۲y}$$

با تفکیک متغیرها درمی‌یابیم که مسیرهای متعامد بیضیهای زیر هستند (شکل ۲۷)

$$\frac{x^۲}{۲} + y^۲ = c^*$$



شکل ۲۷. چند سهمی و مسیرهای متعامد آنها درمثال ۴

مثال ۵. مسیرهای متعامد

مسیرهای متعامد دوایر زیر را پیدا کنید

$$x^۲+(y-c)^۲=c^۲ \tag{۹}$$

نخست معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ داده شده را مشخص می‌کنیم. با مشتق‌گیری نسبت به x از (۹) به‌دست می‌آوریم

$$۲x+۲(y-c)y'=۰ \tag{۱۰}$$

c را باید حذف کنیم. از رابطهٔ (۹) داریم

$$c=\frac{x^۲+y^۲}{۲y}$$

با قرار دادن این مقدار در (۱۰) و ساده نمودن نتیجه می‌گیریم که

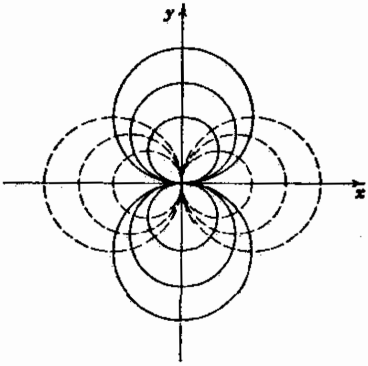
$$x+\frac{y^۲-x^۲}{۲y}y'=۰ \quad \text{یا} \quad y'=\frac{۲xy}{x^۲-y^۲}.$$

با توجه به این رابطه و رابطهٔ (۸) می‌بینیم کــه معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$y'=-\frac{x^۲-y^۲}{۲xy} \quad \text{یا} \quad ۲xyy'-y^۲+x^۲=۰$$

مسیرهای متعامدی که ازحل این‌معادله به‌دست می‌آیند (به مثال۱ بخش ۴.۱ رجوع کنید) دوایرزیرهستند (شکل ۲۸).

$$(x-c)^۲+y^۲=c^۲$$



شکل ۲۸. چند دایره و مسیرهای متعامد آنها (خط چین) درمثال ۵

مسائل بخش ۱۰.۱

معادلات زیر معرف چه خانواده منحنیهایی هستند؟ بعضی از این منحنیها را به طور ساده رسم کنید

۱. $3y-x+c=0$ ۲. $(x-c)^2+y^2=1$

۳. $xy=c$ ۴. $cx^2+y^2=1$

۵. $y+2(x-c)^2=0$ ۶. $y^2-(x-c)^3=0$

خانوادهٔ منحنیهای زیررا بهصورت (۱) نمایش دهید. بعضی ازاین منحنیها را بهطورساده رسم کنید.

۷. تمام خطوط راست غیرمتعامدی که ازنقطه (۱ — ,۴) می گذرند.

۸. زنجیریهایی که از انتقال زنجیری $y=\cosh x$ در امتداد خط مستقیم $y=-x$ بهدست می آیند.

۹. تمام بیضیهای با کانونهای ۱ + و ۱ — واقع برمحور y ها.

خانوادهٔ منحنیهای زیر را با معادلات دیفرانسیل نشان دهید.

۱۰. $xy=c$ ۱۱. $y=cx^3$ ۱۲. $y=e^{cx}$

۱۳. $y=ce^x$ ۱۴. $y=\sin cx$ ۱۵. $c^2x^2+y^2=c^2$

با استفاده ازمعادلات دیفرانسیل مسیرهای متعامد منحنیهای زیر را پیدا کنید. نمودار بعضی ازمنحنیها و مسیرهای مربوطه را رسم کنید.

۱۶. $y=2x+c$ ۱۷. $y=-\frac{1}{2}x^2+c$ ۱۸. $y=\ln|x|+c$

۱۹. $y=cx^3$ ۲۰. $xy=c$ ۲۱. $y=ce^x$

۲۲. $x^2+2y^2=c$ ۲۳. $y^2-x^2=c$ ۲۴. $y=c\sqrt{x}$

۲۵. $y=ce^{x^2}$ ۲۶. $y=ce^{-x^2}$ ۲۷. $y=cx^{3/2}$

مسیرهای متعامد منحنیهای زیر را پیدا کنید. (دراینجا n یك عدد صحیح مثبت است.)

۲۸. $x^2+ny^2=c$ ۲۹. $e^x \sin y=c$ ۳۰. $x^2+y^2=cx$

۳۱. نشان دهید که (۸) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dx}{dy}=-f(x, y)$$

با استفاده از این نتیجه، مسیرهای متعامد منحنیهای $y=\sqrt{x+c}$ را پیدا کنید.

۳۲. نشان دهید که مسیرهای متعامد خانوادهٔ مفروض $g(x, y)=c$ را می‌توان از معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست آورد

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial x}$$

با استفاده از این معادله، مسیرهای متعامد منحنیهای $ye^{2x}=c$ را پیدا کنید.

۳۳. نشان دهید که هرگاه، $u(x, y)=c=$ ثابت معرف یك خانواده منحنی باشد آنگاه نمایشی از مسیرهای متعامد آن، به شکل $v(x, y)=c^*=$ ثابت، را می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

(این معادلات که اصطلاحاً معادلات کشی ــ ریمان* نامیده می‌شوند در آنالیز مختلط جنبهٔ اساسی دارند و درفصل ۱۲ بررسی خواهند شد.)

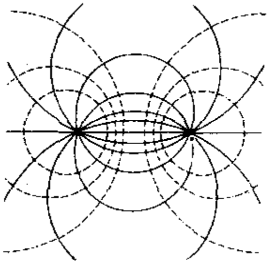
۳۴. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۳، مسیرهای متعامد منحنیهای $e^x\cos y=c$ را پیدا کنید.

۳۵. **(میدان الکتریکی)** هرگاه از سیمی که در امتداد محور z ها قرار دارد جریان الکتریکی بگذرد خطوط نیروی الکتریکی حاصل در صفحهٔ xy خطوط مستقیم $y=cx$ هستند و خطوط همپتانسیل مسیرهای متعامداند. معادلهٔ دیفرانسیل این‌مسیرها را پیدا کنید و آن را حل نمایید.

۳۶. تجربه نشان می‌دهد که خطوط نیروی الکتریکی دوبار مساوی و مخالف واقع درنقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ دوایری هستند که ازنقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ می گذرند. نشان دهید که این دوایر را می‌توان به صورت $x^2+(y-c)^2=1+c^2$ نمایش داد. نشان دهید که خطوط همپتانسیل (مسیرهای متعامد) عبارت از دوایر $(x+c^*)^2+y^2=c^{*2}-1$ هستند که در شکل ۲۹ به صورت خطچین نشان داده شده‌اند.

---

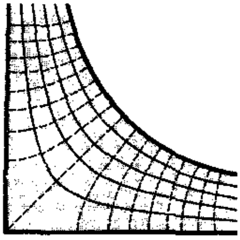
* Cauchy-Riemann



شکل ۲۹. میدان الکتریکی، مسئلهٔ ۳۶

۳۷. از نقاط همپتانسیل مسئلهٔ ۳۶ شروع نموده و با استفاده از روشی که در این بخش بحث شد خطوط نیروی الکتریکی را دوباره به‌دست بیاورید.

۳۸. (میدان دما) منحنیهای دمای ثابت، ثابت $= T(x, y)$، در میدان دما را همدما می‌نامند. مسیرهای متعامد آنها منحنیهایی هستند که در طول آنها گرما جریان می‌یابد (در نواحی‌ای که فاقد چشمه یا چاهك گرمایی هستند و از محیطی همگن تشکیل شده باشند). هرگاه منحنیهای همدما به صورت $y^2+2xy-x^2=c$ فرض شوند منحنیهای جریان گرمایی چه هستند؟



شکل ۳۰. جریان اطراف گوشه درمسئلهٔ ۳۹

۳۹. (جریان سیالی) زمینهٔ دیگری که در آن مسیرهای متعامد نقشی ایفا می‌کنند جریان سیالی است. دراینجا مسیر یك ذره از سیال را خط جریان و مسیرهای متعامد خطوط جریان را خطوط همپتانسیل نامند (به دلایلی که در زمینهٔ دیگری در بخش ۲.۱۸ بحث‌شده‌اند). فرض کنید که خطوط جریان $xy=c$ باشند. نشان دهید که دیوارهای کانال شکل ۳۰ خطوط جریان هستند بگونه‌ای که جریان را می‌شود همانند جریانی

در اطراف گوشه در نظر گرفت. خطوط همپتانسیل را پیدا کنید و نمودار آنها را رسم نمایید.

۴۰. مسیرهای همزاویهٔ خانوادهٔ مفروضی ازمنحنیها عبارت ازمنحنیهایی هستند که منحنیهای مفروض را با زاویهٔ ثابت θ قطع کنند. نشان دهید که در هر نقطه ضریب زاویه‌های m_1 و m_2 مماسهای وارد برمنحنیهای متناظر در رابطهٔ

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \tan\theta = \text{ثابت}$$

صدق می‌کنند. با استفاده ازاین دستور منحنیهایی را معین کنید که دوایر $x^2 + y^2 = c^2$ را با زاویهٔ °۴۵ قطع می‌کنند.

۱۱.۱ روش تکرار پیکار

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول متعددی وجود دارند که برای به‌دست آوردن جوابهای کامل نمی‌توان آنها را با یکی از روشهای متعارف بحث شده درپیش یا با روش مقدماتی دیگری حل کرد.[۱] چنین معادلاتی بکرات درمسائل مهندسی ظاهر می‌شوند. دراین صورت می‌توان یك روش تقریب برای به‌دست‌آوردن جواب تقریبی به‌کار برد مانند روش عددی‌ای که در بخش ۷.۱۹ بحث شده است. غالباً درمورد مسائل عملی جوابهای تقریبی کافی‌اند.

در این بخش یك روش تقریب را مد نظر قرار می‌دهیم که **روش تکرار پیکار**[۲] نامیده می‌شود و جوابهای تقریبی مسئلهٔ با مقدار اولیه به‌صورت

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{۱}$$

را به‌دست می‌دهد و فرض می‌شود که این مسئله دارای جوابی یکتا درفاصله‌ای شامل x_0 باشد. روش پیکار، همان طور که در بخش بعد خواهیم دید، از ارزش نظری زیادی برخوردار است. ارزش عملی آن محدود است زیرا گاهی ممکن است به‌انتگرالگیریهای پیچیده‌ای منجر شود.

ایدهٔ اساسی روش پیکار بسیار ساده است. می‌بینیم که (۱) را با انتگرالگیری می‌شود به‌صورت

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt \tag{۲}$$

---

۱. مرجع [B۱۲] در ضمیمهٔ ۱ حاوی بیش از ۱۵۰۰ معادلهٔ دیفرانسیل مهم به انضمام جوابهای آنهاست که به طور سیستماتیك و با ذکر مراجع متعددی مربوط به زمینهٔ اصلی مرتب شده‌اند.

۲. امیل پیکار (Emile Picard)، ۱۸۵۶–۱۹۴۱، ریاضیدان فرانسوی که کارهای مهمی در زمینهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط و معادلات دیفرانسیل انجام داد.

نوشت که درآن t معرف متغیر انتگرالگیری است. در واقع وقتی $x = x_\circ$ باشد انتگرال صفراست و $y = y_\circ$، بنابراین(۲) درشرط اولیهٔ (۱) صدق می‌کند؛ بعلاوه، با مشتقگیری از (۲) معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را به‌دست می‌آوریم.

برای یافتن تقریبهای جواب $y(x)$ در (۲) به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. در سمت راست رابطه تقریب خام، ثابت $= y_\circ = y$ را قرارمی‌دهیم؛ نتیجهٔ این‌عمل محتملا تقریب بهتری است.

$$y_1(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f(t, y_\circ) dt$$

سپس به‌همین طریق $y_1(x)$ را جایگزین می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y_2(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f[t, y_1(t)]\, dt$$

الی‌آخر. نتیجه برای n امین تکرار عبارت است از

$$y_n(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt \qquad (۳)$$

بدین‌طریق یك دنباله تقریبهای

$$y_1(x), \quad y_2(x), \cdots, \quad y_n(x)$$

را به‌دست می‌آوریم و دربخش‌بعد خواهیم دیدکه شرایطی که‌تحت‌آن این‌دنباله به‌جواب (۱)، یعنی $y(x)$، همگراست شرایطی نسبتاً کلی‌اند.

روش تکرار روشی است کـه منتهی به یك دنباله تقریبها بـرای تابعی (مجهول) می‌شود مانند y_1 ، y_2 ، . . . ، که n امین تقریب یعنی y_n درمرحلهٔ n ام با به‌کاربردن یك (یاچند) تقریب قبلی به‌دست می‌آید ونحوهٔ عمل برای‌تمام مراحل یکی‌است. درساده‌ترین حالت y_n از روی y_{n-1} به‌دست می‌آید؛ اگر عملگر را با T نشان دهیم می‌توان‌نوشت

$$y_n = T(y_{n-1})$$

روش پیکار ازاین نوع است زیرا (۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y_n(x) = T(y_{n-1}(x)) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt.$$

برای تشریح این روش‌آن را دربارهٔ معادله‌ای به‌کاربریم که جواب آن را می‌دانیم و بدین‌ترتیب جواب‌کامل و تقریبی را می‌توانیم باهم مقایسه نماییم.

مثال ۱. روش تکرار پیکار

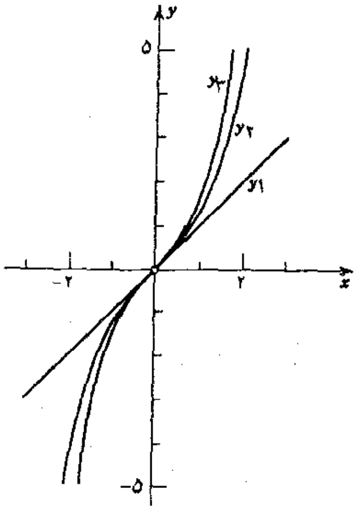
جوابهای تقریبی مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را پیدا کنید.

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

دراین حالت $x_0 = 0$ ، $y_0 = 0$ ، $f(x, y) = 1 + y^2$ و (۳) چنین می‌شود

$$y_n(x) = \int_0^x [1 + y_{n-1}^2(t)]dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2(t)dt$$

با $y_0 = 0$ شروع می‌کنیم و ازآنجا به‌دست می‌آوریم (به‌شکل ۳۱ رجوع کنید)



شکل ۳۱. جوابهای تقریبی مثال ۱

$$y_1(x) = x + \int_0^x 0 \times dt = x$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t^2 dt = x + \frac{1}{3}x^3$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)^2 dt = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

ی‌آخر. البته دراین‌مسئله می‌توانیم جواب‌کامل را با تفکیک متغیرها به‌دست‌آوریم (مثال بخش ۳.۱) و دریابیم که

$$(۴)\quad y(x)=\tan x = x+\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۲}{۱۵}x^{۵}+\frac{۱۷}{۳۱۵}x^{۷}+\cdots\left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$$

سه جملهٔ اول $y_۳(x)$ باسه جملهٔ اول سری (۴) یکی است. سری (۴) به ازای $|x|<\pi/۲$ همگراست و تمام آنچه که می‌توان انتظار داشت این است که دنبالهٔ $y_۱$، $y_۲$، ... به تابعی همگرا باشد که جواب مسئلهٔ ما به ازای $|x|<\pi/۲$ است. این موضوع نشان می‌دهد که مسئله همگرایی از اهمیت عملی زیادی برخوردار است.

مسائل بخش ۱۱۰۱

روش پیکار را دربارهٔ مسائل با مقدار اولیهٔ زیر به کار ببرید. همچنین جواب کامل را معین نمایید. جوابها را مقایسه کنید.

۱. $y'=۲y,\quad y(۰)=۱$ ۲. $y'=xy,\quad y(۰)=۱$

۳. $y'=y^{۲}+۴,\quad y(۰)=۰$ ۴. $y'=x+y,\quad y(۰)=-۱$

۵. $y'=x+y,\quad y(۰)=۱$ ۶. $y'=xy+۲x-x^{۳},\quad y(۰)=۰$

۷. روش پیکار را در مورد $y'=y,\ y(۰)=۱$ به کار ببرید و نشان دهید که تقریبهای متوالی به جواب کامل $y=e^{x}$ منجر می‌شود.

۸. روش پیکار را دربارهٔ $y'=۲xy,\ y(۰)=۱$ به کار ببرید. نمودارهای $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ وجواب کامل را به ازای $۰\leqslant x\leqslant ۲$ رسم کنید.

۹. در مسئلهٔ ۸ مقادیر $y_۱(۱)$، $y_۲(۱)$ و $y_۳(۱)$ را محاسبه کنید و آنها را با مقدار دقیق $y(۱)=e=۲٫۷۱۸...$ مقایسه نمائید.

۱۰. نشان دهید که هرگاه در (۱)، f به y بستگی نداشته باشد، آنگاه تقریبهای به دست آمده با روش پیکار با جواب دقیق همانندند. چرا؟

۱۲۰۱ وجود و یکتایی جوابها

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ

$$|y'|+|y|=۰,\qquad y(۰)=۱$$

جوابی ندارد زیرا $y\equiv ۰$ تنها جواب معادلهٔ دیفرانسیل است. (چرا؟) مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ

$$y'=x,\qquad y(۰)=۱$$

دقیقاً یك جواب دارد، یعنی، $y=\frac{1}{2}x^2+1$. مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ

$$xy'=y-1, \qquad y(0)=1$$

بینهایت جواب به صورت $y=1+cx$ داردکه درآن c دلخواه است. از این مثالها درمی‌یابیم که یك مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ

$$y'=f(x, y), \qquad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

ممکن است یك یا بیش‌از یك جواب داشته باشد ویا اینکه اصلا جوابی نداشته باشد. با توجه به‌این مطلب دو سؤال اساسی زیرمطرح می‌شود.

مسئلهٔ وجود. تحت چه شرایطی یك مسئله با مقدار اولیهٔ به صورت (۱) حداقل یك جواب دارد؟

مسئلهٔ یکتایی. تحت چه‌شرایطی‌آن مسئله جوابی‌یکتا، یعنی‌فقط یك جواب، دارد؟

قضایائی که چنین شرایطی را بیان می‌کنند بــه ترتیب **قضایای وجود** و **قضایای یکتایی** نامیده می‌شوند.

البته سه مثال مذکور آنقدر ساده‌اندکه می‌توانیم این دو سؤال را از راه حدس‌و بررسی، بدون استفاده از هیچ قضیه‌ای، پاسخ دهیم. معذلك، واضح است‌که در حالات پیچیده‌تر ـ مثلا، درمواقعی که نتوان معادله‌را با روشهای مقدماتی حل نمود، قضایای‌وجود و یکتایی از اهمیت زیادی برخوردارند. حقیقت این است کــه یك درس پیشرفته‌تر در معادلات دیفرانسیل عمدتاً شامل ملاحظاتی دربارهٔ وجود یکتایی ورفتار عمومی جوابهای انواع‌مختلف معادلات دیفرانسیل‌است وبسیاری از این ملاحظات‌کاربردهای عملی‌فراوانی دارند. مثلا، نتایج وجود ویکتایی جوابهای تناوبی بعضی معادلات دیفرانسیل که درحدود ۹۰ سال پیش توسط پوانکاره به‌دلایل‌کاملا نظری به‌دست آمد امروزه پایهٔ تحقیقات‌عملی متعددی درمکانیك غیرخطی است.

یکتایی حائز اهمیت است، مثلا، چنانچه بخواهیم رفتار آیندهٔ یك سیستم فیزیکی که توسط یك مسئلهٔ با مقدار اولیه مشخص می‌شود را پیش‌بینی کنیم، مدل ما ممکن‌است چنان پیچیده باشد که مجبور شویم ازیك روش عددی برای به‌دست آوردن جواب‌تقریبی استفاده‌کنیم. اما قبل‌ازانجام چنین‌کاری باید اطمینان حاصل کنیم که این مدل به‌جوابی‌یکتا منجر خواهد شد.

یادآور می‌شویم که در بسیاری از شاخه‌های ریاضی قضیهٔ وجود و قضیهٔ یکتایی از اهمیت مشابهی برخوردارند. این موضوع رابا مثال ملموسی ازجبرخطی تشریح می‌کنیم. از سه دستگاه معادلات خطی

(الف) $\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y&=0 \end{aligned}$ (ب) $\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=0 \end{aligned}$ (پ) $\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2x+2y&=2 \end{aligned}$

به‌ترتیب اولی هیچ جوابی ندارد، دومی یك جواب دارد وسومی دارای بینهایت جواب است. این‌کاملا واضح است و به‌قضیه‌ای احتیاج نیست. معذلك هرگاه دستگاهی شامل چند معادله وچند مجهول باشد برای این سؤال‌که آیا اصولا دستگاه جوابی دارد و اگر دارد چند جواب دارد پاسخی فوری نداریم. ازاینجاست که نیاز به‌قضایای وجودیکتایی آشکار می‌شود.

در رابطه با معادلات دیفرانسیل، دانشجویی‌که منحصراً به‌کاربردهای این معادلات علاقه‌مند است و نه مسائل نظری مربوط به آن (طرز تلقی‌ای‌که او را از موفقیت در زمینه‌های عملی باز می‌دارد) ممکن است برای خود این طور دلیل بیاورد‌که یك مسئلهٔ فیزیکی متناظر با یك معادلهٔ دیفرانسیل مشخص جوابی یکتا دارد و همین موضوع باید در مورد یك معادلهٔ دیفرانسیل نیز صادق باشد. درموارد ساده‌تر شاید حق با او باشد اما باید به‌خاطر داشته باشد‌که یك معادلهٔ دیفرانسیل صرفاً حالت مجردی از یك حقیقت است‌که با صرفنظرکردن از بعضی واقعیات فیزیکی‌که از اهمیت‌کمتری برخوردارند به دست می‌آید و دروضعیتهای فیزیکی پیچیده‌تر ممکن است نتوان از پارامترها و عوامل مختلف نیز صرفنظر نمود. دراین‌صورت درچنین حالتی ازقبل تضمینی برای اینکه معادلهٔ‌دیفرانسیل مدلی صحیح است یعنی به تصویری درست از حقیقت منجر می‌شود وجود ندارد. این بخشی از فن مدلسازی را تشکیل می‌دهد: نشان دادن اهمیت نسبی عوامل مختلف دخیل دریك سیستم فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی وغیره.

درمورد یك مسئلهٔ با مقدار اولیه به‌صورت

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{۱}$$

شرایط ساده‌ای برای وجود ویکتایی جواب وجود دارد. هرگاه f درناحیه‌ای از صفحهٔ xy که شامل x_0 و y_0 است پیوسته باشد آنگاه مسئلهٔ (۱) حداقل یك جواب دارد. اگر، علاوه براین، مشتق جزئی $\partial f/\partial y$ وجود داشته ودرآن ناحیه پیوسته باشدآن‌وقت مسئلهٔ (۱) دقیقاً یك جواب دارد. این جواب را می‌توان با روش تکرار پیکار به دست آورد. حال این سه وضعیت را با روشی دقیق به‌شکل فرمول بیان می‌کنیم.

قضیهٔ وجود

هرگاه $f(x, y)$ درتمام نقاط (x, y) مستطیل (شکل ۳۲)

$$R: \qquad |x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

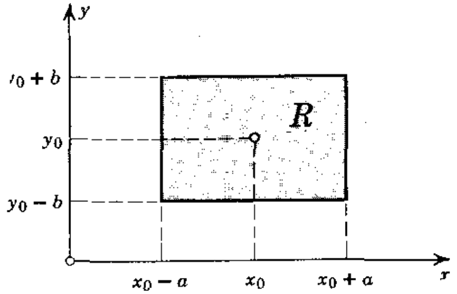
پیوسته ودر R کراندار[1] باشد یعنی به‌ازای هر (x, y) در R

---

۱. یك تابع $f(x, y)$ را وقتی (x, y) درناحیه‌ای از صفحهٔ xy متغیر است **کراندار** گویند هرگاه عددی مانند k وجود داشته باشد به‌طوری‌که وقتی (x, y) درآن ناحیه است $|f| \leqslant k$. مثلا $f = x^۲ + y^۲$ با $K = ۲$ وقتی $|x| < ۱$ و $|y| < ۱$ باشدکراندار است. تابع $f = \tan(x + y)$ به‌ازای $|x + y| < \pi/۲$ کراندار نیست.

$$|f(x, y)| \leqslant K \qquad (۲)$$

آنگاه مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ (۱) حداقل یك جواب $y(x)$ دارد که اقلا به ازای هر x در فاصلهٔ $|x-x_{\circ}| < \alpha$، که درآن α ازدوعدد a و b/K کوچکتر است، تعریف‌شده‌است.



شکل ۳۲. مستطیل R درقضایای وجود ویکتایی

قضیهٔ یکتایی

هرگاه $f(x, y)$ و $\partial f/\partial y$ به ازای هر (x, y) در آن مستطیل R پیوسته وکراندار باشد یعنی به‌ازای هر (x, y) در R

$$\text{(الف)} \quad |f| \leqslant K \qquad \text{(ب)} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M \qquad (۳)$$

آنگاه مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ (۱) فقط یك جواب $y(x)$ داردکه حداقل به ازای هر x در فاصلهٔ $|x-x_{\circ}| < \alpha$ تعریف شده است. درآن صورت این جواب را می‌توان با روش تکرار پیکار بدست آورد یعنی دنبالهٔ $y_{\circ}$، $y_{۱}$، ...، y_n، ... که‌درآن

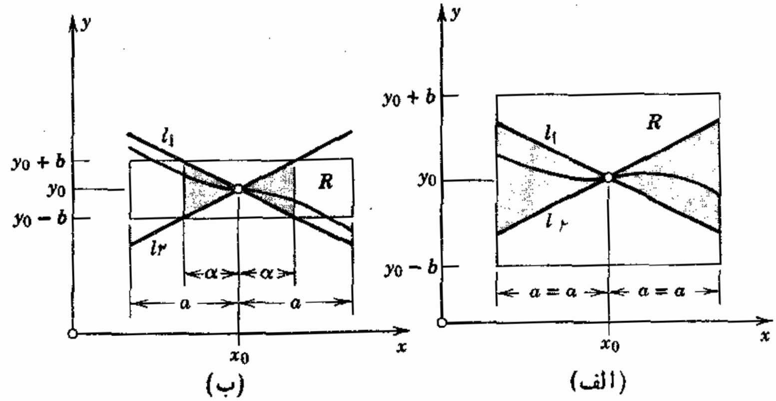
$$y_n(x) = y_{\circ} + \int_{x_{\circ}}^{x} f[t, y_{n-۱}(t)]\, dt, \qquad n = ۱, ۲, \cdots,$$

به $y(x)$ همگراست.

از آنجا کـه اثبات این قضایا متضمن آشنایی با سریهای همگرا و مفاهیم دیگری است کـه بعداً در این کتاب بررسی شده‌اند فعلا این اثباتها را ارائـه نمی کنیم اما توجه دانشجو را به‌مرجع [B۱۱] ضمیمهٔ ۱ معطوف می کنیم. معهذا نیاز به‌این داریم که مثالهاو یادآوریهائی راکه برای فهم بهتر این دو قضیه مفیداند ارائه دهیم.

چون $y' = f(x, y)$، شرط (۲) ایجاب می‌کند که $|y'| \leqslant K$، یعنی، شیب هرمنحنی جواب $y(x)$ در R حداقل $-K$ وحداکثر $+K$ است. بنابراین یك منحنی جواب که از نقطهٔ $(x_{\circ}, y_{\circ})$ می گذرد باید درناحیهٔ سایه خوردهٔ شکل ۳۳ قرار گیردو

توسط خطوط $l_۱$ و $l_۲$ که شیب آنها به‌ترتیب Kــ و K است محدود شده باشد. بسته به‌شکل R دو حالت مختلف ممکن است پیش بیاید. درحالت نخست که درشکل ۳۳ الف نشان داده شده است داریم $a \geqslant b/K$ است و بنابراین درقضیه وجود $\alpha = a$ که درآن صورت جواب به‌ازای هر x بین $x_۰ - a$ و $x_۰ + \alpha$ وجود دارد. درحالت دوم که در شکل ۳۳ب نشان‌داده شده است داریم $b/K < a$. بنابراین $\alpha = b/K$، و آنچه می‌توانیم از قضایا نتیجه بگیریم این است که جواب به‌ازای هر x بین $x_۰ - b/K$ و $x_۰ + b/K$ وجود دارد؛ برای x های بزرگتر یا کوچکتر منحنی جواب ممکن است از مستطیل R خارج شود و چون دربارهٔ f خارج از R چیز خاصی فرض نکرده‌ایم بنابراین دربارهٔ جواب آن مقادیر متناظر x نمی‌توان چیزی نتیجه گرفت.



شکل ۳۳. شرط (۲) قضیهٔ وجود. (الف) حالت اول، (ب) حالت دوم

مثال ۱

مسئلهٔ

$$y' = ۱ + y^۲, \qquad y(۰) = ۰$$

را درنظر بگیرید (به مثال ۱ بخش ۱۱.۱ رجوع کنید) و فرض کنید

$$R:\ |x| < ۵ \text{ و } |y| < ۳$$

دراین صورت

$$a = ۵, \quad b = ۳, \quad |f| = |۱ + y^۲| \leqslant K = ۱۰,$$

$$|\partial f/\partial y| = ۲|y| \leqslant M = ۶, \quad \alpha = b/K = ۰٫۳ < a$$

درواقع، جواب $y = \tan x$ این مسئله در $x = \pm\pi/۲$ گسسته‌است وجواب پیوسته‌ای درتمام فاصلهٔ $|x| < ۵$، که از آن شروع کردیم، وجود ندارد.

در این دو قضیه به‌جای آنکه شرایط لازم باشند کافی‌اند و می‌توان آنها را ناچیز

شمرد. مثلا با توجه به‌قضیهٔ مقدار میانگین درحساب دیفرانسیل داریم

$$f(x, y_2)-f(x, y_1)=(y_2-y_1)\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\tilde{y}}$$

که در آن فرض می‌شود (x, y_1) و (x, y_2) در R اند و $\tilde{y}$ مقدار مناسبی بین y_1 و y_2 است. از این و (۳ ب) نتیجه می‌شود که

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant M|y_2-y_1| \qquad (۴)$$

ومی‌توان نشان داد که به‌جای (۳ب) می‌توان شرط ضعیفتر (۴) را که به **شرط لیپ‌شیتز**[۱] معروف است به‌کار برد. با وجود این پیوستگی $f(x, y)$ برای تضمین یکتایی جواب کافی نیست. این مطلب را می‌توان با مثال زیر روشن نمود.

مثال ۲. غیر یکتایی

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ

$$y'=\sqrt{|y|}, \quad y(0)=0$$

دارای دو جواب زیر است

$$y\equiv 0 \quad \text{و} \quad y^*=\begin{cases} x^2/4 & x\geqslant 0 \\ -x^2/4 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

گرچه $f(x, y)=\sqrt{|y|}$ بـه ازای هـر y پیوسته است. شرط لیپ‌شیتز (۴) در هـر ناحیه‌ای که شامل خط $y=0$ باشد نقض می‌شود زیرا به ازای $y_1=0$ و مقدار مثبت y_2 داریم

$$\frac{|f(x, y_2)-f(x, y_1)|}{|y_2-y_1|}=\frac{\sqrt{y_2}}{y_2}=\frac{1}{\sqrt{y_2}}, \qquad (\sqrt{y_2}>0) \qquad (۵)$$

و این را می‌توان هرچقدر که بخواهیم با کوچك نمودن y_2 بزرگ کنیم در حالیکه (۴) ایجاب می‌کند که مقدار سمت چپ (۵) از مقدار ثابت M تجاوز نکند.

روشهای عددی درمعادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول که در بخش ۷.۱۹ ارائه شده‌اند از سایر بخشهای فصل ۱۹ مستقل است وهم‌اکنون می‌توانند مورد مطالعه قرار گیرند.

---

۱. ردلف لیپ‌شیتز (Rudolf Lipschitz)، ۱۹۰۳ـ۱۸۳۱ ، ریاضیدان آلمانی که در جبر وهندسه ودیفرانسیل نیز کار کرد.

مسائل بخش ۱۲۰۱

۱. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل $|y'|+|y|=-1$ جوابی ندارد.

۲. بزرگترین مجموعهٔ M درصفحهٔ xy را طوری پیدا کنید که از هر نقطهٔ M یك و فقط یك منحنی جواب $x\,dy=y\,dx$ بگذرد.

۳. تمام جوابهای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $xy'=4y$ ، $y(0)=0$ را پیدا کنید. نمودار بعضی از آنها را رسم کنید.

۴. معادلهٔ دیفرانسیل $xy'=2y$ را درنظر بگیرید وتمام شرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ را طوری پیدا کنید که مسئلهٔ بـا مقدار اولیهٔ حاصل (الف) جوابی نداشته باشد، (ب) بیش‌از یك جواب داشته باشد، (پ) دقیقاً یك جواب داشته باشد.

۵. مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $xy'=3y$ ، $y(0)=1$ چند جواب دارد؟ توضیح دهید.

۶. مسئلهٔ (۴) را درمورد معادلهٔ دیفرانسیل $(x^2-x)y'=(2x-1)y$ حل کنید.

۷. نشان دهید هرگاه $y'=f(x, y)$ درفرضیات قضایای موجود، درمستطیل R صدق کند و y_1 و y_2 دو جواب معادله‌ای باشند که منحنیهایش در R قرار دارند، آنگاه این منحنیها نمی‌توانند نقطهٔ مشترکی داشته باشند (مگر اینکه همانند باشند).

۸. هرگاه فرضیات قضایای این بخش نه صرفاً دریك مستطیل R بلکه در یك نوار قائم مفروض $|x-x_0|\leqslant a$ نیز صدق کنند ، نشان دهید که آنگاه به ازای تمام مقادیر x درفاصلهٔ $|x-x_0|\leqslant a$ جواب (۱) وجود دارد.

۹. یادآوری این موضوع با ارزش است که جواب یك مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ ممکن‌است درفاصله‌ای بزرگتر از آنچه درقضیه ذکر شده است یعنی $|x-x_0|<\alpha$ که α هم‌درقضیه تعریف شده ، وجود داشته باشد. مثال۱ این مطلب را روشن می‌نماید. آن باتوجه به مثال فوق، α را برحسب a و b پیدا کنید. بیشترین α ممکنه را کـه با انتخاب مناسب a و bمی‌توانیم داشته باشیم چیست؟

بزرگترین α ای‌را پیدا کنید که به‌ازای‌آن قضایای موجود وجود جواب را تضمین‌نمایند.

۱۰. $y'=y^2,\quad y(1)=1$ ۱۱. $y'-y^2=4,\quad y(0)=0$

۱۲. نشان دهید که $f(x, y)=|\sin y|+x$ درشرط لیپ‌شیتز (۴) به‌ازای $M=1$ ودرتمام صفحهٔ xy صدق می‌کند اما $\partial f/\partial y$ به‌ازای $y=0$ وجود ندارد.

۱۳. آیا $f(x, y)=|x|+|y|$ در شرط لیپ‌شیتز در صفحهٔ xy صدق می‌کند؟ آیا $\partial f/\partial y$ وجود دارد؟

۱۴. معادلهٔ دیفرانسیل خطی $y'+g(x)y=r(x)$ را به صورت (۱) بنویسید. هرگاه

g و r به‌ازای تمام مقادیر x طوری پیوسته باشند که $|x-x_\circ| \leqslant a$ ، نشان‌دهید که $f(x, y)$ دراین معادله در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند. [بنابه قضایای حاضر، این مطلب یکتایی جواب را ایجاب می‌کند که البته از رابطهٔ (۴) بخش ۷۰۱ نیز نتیجه می‌شود].

۱۵. تمام جوابهای مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $y' = ۲\sqrt{y}, y(۱) = \circ$ را پیدا کنید. کدام‌یك از آنها را می‌توان با شروع از $y_\circ = \circ$ با روش پیکارد به‌دست آورد؟ آیا $۲\sqrt{y}$ درشرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند؟

۲

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی

معادلات دیفرانسیل معمولی را می‌توان به دو دستهٔ بزرگ به‌اصطلاح معادلات خطی و معادلات غیرخطی تقسیم کرد. در حالی که معادلات غیرخطی (مرتبه دوم یا بالاتر) نسبتاً دشوارند معادلات خطی از بسیاری جهات ساده‌ترند زیرا خواص مختلف حل آنها را می‌توان به روشی کلی مشخص نمود و برای بسیاری از این معادلات راه حلهای متعارف وجود دارد. در این فصل معادلات دیفرانسیل خطی و کاربردهای آنها را بررسی خواهیم کرد. این معادلات نقش مهمی را در ریاضیات مهندسی مانند ارتعاشات مکانیکی و مدارها و شبکه‌های الکتریکی ایفا می‌کنند.

به‌معادلات خطی مرتبه دوم جای بیشتری اختصاص یافته است. به‌نظرمی‌رسد این‌کار بی‌مورد نبوده باشد زیرا اهمیت معادلات مرتبه دوم از نقطه‌نظر عملی ازسایرمعادلات بیشتر است. بعلاوه، هرگاه ابتدا به‌معادلات مرتبه‌دوم بپردازیم ملاحظات نظری لازم آسانترخواهند شد. همینکه دانشجو روش بررسی معادلات مرتبه دوم را فراگرفت بسادگی با تعمیم این مفاهیم، روشها و نتایج به‌معادلات دیفرانسیل مرتبه سوم و بالاتر آشنا خواهد شد.

کاربردهای مهندسی مهم مربوط به‌نوسانات الکتریکی و مکانیکی دربخشهای ۶.۲ و ۱۳.۲ تا ۱۵.۲ بررسی می‌شوند.

روشهای عددی حل‌معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم دربخشهای ۸.۱۹، که مستقل از سایر بخشهای فصل ۱۹ است، گنجانده شده‌اند.

(معادلات لژاندر، بسل و فوق هندسی درفصل ۴ بررسی خواهند شد.)

پیشنیاز این فصل: فصل ۱ به‌ویژه بخشهای ۷.۱ و ۸.۱.

بخشهایی را که برای دورهٔ فشرده‌تر می‌توان حذف‌کرد: ۸.۲ تا ۱۰.۲، ۱۵.۲، ۱۶.۲.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت ب.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۲ معادلات خطی همگن مرتبه دوم

تابحال با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول آشنا شده‌ایم (بخشهای ۷.۱ تا ۹.۱) و حالا به‌تعریف و بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌پردازیم.

یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم را درصورتی **خطی** نامندکه بتوان‌آن را به‌صورت زیر نوشت

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x) \qquad (۱)$$

صفت مشخصهٔ این معادله آن است که معادله نسبت به تابع مجهول y و مشتقات آن خطی است در حالی‌که f و g و r می‌توانند هرتابع مفروضی از x باشند. خواهیم دیدکه معادلهٔ (۱) درصورتی که $r(x)$ همواره برابر صفر باشد تا حدی خواص ساده‌تری دارد. دراین‌صورت (۱) چنین می‌شود

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \qquad (۲)$$

و این‌معادله را **همگن** می‌نامند. هرگاه $r(x)\neq 0$، آنگاه (۱) **غیرهمگن** نامیده می‌شود. مثلا

$$y''+4y=e^{-x}\sin x$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن است درحالی‌که

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن است.

هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دومی را که نتوان به‌صورت (۱) نوشت غیرخطی نامند. مثلا معادلات زیر غیرخطی هستند

$$y''y+y'=0$$

و

$$y''=\sqrt{y'^2+1}$$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دربسیاری از مسائل مهندسی نقشی اساسی ایفا

می کنند. خواهیم دید که بعضی ازاین‌معادلات، بدلیل این که جواب‌هایی به‌صورت توابع مقدماتی دارند، بسیار ساده هستند. سایر معادلات، که جوابهایشان توابع عالی و مهمتری نظیر توابع بسل و فوق هندسی است، پیچیده‌ترانند.

توابع f و g درمعادلات (۱) و (۲) را **ضرایب** این معادلات می‌نامند.

درتمام بررسیهایمان فرض‌می‌کنیم که x دریك ناحیهٔ مشخص‌دلخواه، مانند یك‌فاصلهٔ محدود و یا روی محور xها تغییر می‌کند. در تمام فرضها و حکمها چنین ناحیهٔ مشخصی منظور است و لزومی ندارد که درهرمورد روی آن تأکید شود.

تابع

$$y=\varphi(x)$$

را **جواب** (خطی یا غیرخطی) معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم روی فاصله‌ای (شاید بینهایت) نامند هرگاه $\varphi(x)$ تعریف شده و درآن فاصله دوبار مشتق‌پذیر بوده و بگونه‌ای باشد که وقتی‌بجای تابع مجهول y و مشتقات آن φ و مشتقات نظیرش را قرار دهیم معادلهٔ به‌یك اتحاد تبدیل شود.

این تعریف شبیه تعریف در حـالت مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بخش ۱.۱ است.

مثال ۱

توابع $y=\cos x$ و $y=\sin x$ به‌ازای جمیع مقادیر x جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن

$$y''+y=۰$$

هستند زیرا

$$(\cos x)''+\cos x=-\cos x+\cos x=۰$$

و به‌همان طریق برای $y=\sin x$. حتی می‌توان قدم فراتر نهاد. هرگاه اولین جواب را درمقدارثابتی، مثلا ۳، ضرب کنیم تابع حاصل یعنی $y=۳\cos x$ نیز یك جواب معادله است زیرا

$$(۳\cos x)''+۳\cos x=۳[(\cos x)''+\cos x]=۰$$

واضح است که بجای ۳ می‌توان هرثابت دیگری مانند ۵ــ یا ۲/۹ را به‌کار برد. حتی می‌توانیم $\cos x$ و $\sin x$ را به‌ترتیب در دومقدار ثابت متفاوت، مثلا ۲ و ۸ــ، ضرب کنیم و توابع حاصل را باهم جمع نماییم یعنی

$$y=۲\cos x-۸\sin x$$

و این تابع نیز به ازای جمیع مقادیر x جوابی برای معادلـهٔ همگن مفروض است زیرا

$$(۲\cos x-۸\sin x)''+۲\cos x-۸\sin x$$
$$=۲[(\cos x)''+\cos x]-۸[(\sin x)''+\sin x]=۰$$

مثال فوق نمایانگر این واقعیت مهم است که با ضرب کردن جوابهای معلوم دراعداد ثابت و جمع نمودن آنها می‌توان جوابهای جدیدی برای معادلهٔ خطی همگن (۲) به‌دست آورد. البته این موضوع فواید عملی و نظری زیادی دارد زیرا چنین خاصیتی ما را قادر می‌سازد که، به کمك جوابهای ساده، جوابهای بیشتری به دست بیاوریم. این خاصیت را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود.

قضیهٔ بنیادی ۱

هرگاه جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل **خطی همگن** (۲) در فاصله‌ای مانند J را در مقدار ثابتی ضرب کنیم تابع حاصل نیز جوابی از (۲) در فاصلهٔ J است. همچنین مجموع دو جواب (۲) در فاصلهٔ J جوابی از (۲) در آن فاصله خواهد بود[1].

اثبات. فرض می‌کنیم $\varphi(x)$ جوابی از (۲) درفاصلهٔ J باشد ونشان می‌دهیم $y=c\varphi(x)$ نیز جوابی از (۲) در این فاصله است. اگر $y=c\varphi(x)$ را در (۲) قرار دهیم سمت چپ (۲) چنین می‌شود

$$(c\varphi)''+f(c\varphi)'+gc\varphi=c[\varphi''+f\varphi'+g\varphi].$$

از آنجائی که φ در (۲) صدق می‌کند مقدار داخل پرانتز برابر صفر و قسمت اول قضیه ثابت می‌شود. اثبات حکم دوم کاملا ساده است و آن را بعهدهٔ خواننده می گذاریم.

دانشجو باید با این قضیهٔ بسیار مهم خوب آشنا باشد و آن را کاملا به ذهن بسپارد اما نباید فراموش نماید که این قضیه درمورد معادلات خطی غیرهمگن یا معادلات غیرخطی **صادق نیست** و این را می‌توان با دومثال زیر روشن نمود.

مثال ۲. یك معادلهٔ خطی غیرهمگن

با جایگزینی می‌توان نشان دادکه توابع

$$y=۱+\sin x \quad \text{و} \quad y=۱+\cos x$$

جوابهای معادلهٔ خطی غیرهمگن

$$y''+y=۱$$

---

۱. این قضیه را بعضی مواقع **اصل برهم نهی** یا اصل خطی بودن می‌نامند.

هستند اما توابع

$$(1+\cos x)+(1+\sin x) \quad \text{و} \quad 2(1+\cos x)$$

جوابهای آن معادله نیستند.

مثال ۳. یك معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی

با جایگزینی می‌توان نشان داد که توابع

$$y=1 \quad \text{و} \quad y=x^2$$

جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی

$$y''y-xy'=0$$

هستند اما توابع

$$x^2+1 \quad \text{و} \quad -x^2$$

جوابهای آن معادله نیستند.

مسائل بخش ۱۰۲

خواص عمومی مهم معادلات دیفرانسیل خطی همگن و غیرهمگن. گزاره‌های زیر را برای یك فاصلهٔ مشخص J ثابت نموده و با ذکر مثالهایی آنها را توضیح دهید. دراینجا فرض می‌کنیم که در (۱) داشته باشیم $r(x)\not\equiv 0$.

۱. $y\equiv 0$ جوابی برای (۲) است (که آن را «جواب بدیهی» نامند) اما جوابی برای (۱) نیست.

۲. مجموع دوجواب (۲) جوابی برای (۲) است.

۳. هر «ترکیب خطی» ازجوابهای y_1 و y_2 از (۲) یعنی $y=c_1y_1+c_2y_2$ جوابی برای (۲) است.

۴. به‌ازای‌هرجواب y_1 از (۱) حاصلضربی به‌صورت $y=cy_1$، بجز به‌ازای $c=1$، جوابی برای (۱) **نیست**.

۵. مجموع دوجواب (۱) جوابی برای (۱) **نیست**.

۶. تفاضل $y=y_1-y_2$ دوجواب (۱) جوابی برای (۲) است.

۷. مجموع دوجواب y_1 از (۱) و y_2 از (۲) جوابی برای (۱) است.

۸. **(معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم تحویل‌پذیر به مرتبهٔ اول)** بعضی معادلات مرتبه دوم را می‌توان به مرتبه اول تحویل نمود. این مطلب در مورد معادلاتی به صورت $F(x, y', y'') = 0$، که بطور صریح شامل y نیستند، نیز صدق می‌کند. نشان دهید که با قراردادن $z = y'$ معادلهٔ مرتبه اولی برحسب z به دست می‌آید و به کمک جواب z می‌توانیم با انتگرالگیری جوابی برای y ازمعادلهٔ مفروض به‌دست بیاوریم.

معادلات زیر را به مرتبه اول تحویل و حل کنید.

۹. $y'' + y' = x + 1$ ۱۰. $2xy'' = 3y'$

۱۱. $y'' = y' \tanh x$ ۱۲. $y'' = 1 + y'^2$

۱۳. $xy'' + 2y' = 0$ ۱۴. $xy'' + y' = y'^2$

۱۵. یك ذرهٔ مادی روی خط مستقیم طوری حرکت می‌کند که شتاب و سرعتش برابرند. درلحظهٔ $t = 0$ فاصلهٔ نقطه از مبدأ ۱ متر و سرعت آن ۲ متر بر ثانیه است. موقعیت و سرعت ذره را در $t = 5$ s به‌دست بیاورید.

۱۶. یك ذرهٔ مادی برمسیری مستقیم‌طوری حرکت می‌کند که حاصلضرب‌سرعت درشتابش ثابت است، مثلا $1\text{m}^2/\text{s}^3$. هرگاه در لحظهٔ $t = 0$ فاصلهٔ ذره از مبدأ ۲ متر و سرعت آن ۲ متر بر ثانیه باشد فاصله و سرعت آن در $t = 6$ s چقدر است؟

۱۷. منحنی $y(x)$ راکه ازمبدأ می‌گذرد طوری بیابید که $y'' = y'$ بوده ومماس برمنحنی درمبدأ $y = x$ باشد.

۱۸. **(کابل آویخته)** می‌توان نشان دادکه منحنی $y(x)$ یك کابل همگن قابل انعطاف و غیرقابل کشش که بین‌دونقطهٔ ثابت‌آویخته شده است با حل‌معادلهٔ $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ به‌دست می‌آیدکه درآن k مقدار ثابتی است که به وزن بستگی دارد. این منحنی را منحنی زنجیری می‌نامند. نمودار $y(x)$ را با $k = 1$ و این فرض که نقاط ثابت اتصال درصفحهٔ قائم xy عبارت باشند از $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ پیدا کنید.

۱۹. **(تحویل به مرتبه اول)** نوع دیگری ازمعادلات تحویل‌پذیر به مرتبه اول به صورت $F(y, y', y'') = 0$ است‌که در آن متغیر مستقل x بطور صریح دیده نمی‌شود. با استفاده از قانون زنجیری نشان دهید $y'' = (dz/dy)z$، که در آن $z = y'$ و بدین‌ترتیب معادلهٔ مرتبه اولی به‌دست می‌آید که درآن y متغیر مستقل است.

معادلات زیر را به‌مرتبهٔ اول تحویل و آنها را حل کنید.

۲۰. $yy'' + 3y'^2 = 0$ ۲۱. $y'' + e^{2y}y'^3 = 0$

۲۲. $yy''+(y+1)y'^2=0$

۲۳. منحنی ماربر مبدأ، $y(x)$، را چنان پیدا کنید که $y''=12\sqrt{y}$ و مماس بر آن در مبدأ، محور x ها باشد.

۲۴. منحنی $y(x)$ را چنان پیدا کنید که از $(0, 0)$ و $(1, 1)$ بگذرد و $2y''y=y'^2$.

۲۵. $\ddot{y}+ay^2+f(y)=0$ که درآن a عددی است ثابت، مفروض است. نشان دهید که با قراردادن $\dot{y}=z$ و $u=z^2$ به معادلهٔ مرتبهٔ اول زیر می‌رسیم

$$\frac{du}{dy}+2au+2f(y)=0$$

۲.۲ معادلات مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

حال به بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت می‌پردازیم. چنانکه در بخشهای ۶.۲، ۱۳.۲ و ۱۴.۲ خواهیم دید این معادلات کاربردهای مهندسی مهمی به‌ویژه درارتباط با ارتعاشات مکانیکی و الکتریکی دارند.

مطلب را با معادلات همگن یعنی معادلاتی به‌صورت

$$y''+ay'+by=0 \tag{1}$$

آغازمی کنیم که درآن a و b ثابت‌اند. فرض می‌کنیم a و b حقیقی‌اند و مجموعه مقادیر x شامل تمام محور x ها باشد.

معادلهٔ (۱) را چگونه حل کنیم؟ بخاطر داریم که جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت

$$y'+ky=0$$

یك تابع نمائی است یعنی

$$y=ce^{-kx}$$

می‌توان حدس زدکه تابع

$$y=e^{\lambda x} \tag{2}$$

نیز با انتخاب مناسب λ می‌تواند جوابی برای (۱) باشد. با قراردادن (۲) ومشتقات آن،

$$y''=\lambda^2e^{\lambda x} \quad \text{و} \quad y'=\lambda e^{\lambda x}$$

درمعادلهٔ (۱) داریم

$$(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}=0$$

بنابراین (۲) نیز جوابی برای (۱) است. هرگاه λ جواب معادلهٔ درجه دوم

$$\lambda^{2}+a\lambda+b=0 \tag{۳}$$

باشد این معادله **معادلهٔ مشخصه** (یا معادلهٔ کمکی) (۱) نامیده می‌شود. ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از

$$\lambda_{1}=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^{2}-4b}) \quad ، \quad \lambda_{2}=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^{2}-4b}) \tag{۴}$$

می‌توان نتیجه گرفت که توابع

$$y_{1}=e^{\lambda_{1}x} \quad و \quad y_{2}=e^{\lambda_{2}x} \tag{۵}$$

جوابهای (۱) هستند. صحت این جواب با قراردادن (۵) در (۱) تأیید می‌شود.

از جبر مقدماتی می‌دانیم که وقتی a و b حقیقی هستند معادلهٔ مشخصه ممکن است

(حالت ۱) دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد؛

(حالت ۲) دو ریشهٔ مختلط مزدوج داشته باشد؛

(حالت ۳) یک ریشهٔ حقیقی مضاعف داشته باشد.

این حالات بطور جداگانه بررسی خواهند شد. درحال حاضر هرحالت را با ذکر مثالی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ریشه‌های حقیقی متمایز

جوابهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$y''+y'-2y=0$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$\lambda^{2}+\lambda-2=0$$

ریشه‌های این معادله ۱ و ۲ – هستند و بنابراین دوجواب زیر به‌دست می‌آید

$$y_{1}=e^{x} \quad و \quad y_{2}=e^{-2x}$$

مثال ۲. ریشه‌های مختلط مزدوج

جوابهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$y''+y=0$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$\lambda^{۲}+۱=۰$$

و ریشه‌های این معادله مقادیر $i=(\sqrt{-۱})$ و $-i$ هستند ودوجواب معادله عبارت‌اند از

$$y_{۲}=e^{-ix} \quad و \quad y_{۱}=e^{ix}$$

در بخش ۴.۲ خواهیم دیـد کـه جوابهای حقیقی را می‌توان بـه کمك جوابهـای مختلط به‌دست آورد.

مثال ۳. ریشهٔ حقیقی مضاعف

جوابهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$y''-۲y'+y=۰$$

معادلهٔ مشخصه یعنی

$$\lambda^{۲}-۲\lambda+۱=۰$$

دارای جواب حقیقی مضاعف ۱ است و بنابراین معادله یك جواب زیر را دارد

$$y_{۱}=e^{x}$$

حالت جواب حقیقی مضاعف نیز دربخش ۴.۲ بحث خواهد شد.

مسائل بخش ۲.۲

جوابهای معادلات زیر را پیدا کنید

۱. $y''-y=۰$

۲. $y''+۴y'+۳y=۰$

۳. $y''+y'-۲y=۰$

۴. $y''+۲y'=۰$

۵. $y''-y'=۰$

۶. $y''-۳y'+۲y=۰$

۷. $y''-۹y=۰$

۸. $y''+۶y'+۸y=۰$

۹. $y''+۴y'+۵y=۰$

۱۰. نشان دهید که حالت ۱ فقط در صورتی اتفاق می‌افتد که $a^{۲}>۴b$ ؛ حالت ۲ فقط درصورتی حادث می‌شود که $a^{۲}<۴b$ ، و حالت ۳ تنها درصورتی رخ می‌دهد که $a^{۲}=۴b$ باشد.

۱۱. نشان دهید کـه $y=\cosh x$ و $y=\sinh x$ جوابهای $y''-y=۰$ هستند.

اینها را چگونه می‌توان با استفاده ازجواب مسئلهٔ ۱ به‌دست آورد؟

۱۲. نشان دهید که $y=\cosh 3x$ و $y=\sinh 3x$ جوابهای $y''-9y=0$ هستند. اینها را چگونه می‌توان به‌کمك جواب مسئلهٔ ۷ به‌دست آورد؟

۱۳. جوابهای $y''+4y'=0$ را (الف) با روش فعلی؛ (ب) با تحویل به مرتبهٔ اول بیابید.

۱۴. نشان دهید که a و b در (۱) را می‌توان برحسب λ_1 و λ_2 به وسیلهٔ دستورهای $a=-\lambda_1-\lambda_2$ و $b=\lambda_1\lambda_2$ بیان کرد.

معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۱) را چنان پیدا کنید که توابع زیرجوابهای آن باشد

۱۵. e^{x} ، e^{-2x} **۱۶.** e^{2ix} ، e^{-2ix}

۱۷. ۱ ، e^{2x} **۱۸.** e^{kx} ، e^{lx}

۱۹. $e^{(-1+2i)x}$ ، $e^{(-1-2i)x}$ **۲۰.** $e^{-(\alpha+i\omega)x}$ ، $e^{-(\alpha-i\omega)x}$

۳.۲ جواب عمومی. پایه. مسائل با مقدار اولیه

برای بحث بیشتر دربارهٔ معادلات خطی با ضرایب ثابت دانستن بعضی از خواص عمومی مهم جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی لازم خواهد بود. برای این منظور مقدمتاً دومفهوم زیر را بیان می کنیم.

جواب یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (خطی یا غیرخطی) را در صورتی **جواب عمومی** نامند که شامل دوثابت مستقل دلخواه باشد[1]. دراینجا منظوراز استقلال آن است که جواب را نتوان به‌صورتی تبدیل نمود که فقط شامل یك ثابت دلخواه باشد ویا اینکه هیچ ثابتی نداشته باشد. هرگاه مقادیر معینی را به این دوثابت نسبت دهیم آنگاه جواب حاصله را **جواب خصوصی** می‌نامند.

این مفاهیم تعمیم بدیهی مفاهیم مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول هستند (بخش ۱.۱).

بعداً نشان داده خواهد شد (دربخشهای ۸.۲ و ۱۱.۲) که‌هرگاه یك‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی (همگن یا غیرهمگن) باشد آنگاه جواب عمومی شامل تمام جوابهای معادله است؛ هرجوابی که درآن ثابت دلخواه وجود نداشته‌باشد را می‌توان با جایگزینی مقادیر معین به جای ثابتهای دلخواه به دست آورد. (به بحث کلی صفحهٔ ۶ بخش ۱.۱ نیز رجوع کنید).

---

۱. مجموعه مقادیر ثابتها را می‌توان درپاره‌ای از موارد، برای احتراز از عبارات موهومی یا سایر تباهیدگیها، محدود درنظر گرفت.

دربخش حاضر معادلهٔ خطی همگن

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \quad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم نشان دهیم که یك جواب عمومی این معادله را می‌توان، با دانستن دوجواب مناسب y_1 و y_2، بسادگی به‌دست آورد.

بدیهی است که هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای (۱) درفاصلهٔ I باشند، آنگاه بنابه قضیهٔ بنیادی ۱ دربخش ۱.۲ عبارت

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \quad (۲)$$

جوابی از (۱) درفاصلهٔ I است؛ دراینجا c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند. از اینرو، بنابه‌تعریف، y یك جواب عمومی (۱) در فاصلهٔ I می‌باشد مشروط برآنکه y را نتوان به‌عبارتی که کمتر از دو ثابت دلخواه دارد تبدیل نمود.

چنین تبدیلی تحت چه شرایطی ممکن خواهد بود؟ برای پاسخ به‌این سؤال اکنون نخست به‌معرفی مفاهیم پایه‌ای، که درسایر بررسیها نیز مهم هستند، می‌پردازیم.

دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در فاصلهٔ باز I، که درآن هردو تابع تعریف‌شده هستند، **وابستهٔ خطی** نامند هرگاه این دوتابع درآن فاصله باهم متناسب باشند یعنی هرگاه[۱]

$$y_1=ky_2 \quad \text{(الف)} \quad \text{یا} \quad y_2=ly_1 \quad \text{(ب)} \quad (۳)$$

برای هر x در I صادق باشد؛ دراینجا k و l اعدادی هستند که می‌توانند صفر باشند یا مخالف صفر. هرگاه این توابع در I متناسب نباشند آنها را **مستقل خطی** در I نامند.

توجه کنید که این مفاهیم وابستگی خطی واستقلال خطی توابع مربوط به یك مجموعهٔ بینهایت (نقاط I) می‌شود ونه صرفاً مربوط به یك *نقطه*.

هرگاه حداقل یکی از توابع y_1 و y_2 در I متحد با صفر باشد آنگاه این توابع در I وابستهٔ خطی هستند. درهرحالت دیگری این توابع در I وابستهٔ خطی هستند اگر و تنها اگر خارج‌قسمت y_1/y_2 در I ثابت باشد. از اینرو اگر y_1/y_2 در I به x بستگی داشته باشد آن‌وقت y_1 و y_2 در I مستقل خطی هستند.

در واقع، اگر $y_1\equiv 0$، آنگاه (۳ الف) برای $k=0$ صادق است؛ و اگر $y_2\equiv 0$ در آن صورت (۳ ب) برای $l=0$ صادق است. بدین ترتیب حکم اول ثابت

---

۱. توجه کنید که هرگاه به‌ازای $k\neq 0$ رابطهٔ (۳ الف) صادق باشد می‌توانیم آن را به k تقسیم نمائیم و $y_2=y_1/k$ را بیابیم در نتیجه دراین‌حالت (۳الف) متضمن (۳ب) می‌شود (با $l=1/k$). معذلك، اگر $y_1\equiv 0$، آنگاه (۳ الف) به‌ازای $k=0$ صادق‌است اما متضمن (۳ب) نیست؛ درواقع، دراین حالت رابطهٔ (۳ب) نیزصادق نیست مگراینکه $y_2=0$ (فاصلهٔ I را **باز** نامند اگر دو نقطهٔ انتهائی آن متعلق به I نباشد و آن را در صورتی **بسته** گویند اگر دو نقطهٔ انتهائی متعلق به I فرض شوند).

می‌شود وسایر حکمها نیز بلافاصله از (۳) نتیجه می‌شود. البته دربیان حکم آخری قبول می‌کنیم که y_1/y_2 ممکن‌است بینهایت شود یعنی به‌ازای مقادیری از x که $y_2=0$ (یا حتی، درنقطه‌ای که y_1 و y_2 مشترکاً صفر باشند، تعریف نشده باشد).

مثال ۱

توابع

$$y_1=3x \quad \text{و} \quad y_2=x$$

برای هرفاصله‌ای وابسته خطی هستند زیرا $y_1/y_2=3=$ ثابت. توابع

$$y_1=x^2 \quad \text{و} \quad y_2=x$$

برای هر فاصله‌ای مستقل خطی هستند زیرا $y_1/y_2=x\neq$ ثابت و همچنین است در مورد توابع

$$y_1=x \quad \text{و} \quad y_2=x+1$$

هرگاه جوابهای y_1 و y_2 در(۲) درفاصلهٔ I وابستهٔ خطی باشند آنگاه (۳الف) یا (۳ ب) صادق است وملاحظه می‌شود که می‌توان (۲) را به‌یکی از صور

$$y=Ay_2 \qquad (A=c_1k+c_2)$$

و

$$y=By_1 \qquad (B=c_1+lc_2)$$

تبدیل نمود که فقط شامل یك ثابت دلخواه است. از اینرو در این حالت (۲) مسلماً یك جواب عمومی (۱) در فاصلهٔ I نیست.

از طرف دیگر اگر y_1 و y_2 درفاصلهٔ I مستقل خطی باشند درآن صورت متناسب نیستند و چنین تبدیلی را نمی‌توان انجام داد. از اینرو دراین حالت (۲) جواب عمومی (۱) درفاصلهٔ I است.

دوجواب مستقل خطی (۱) در I را یك **پایه**[1] یا یك دستگاه **بنیادی** جوابهای (۱) در I نامند. با به‌کار بردن این مفهوم می‌توانیم نتایج را به ترتیب زیرفرموله کنیم.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی، پایه)

جواب

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \qquad (c_1 \text{ و } c_2 \text{ دلخواه هستند})$$

---

۱. خواننده‌ای که با مفهوم برداری (بخش ۶.۴) آشنا باشد توجه خواهدکردکه بنا به قضیهٔ بنیادی ۱ بخش ۱.۲ جوابهای (۱) درفاصلهٔ I تشکیل یك‌فضای برداری رامی‌دهند وازدیدگاه جبر خطی یك پایهٔ y_1 ، y_2 پایه‌ای از آن فضای برداری است.

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۱) در فاصلهٔ I از محور x هاست اگر و تنها اگر توابع y_1 و y_2 یك پایهٔ جوابهای (۱) درفاصلهٔ I را تشکیل بدهند.

y_1 و y_2 چنین پایه‌ای‌را تشکیل می‌دهند اگر وتنها اگرخارج‌قسمت[1] آنها، y_1/y_2 درفاصلهٔ I ثابت نبوده بلکه به x بستگی داشته باشد.

مثال ۲

توابع

$$y_2=e^{-2x} \quad \text{و} \quad y_1=e^{x}$$

که درمثال ۱ بخش ۲.۲ بررسی شدند جوابهای

$$y''+y'-2y=0$$

هستند. چون y_1/y_2 ثابت نیست این جوابها تشکیل یك پایه را می‌دهند.وجواب‌عمومی نظیرشان به‌ازای هر x عبارت است از

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$$

مثال ۳

توابع

$$y_2=3e^{x} \quad \text{و} \quad y_1=e^{x}$$

جوابهای معادلهٔ مثال ۲ بخش ۲.۲ هستند اما ازآنجائی‌که خارج قسمت آنها ثابت است مستقل خطی نیستند وپایه‌ای را تشکیل نمی‌دهند.

درمورد معادلهٔ مرتبهٔ اول جواب عمومی‌شامل یك‌ثابت‌دلخواه بود و برای به‌دست آوردن جواب خصوصی به‌یك شرط احتیاج داشتیم. درحالت فعلی دو ثابت دلخواه‌داریم وبه دو شرط نیاز داریم. دربیشترکاربردها این شرایط به‌صورت

$$y(x_0)=K\,, \qquad y'(x_0)=L \tag{۴}$$

هستندکه درآنها $x=x_0$ یك نقطهٔ داده شده و K و L اعداد مفروضی هستند. ازاینرو درجستجوی جواب خصوصی‌ای از(۱) هستیم‌که در x_0 مقدارآن K ومقدار مشتق‌آن L باشد. شرایط(۴) را **شرایط اولیه** نامند. معادلهٔ(۱) وشرایط(۴) جمعاً‌مسئلهٔ با **مقدار اولیه** را تشکیل می‌دهند.

---

۱. البته در اینجا حالت بدیهی $y_2\equiv 0$ راکه درآن y_1 و y_2 تشکیل پایه‌ای نمی‌دهند در نظر نگرفته‌ایم و همچنین می‌پذیریم‌که y_1/y_2 ممکن است بینهایت شود (یعنی به ازای مقادیری از x که $y_2=0$ شود) ویا حتی نامعین باشد واین درصورتی است‌که y_1 و y_2 هردو به‌ازای بعضی مقادیر x صفر شوند.

مطلب را با مثالی نوعی توضیح می‌دهیم.

مثال۴. مسئلهٔ با مقدار اولیه

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y''+y'-۲y=۰\,,\qquad y(۰)=۴\,,\qquad y'(۰)=۱$$

یك جواب عمومی معادله عبارت است از (به‌مثال ۲ رجوع کنید)

$$y(x)=c_۱e^{x}+c_۲e^{-۲x}$$

از اینرو بنابه‌شرط اولیهٔ نخست داریم $y(۰)=c_۱+c_۲=۴$. مشتقگیری نتیجه می‌دهد

$$y'(x)=c_۱e^{x}-۲c_۲e^{-۲x}$$

وازآنجا باتوجه به‌دومین‌شرط اولیه خواهیم داشت $y'(۰)=c_۱-۲c_۲=۱$. رویهمرفته به‌دست می‌آید $c_۱=۳$ و $c_۲=۱$ وجواب عبارت است از

$$y(x)=۳e^{x}+e^{-۲x}$$

یادآور می‌شویم که بعضی‌کاربردها نوع دیگری از شرایط را ایجاب می‌نمایند یعنی

$$y(A)=k_۱\,,\qquad y(B)=k_۲ \qquad (۵)$$

این شرایط را شرایط مرزی نامند زیرا به‌دوانتهای A و B (نقاط مرزی A و B) ازیك فاصلهٔ I مربوط می‌شوند. جواب (۱) درفاصلهٔ I را باید طوری معین نمود که در (۵) صدق کند. معادلهٔ(۱)وشرایط(۵) تشکیل به‌اصطلاح‌یك **مسئلهٔ با مقدار مرزی** را می‌دهند.

به‌عنوان نمونه یك مسئلهٔ با مقدار مرزی عبارت است از

$$y''+y=۰\,,\qquad y(۰)=۳\,,\qquad y(\pi)=-۳$$

یك جواب چنین است

$$y=۳\cos x+c_۲\sin x$$

دراینجا $c_۲$ هنوز دلخواه است. این تعجب‌آور است. البته دلیلش آنست‌که $\sin x$ در صفر و π برابر صفر است. خواننده ممکن است نتیجه بگیرد و ثابت کند (مسئلهٔ ۳۳) که جواب مسئلهٔ با مقدارمرزی (۱) و (۵) فقط درصورتی یکتاست‌که هیچ جواب $y\not\equiv ۰$ از (۱) در $y(A)=y(B)=۰$ صدق نکند.

ما حالا برای ادامه بحث دربارهٔ معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت آماده‌شده‌ایم وبررسیهای نظری بیشتر را تا بخش ۸.۲ به‌تعویق می‌اندازیم.

مسائل بخش ۳.۲

آیا توابع زیر درفاصلهٔ داده شده وابستهٔ خطی یا مستقل خطی هستند؟

۱. $e^{x} \quad , \quad e^{-x}$ درهرفاصله

۲. $e^{\lambda_1 x} \quad , \quad e^{\lambda_2 x} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$ درهرفاصله

۳. $x \quad , \quad x^2 \qquad (-1 < x < 1)$

۴. $x \quad , \quad x+1 \qquad (0 < x < 1)$

۵. $x^2-2 \quad , \quad 4-2x^2 \qquad (0 < x < 1)$

۶. $2\sin x \quad , \quad \sin 2x \qquad (0 < x < 2\pi)$

۷. $\sin 2x \quad , \quad \cos 2x \qquad (0 < x < \pi)$

۸. $\sin 2x \quad , \quad \cos(2x+\pi/2) \qquad (x > 0)$

۹. $|x|x \quad , \quad x^2 \qquad (0 < x < 1)$

۱۰. $|x|x \quad , \quad x^2 \qquad (-1 < x < 1)$

۱۱. $\ln x \quad , \quad \ln x^2 \qquad (x > 1)$

۱۲. $\ln 2x \quad , \quad 2\ln x \qquad (x > 1)$

۱۳. $e^{\lambda x} \quad , \quad xe^{\lambda x}$ درهرفاصله

۱۴. $\sin 2x \quad , \quad \sin x \cos x$ درهرفاصله

ثابت‌کنید و باذکرمثالهای ساده، و رسم نمودار توضیح دهیدکه :

۱۵. هرگاه y و w درفاصلهٔ I مستقل خطی باشند،آنگاه y و w درهر فاصلهٔ شامل I، که درآن فاصله تعریف شده باشند، مستقل خطی‌اند.

۱۶. y و w درمسئلهٔ ۱۵ می‌توانند دریك زیرفاصلهٔ I وابستهٔ خطی باشند.

۱۷. اگر y و w دریك فاصلهٔ I وابستهٔ خطی باشند درهرزیرفاصلهٔ I وابستهٔ خطی‌اند.

۱۸. y و w درمسئلهٔ ۱۷ می‌توانند درفاصله‌ای شامل I مستقل خطی باشند.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱۹. $y''-25y=0$

۲۰. $y''-3y'+2y=0$

۲۱. $y''-3y'=0$

۲۲. $4y''+y=0$

۲۳. $y''+2y'-15y=0$

۲۴. $y''+y'-6y=0$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

.۲۵ $y''-4y'+3y=0, \quad y(0)=-1, \quad y'(0)=1$

.۲۶ $y''+2y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2$

.۲۷ $y''-y=0, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=0$

.۲۸ $y''+y'-2y=0, \quad y(0)=4, \quad y'(0)=-8$

مسائل با مقدار مرزی زیر را حل کنید.

.۲۹ $y''-4y=0, \quad y(-2)=y(2)=\cosh 4$

.۳۰ $y''-2y'=0, \quad y(0)=0, \quad y(1/2)=e-1$

.۳۱ $3y''-8y'-3y=0, \quad y(-3)=e, \quad y(3)=1/e$

.۳۲ $y''-y'-2y=0, \quad y(0)=3, \quad y(1)=2e^2+1/e$

.۳۳ نشان دهید که جواب مسئلهٔ با مقدار مرزی (۱) و (۵) یکتاست اگر وتنها اگر هیچ جواب $y \not\equiv 0$ از (۱) در $y(A)=y(B)=0$ صدق نکند.

.۳۴ به‌تفصیل ثابت کنید که هرگاه y_1 و y_2 درفاصله‌ای مانند I مستقل خطی باشند‌آنگاه $c_1y_1+c_2y_2$ با c_1 و c_2 دلخواه را نمی‌توان بـه صورتی تبدیل نمود که شامل کمتر از دو ثابت دلخواه باشد.

.۳۵ هرگاه y_1 و y_2 پایه‌ای برای (۱) درفاصلهٔ I باشند نشان دهید که $y_3=y_1+y_2$ و $y_4=y_1-y_2$ پایه‌ای برای (۱) درفاصلهٔ I هستند. چند مثال بیاورید.

.۳۶ هرگـاه y_1 و y_2 پایه‌ای برای (۱) در فاصله‌ای مانند I باشند نشان دهید کـه $y_3=\alpha y_1+\beta y_2$ و $y_4=\gamma y_1+\delta y_2$ پایه‌ای برای (۱)درفاصلهٔ I هستند اگر وتنها اگر $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت $y''+ay'+by=0$ را بیابید که درآن توابع داده شده درزیر یك پایه باشند. با استفاده ازقضیهٔ ۱ استقلال خطی را بیازمایید.

.۳۷ $e^{i\omega x}, \quad e^{-i\omega x} \quad (\omega \neq 0)$.۳۸ $1, \quad e^{-4x}$

.۳۹ $e^{(-3+i)x}, \quad e^{(-3-i)x}$.۴۰ $e^{(2+i)x}, \quad e^{(2-i)x}$

۴.۲ ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مختلط، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصه

از بخش ۲.۲ متذکر می‌شویم کـه یك معادلهٔ مرتبه دوم همگن با ضرایب حقیقی a و b

به‌صورت زیر است

$$y''+ay'+by=0 \qquad (1)$$

تابع

$$y=ce^{\lambda x}، \qquad (2)$$

جوابی برای (۱) است درصورتیکه λ یك ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصهٔ زیر باشد

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \qquad (3)$$

این ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4b}), \quad \lambda_2=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4b}) \qquad (4)$$

چون a و b حقیقی هستند معادلهٔ مشخصه ممکن است

(حالت ۱) دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد،

(حالت ۲) دو ریشهٔ مختلط مزدوج داشته باشد،

(حالت ۳) یك ریشهٔ حقیقی مضاعف داشته باشد.

این نکته‌ای است کـه در بخش ۲.۲ به آن رسیدیم. حال می‌توانیم این حالات را بطور جداگانه بحث کنیم.

حالت ۱. دو ریشهٔ حقیقی متمایز. یك پایه درهر فاصله عبارت است از

$$y_1=e^{\lambda_1 x}, \quad y_2=e^{\lambda_2 x}$$

درواقع، استقلال خطی از این امر ناشی می‌شود که y_1/y_2 درهیچ فاصله‌ای ثابت‌نیست. جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x} \qquad (5)$$

مثال ۱. جواب عمومی درحالتی‌که ریشه‌ها حقیقی و متمایزاند

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y''+y'-2y=0$$

معادلـهٔ مشخصهٔ $\lambda^2+\lambda-2=0$ دو ریشهٔ ۱ و ۲ ــ دارد بنابـراین جواب عمومی عبارت است از

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$$

حالت ۲. ریشه‌های مختلط. ریشه‌های مختلط باید مزدوج باشند یعنی،

$$\lambda_1 = p+iq\,, \qquad \lambda_2 = p-iq$$

که درآن p و q حقیقی‌اند و $q \neq 0$. این مطلب ، چنانچه از جبر می‌دانیم ، از فرض حقیقی بودن a و b نتیجه می‌شود. از اینرو نخست پایهٔ

$$y_1 = e^{(p+iq)x}\,, \qquad y_2 = e^{(p-iq)x}$$

شامل دو تابع مختلط را به‌دست می‌آوریم. از نقطه‌نظر عملی به دست آوردن جوابهای حقیقی از این جوابهای‌موهومی بسیار مورد توجه است.

این عمل را با به‌کار بردن فرمول اویلر[1]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

که درآنها $\theta = qx$ است می‌توانیم، یك بار وبرای همیشه، انجام دهیم. درواقع ازاولین فرمول اویلربه‌دست می‌آوریم

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i\sin qx)$$

و ازدومین فرمول نتیجه می‌شود

$$y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px}e^{-iqx} = e^{px}(\cos qx - i\sin qx)$$

با جمع وتفریق این دوعبارت نسبت به y_1 و y_2 نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px}\cos qx$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{px}\sin qx$$

دو تابع سمت راست مقادیرحقیقی دارند وبنابه‌قضیهٔ بنیادی ۱ بخش ۱.۲ نتیجه‌می گیریم که این دو تابع جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) هستند. از آنجاکه خارج قسمت آنهادر هیچ فاصله‌ای ثابت نیست درهر فاصله‌ای مستقل خطی هستند. از اینرو یك پایه برای هر فاصله درحالتی‌که ریشه‌ها موهومی‌اند عبارت است از

$$e^{px}\cos qx\,, \quad e^{px}\sin qx$$

جواب عمومی متناظر عبارت است از

---

۱. دانشجویانی‌که با این دستورهای مهم از حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی آشناهستند اثباتی دربخش۷.۱۲ خواهند یافت، یك دفعه‌که (۶) را به‌دست‌آوردیم می‌توانیم مستقیماً تحقیق کنیم‌که حالت فعلی در (۱) صدق می‌کند.

$$y(x)=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx) \tag{۶}$$

که درآن A و B ثابتهای دلخواه هستند.

مثال ۲. جواب عمومی درحالتی که ریشه‌ها مختلط مزدوج‌اند.

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$y''-۲y'+۱۰y=۰$$

معادلهٔ مشخصهٔ

$$\lambda^۲-۲\lambda+۱۰=۰$$

دارای ریشه‌های

$$\lambda_۲=p-iq=۱-۳i \quad و \quad \lambda_۱=p+iq=۱+۳i$$

است. بنابراین $p=۱$ و $q=۳$. نتیجه اینکه پایه عبارت است از

$$e^x\cos ۳x\,, \qquad e^x\sin ۳x$$

جواب عمومی متناظر چنین است

$$y=e^x\,(A\cos ۳x+B\sin ۳x)$$

مثال ۳. یك مسئله با مقدار اولیه

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y''-۲y'+۱۰y=۰\,, \qquad y(۰)=۴\,, \qquad y'(۰)=۱$$

این‌معادله نظیر مثال قبلی است. ازاینرومی‌توانیم جواب عمومی ومشتق آن راکه‌هم‌اکنون به‌دست آورده‌ایم درنظر بگیریم

$$y'(x)=e^x\,(A\cos ۳x+B\sin ۳x-۳A\sin ۳x+۳B\cos ۳x)$$

از y و y' وشرایط اولیه نتیجه می‌شود

$$y(۰)=A=۴$$

$$y'(۰)=A+۳B=۱$$

پس $A=۴$ و $B=-۱$ وجواب عبارت است از

$$y=e^x\,(۴\cos ۳x-\sin ۳x)$$

مثال ۴

جواب عمومی معادلهٔ

(ω ثابت ومخالف صفر است) $$y''+\omega^2 y=0$$
عبارت است از

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

حالت ۳. ریشه‌های مضاعف. بعضی اوقات این حالت را **حالت بحرانی** می‌نامند. از (۴) می‌بینیم که این حالت وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که مبین معادلهٔ مشخصهٔ (۳) صفر باشد، یعنی

$$a^2-4b=0 \quad \text{واز آنجا} \quad b=\frac{1}{4}a^2$$

بدین‌ترتیب (۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$y''+ay'+\frac{1}{4}a^2y=0 \tag{۷}$$

ریشهٔ مضاعف عبارت است از $\lambda=-a/2$ ودروهلهٔ اول فقط یك جواب داریم

$$y_1=e^{\lambda x} \qquad \left(\lambda=-\frac{a}{2}\right)$$

برای یافتن جواب دیگر، y_2، می‌توانیم روش تغییر پارامترها را به‌ترتیب زیربه‌کار بریم (به بخش ۸.۱ رجوع کنید)

$$y_2(x)=u(x)y_1(x) \quad \text{که درآن} \quad y_1(x)=e^{-ax/2}$$

باید u را معین کنیم. با قرار دادن y_2 ومشتقات آن در (۷) ومرتب کردن عبارات به‌دست می‌آوریم

$$u\left(y_1''+ay_1'+\frac{1}{4}a^2y_1\right)+u'(2y_1'+ay_1)+u''y_1=0$$

چون y_1 یك جواب است عبارت داخل اولین پرانتز صفر می‌شود واز آنجائی‌که

$$2y_1'=2\left(-\frac{a}{2}\right)e^{-ax/2}=-ay_1$$

عبارت داخل پرانتز دوم نیزصفراست و معادله به $u''y_1=0$ تحویل می‌یابد. از این‌رو داریم $u''=0$. یك جواب عبارت از $u=x$ است. درنتیجه

$$y_2(x)=xe^{\lambda x} \qquad \left(\lambda=-\frac{a}{2}\right)$$

y_1 و y_2 درهرفاصله‌ای مستقل خطی‌اند زیرا خارج‌قسمت آنها، $y_2/y_1=x$، ثابت نیست از اینرو درحالت ریشهٔ مضاعف پایهٔ جواب (۱) درهرفاصله عبارت است از

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x} \qquad \left(\lambda=-\frac{a}{2}\right)$$

جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x} \qquad \left(\lambda=-\frac{a}{2}\right) \tag{8}$$

توجه کنید که هرگاه λ یك ریشهٔ سادهٔ (۳) باشد آنگاه (۸) جوابی برای (۱) **نیست.**

مثال ۵. جواب عمومی درحالت ریشهٔ مضاعف

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y''+8y'+16y=0$$

معادلهٔ مشخصه دارای ریشهٔ مضاعف $\lambda=-4$ است. از اینرو یك پایه عبارت است از

$$e^{-4x}, \qquad xe^{-4x}$$

وجواب عمومی متناظر با آن چنین می‌شود

$$y=(c_1+c_2x)e^{-4x}$$

مثال ۶. یك مسئلهٔ با مقدار اولیه

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$y''-4y'+4y=0, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=1$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^{2x}$$

با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$y'(x)=c_2e^{2x}+2(c_1+c_2x)e^{2x}$$

حالت	ریشه‌های (۳)	پایهٔ (۱)	جواب عمومی (۱)
۱	حقیقی متمایز λ_1، λ_2	$e^{\lambda_1x}, \ \lambda_2x$	$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2{}^{\lambda_2x}$
۲	مختلط مزدوج $\lambda_1=p+iq, \ \lambda_2=p-iq$	$e^{px}\cos qx$ $e^{px}\sin qx$	$y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$
۳	ریشهٔ حقیقی مضاعف $\lambda(=-a/2)$	$e^{\lambda x}, \ xe^{\lambda x}$	$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

از این رابطه وشرایط اولیه نتیجه می‌شود که

$$y(۰)=c_۱=۳, \quad y'(۰)=c_۲+۲c_۱=۱$$

از این‌رو $c_۱=۳$ و $c_۲=-۵$ وجواب عبارت است از

$$y=(۳-۵x)e^{۲x}$$

بدین ترتیب بحث دربارهٔ هرسه حالت‌کامل می‌شود ومی‌توانیم نتایج را به‌صورت جدول صفحهٔ قبل جمعبندی کنیم.

مسائل بخش ۴.۲

تحقیق کنید که معادلات زیر جوابهای معادلات دیفرانسیل داده شده هستند و به‌کمك آنها یك جواب عمومی با مقدار حقیقی، به‌صورت (۶)، به‌دست بیاورید.

۱. $y=c_۱e^{i\omega x}+c_۲e^{-i\omega x}, \quad y''+\omega^۲y=۰$

۲. $y=c_۱e^{۴ix}+c_۲e^{-۴ix}, \quad y''+۱۶y=۰$

۳. $y=c_۱e^{-(۲+۲i)x}+c_۲e^{-(۲-۲i)x}, \quad y''+۴y'+۸y=۰$

۴. $y=c_۱e^{-(\alpha-i)x}+c_۲e^{-(\alpha+i)x}, \quad y''+۲\alpha y'+(\alpha^۲+۱)y=۰$

۵. $y=c_۱e^{(۱+۳i)x}+c_۲e^{(۱-۳i)p}, \quad y''-۲y'+۱۰y=۰$

بیان‌کنید که آیا معادلهٔ داده شده متناظر با حالات ۱ ، ۲ یا ۳ است وجوابی عمومی‌شامل توابع با مقدار حقیقی را پیدا کنید.

۶. $y''-۲y'-۳y=۰$

۷. $y''+\pi^۲y=۰$

۸. $y''-۲y'+y=۰$

۹. $y''+۶y'+۹y=۰$

۱۰. $y''-۶y'+۲۵y=۰$

۱۱. $۲y''+۳y'-۲y=۰$

۱۲. $y''+۲y'+(\pi^۲+۱)y=۰$

۱۳. $۴y''-۴y'+y=۰$

۱۴. $y''+۲ky'+k^۲y=۰$

۱۵. $۸y''-۲y'-y=۰$

۱۶. با فرض آنکه (۶) جوابی از (۱) باشد a و b را برحسب p و q بیان کنید.

معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۱) طوری پیدا کنید که y یك جواب عمومی باشد

۱۷. $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$

۱۸. $y=e^{-۲x}(A\cos\sqrt{۳}x+B\sin\sqrt{۳}x)$

۱۹. $y=(c_1+c_2x)e^{4x}$

۲۰. $y=(c_1+c_2x)e^{-x/2}$

۲۱. $y=A\cosh 3x+B\sinh 3x$

۲۲. $y=e^{-x/2}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

۲۳. $y=c_1+c_2e^{4x}$

۲۴. $y=(c_1+c_2x)e^{kx}$

۲۵. روش تغییر پارامترها را در مورد $y''-2y'+y=0$ ، با استفاده از $y_1=e^x$ ، به‌کار برید.

۲۶. روش تغییر پارامترها را در مورد $y''+10y'+25y=0$ ، با استفاده از $y_1=e^{-5x}$ ، به‌کار برید.

۲۷. مستقیماً تحقیق کنید در حالت ریشهٔ مضاعف، $xe^{\lambda x}$ که در آن $\lambda=-a/2$، جوابی از (۱) است.

۲۸. تحقیق کنید که هر گاه (۱) ریشهٔ مضاعف نداشته باشد آنگاه $xe^{\lambda x}$ جواب (۱) نیست.

معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت (۱) چنان پیدا کنید که در آن y داده شده یك جواب عمومی باشد و ثابتها را طوری معین نمایید که شرایط اولیهٔ داده شده صادق باشند.

۲۹. $y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-3$

۳۰. $y=(c_1+c_2x)e^{2x},\quad y(-1)=0,\quad y'(-1)=1/e^2$

۳۱. $y=e^{x}(A\cos \pi x+B\sin \pi x),\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1-\pi$

۳۲. $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1-\pi$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۳۳. $y''-4y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=4$

۳۴. $y''+4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=6$

۳۵. $y''-6y'+9y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=8$

۳۶. $y''+2y'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2$

۳۷. $y''+4y'+5y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-3$

۳۸. $4y''+4y'+y=0,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=1$

۳۹. $y''-3y'+2y=0\,,\quad y(0)=-1\,,\quad y'(0)=0$

۴۰. مثال ۳ را در نظر بگیرید و با جواب عمومی دیگری شروع کنید، مثلا

$$y(x)=c_1 e^{(1+3i)x}+c_2 e^{(1-3i)x}$$

نشان دهید که از شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم $c_1=2+i/2$ و $c_2=2-i/2$ و جواب خصوصی حاصل را می‌توان طوری ساده نمود که با مثال ۳ همانند شود. این کار روشن می‌نماید که انتخاب یك جواب عمومی ضروری نیست.

۵.۲ عملگرهای دیفرانسیل

منظور از یك عملگر تبدیلی است که تابعی را به تابع دیگر تبدیل نماید. عملگرها و تکنیکهای مربوطه («روشهای عملیاتی») نقش روزافزونی را در ریاضیات مهندسی بازی می‌کنند.

مشتقگیری اشاره برعملگری به‌شکل‌زیر دارد. فرض کنید D معرف مشتقگیری نسبت به x باشد یعنی

$$Dy=y'$$

D یك‌عملگراست که y را (که مشتقپذیرفرض می‌شود) به‌مشتق‌خود y' تبدیل می‌نماید. مثلا

$$D(x^2)=2x\quad,\quad D(\sin x)=\cos x$$

با دوبار به‌کار بردن D مشتق دوم $D(Dy)=Dy'=y''$ را به دست می‌آوریم. بسادگی می‌نویسیم $D(Dy)=D^2y$ ، بنابراین

$$Dy=y'\quad,\quad D^2y=y''\quad,\quad D^3y=y'''\quad,\quad \cdots$$

بطور کلیتر

$$L=P(D)=D^2+aD+b \qquad (1)$$

را عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نامند. دراینجا a و b ثابت هستند. p مبین « چندجمله‌ای » و L بمعنی «خطی» است (که درزیر تشریح‌شده است). درصورتی که L روی یك‌تابع y (که دوبار مشتقپذیر فرض می‌شود) اعمال گردد نتیجه می‌شود

$$L[y]=(D^2+aD+b)\,y=y''+ay'+by \qquad (2)$$

L یك عملگرخطی است. بنابه‌تعریف این بدان‌مفهوم است که به‌ازای هردوعدد ثابت α و β و هر دوتابع y و w که L روی آنها قابل اعمال باشد داریم

$$L[\alpha y+\beta w]=\alpha L[y]+\beta L[w]$$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔدوم خطی همگن $y''+ay'+by=0$ را حالا می‌توان به‌سادگی چنین نوشت

$$L[y]=P(D)[y]=0 \qquad (۳)$$

به‌عنوان مثال

$$L[y]=(D^2+D-6)y=y''+y'-6y=0 \qquad (۴)$$

نظر به‌اینکه

$$D[e^{\lambda x}]=\lambda e^{\lambda x}, \qquad D^2[e^{\lambda x}]=\lambda^2 e^{\lambda x},$$

از (۲) و (۳) داریم

$$P(D)[e^{\lambda x}]=(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda x}=P(\lambda)e^{\lambda x}=0 \qquad (۵)$$

و این مؤید نتیجهٔ بخش قبل است که گفتیم $e^{\lambda x}$ وقتی و تنها وقتی جوابی از (۳) است که λ جوابی از معادلهٔ مشخصهٔ $P(\lambda)=0$ باشد. هرگاه $P(\lambda)$ دو ریشهٔ مختلف داشته باشد یك پایه به دست می‌آوریم. هرگاه $P(\lambda)$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد ما به جواب مستقل دیگری نیاز داریم. با مشتقگیری از (۵) نسبت به λ و تعویض مشتق نسبت به λ و x به‌دست می‌آوریم

$$P(D)[xe^{\lambda x}]=P'(\lambda)e^{\lambda x}+P(\lambda)xe^{\lambda x}=0$$

که در آن $P'=dP/d\lambda$. برای ریشهٔ مضاعف، $P(\lambda)=P'(\lambda)=0$. این نشان می‌دهد که جواب مطلوب دوم $xe^{\lambda x}$ است که با جایگزینی قابل تأیید است.

$P(\lambda)$ در عرف عام جبر یك چندجمله‌ای برحسب λ است. گذاشتن D به جای λ «چندجمله‌ای عملگر» $P(D)$ را داریم. نکتهٔ این «حساب عملیاتی» این است که با $P(D)$ می‌توان درست مانند یك کمیت جبری رفتار کرد. بخصوص می‌توانیم روی آن اعمال فاکتورگیری انجام دهیم. برای روشن شدن مطلب

$$(D+3)(D-2)=D^2+D-6$$

راکه در (۴) آمده است درنظر بگیرید. بنابه‌تعریف $(D-2)y=y'-2y$. از اینرو

$$\begin{aligned}(D+3)(D-2)y&=(D+3)[y'-2y]\\&=y''-2y'+3y'-6y\\&=y''+y'-6y\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد فاکتورگیری بالا «مجاز» است یعنی، به‌همان نتیجه منجر می‌شود. یك جواب $(D+3)y=0$ عبارت از $y=e^{-3x}$ است. $y=e^{2x}$ جوابی برای $(D-2)y=0$ است. این‌کار پایهٔ به‌دست آمدهٔ قبلی را می‌دهد. نتیجه غیرمنتظره نیست

زیرا همان‌شیوهٔ فاکتورگیری $P(\lambda)=\lambda^{2}+\lambda-6$ را برای عملگر چندجمله‌ای $P(D)$ به‌کار بردیم.

اکنون بدون آنکه وارد جزئیات شویم می‌خواهیم یادآور شویم که روشهای عملگری را برای عملگرهای $M=D^{2}+fD+g$ باضرایب متغیر $f(x)$ و $g(x)$ نیز می‌توان به‌کار برد اما این کار بسیار دشوارتر است و به‌دقت بیشتری نیاز دارد. مثلا $xD\neq Dx$، زیرا

$$xDy=xy' \qquad \text{اما} \qquad Dxy=(xy)'=y+xy'$$

اگر حساب عملیاتی به وضعیتهای ساده‌ای محدود شده بود که دراین بخش نشان داده شده‌اند شاید ارزش یادآوری نمی‌داشتند. درواقع، چنانچه درفصل ۵ خواهیم دید توانایی روش عملگر خطی در مسائل مهندسی پیچیده‌تری نمودار می‌شود.

مسائل بخش ۵.۲

در هرمورد عملگر داده شده را روی هر یك از توابع مفروض اعمال کنید.

۱. $D-4;\quad 4x^{2}-3x,\quad 6e^{2x},\quad \cos x-\sin x$

۲. $D^{2}+3D;\quad \cosh 3x,\quad e^{-x}+e^{2x},\quad 10-e^{-3x}$

۳. $(D-2)(D+1);\quad e^{2x},\quad xe^{2x},\quad e^{-x},\quad xe^{-x}$

۴. $(D+3)^{2};\quad x^{3}+\sin \pi x,\quad e^{-3x},\quad xe^{-3x}$

۵. ثابت کنید که عملگر دیفرانسیل D خطی است.

۶. با انتخاب $\alpha=3$، $\beta=-2$، $y=e^{-2x}$ و $w=\sin x$ خطی بودن L را در (۲) روشن نمایید.

۷. ثابت کنید که عملگر L در (۲) خطی است.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۸. $(D^{2}+4D+4)\,y=0$

۹. $(D^{2}-D-2)\,y=0$

۱۰. $(4D^{2}+12D+13)\,y=0$

۱۱. $(D^{2}+2D+4\pi^{2}-1)\,y=0$

۱۲. $(4D^{2}+20D+25)\,y=0$

۱۳. $(6D^{2}-D-1)\,y=0$

۱۴. بـا محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید کـه $D^{2}[e^{-kx}f(x)]=e^{-kx}(D-k)^{2}f(x)$. با انتخاب $e^{-kx}f(x)=c_{1}+c_{2}x$ نشان دهید که $f(x)$ یك جواب عمومی (۳) در حالت ریشهٔ مضاعف است.

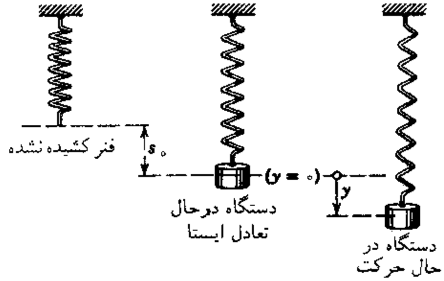
۱۵. هرگاه $(D^2+\alpha D+6)\,y=0$ طوری باشد که معادلهٔ مشخصه دارای ریشه‌های متمایز λ و μ باشد نشان دهید که یك جواب خصوصی عبارت است از

$$y=\frac{1}{\mu-\lambda}(e^{\mu x}-e^{\lambda x})$$

ازاین رابطه با فرض $\lambda \to \mu$ و به کاربردن قانون لوپیتال* نسبت به y که تابعی از μ درنظر گرفته می‌شود جوابی به‌صورت $xe^{\lambda x}$ به‌دست بیاورید.

۶.۲ نوسانات آزاد

معادلات دیفرانسیل همگن خطی با ضرایب ثابت کاربردهای مهندسی مهمی دارند. دراین بخش به بررسی یکی از این کاربردها، که بنیادی است، خواهیم پرداخت. این‌کاربرد از مکانیك گرفته شده است اما بعداً می‌بینیم که با مدارهای الکتریکی شباهت کاملی دارد. در بحثمان تجربهٔ بیشتری دربارهٔ **مدلسازی** یعنی، ساختن‌مدلهای ریاضی دستگاه‌های‌فیزیکی، کسب خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که تمایز ریاضی بین سه حالت (۱، ۲، ۳) بخش ۴.۲ از نظر فیزیکی قابل توجه است زیرا این حالات متناظر با سه نوع حرکت مختلف‌اند.



شکل ۳۴. دستگاه مکانیکی مورد بحث

فنری معمولی را در نظر می‌گیریم که در مقابل فشردگی و کشیدگی مقاوم است و بطور قائم از نقطهٔ ثابتی آویزان شده است (شکل ۳۴). به انتهای فنر وزنه‌ای به‌جرم m وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم جرم فنر در مقابل m ناچیز باشد. هرگاه وزنه را تا فاصلهٔ معینی پائین آورده و رها کنیم حرکتی انجام می‌شود. فرض می‌کنیم حرکت وزنه صرفاً عمودی است.

* l'Hospital

می‌خواهیم حرکت این دستگاه مکانیکی را معلوم کنیم. برای این منظور نیروهایی[1] را که برجسم در حال حرکت اثر می‌کنند در نظر می‌گیریم. این کار منجر به یك معادلهٔ دیفرانسیل می‌شود و با حل این معادله می‌توانیم جابجایی را به صورت تابعی از زمان به‌دست بیاوریم.

می‌توانیم جهت به سمت پائین را جهت مثبت و نیروهایی راکه جهت آنها بطرف پایین است مثبت و نیروهایی راکه جهتشان بطرف بالاست منفی بگیریم.

بارزترین نیروی وارد برجسم نیروی جاذبهٔ ثقلی

$$F_1 = mg \qquad (1)$$

است که درآن m جرم جسم و g ($980\ cm/s^2$) شتاب ثقل است.

نیروی دیگر مؤثر برجسم نیروی فنر است و وقتی ظاهرمی‌شود که فنر کشیده شود. تجربه نشان می‌دهد که این نیرو با تغییرطول فنر متناسب است یعنی

(قانون هوك)[2]

$$F = ks$$

---

۱. مهمترین دستگاههای واحدها در جدول زیر نشان داده شده‌اند. دستگاه مهندسی در حال منسوخ شدن است. ازسال ۱۹۶۰ دستگاه Mks را به‌نام دستگاه بین‌المللی آحاد (با علامت اختصاری دستگاه SI) ، وصورتهای مختصرs را برای ثانیه و N را (بجای nt) برای نیوتن به‌کار می‌برند.

دستگاه واحدها	طول	جرم	زمان	نیرو
دستگاه Cgs	سانتیمتر(cm)	گرم (gm)	ثانیه (sec)	دین (dyne)
دستگاه Mks	متر (m)	کیلوگرم(kg)	ثانیه (sec)	نیوتن (N)
دستگاه مهندسی	فوت (ft)	اسلگ (slug)	ثانیه (sec)	پوند (lb)

$$1\ ft = 30.4800\ cm = 0.304800\ m, \quad 1\ slug = 14594\ g = 14.594\ kg$$

$$1\ lb = 444822\ dyne = 4.44822\ N$$

برای جزئیات بیشتر، به‌عنوان نمونه، مراجعه کنید به:

D. Halliday and R. Resnick, *Physics* New York: Wiley, 1966.
AN American National Standard, ASTM/IEEE Standard Metric Practice, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

۲. رابرت هوك Robert Hook (۱۶۳۵–۱۷۰۳)، فیزیکدان انگلیسی.

که در آن s عبارت است از افزایش طول و ضریب ثابت تناسب یعنی k مدول (ثابت) فنر نامیده می‌شود.

هرگاه $s=1$، آنگاه $F=k$. هراندازه فنر سخت‌تر باشد k بیشتر است.

وقتی که جسم در حال تعادل است وضعیت آن را حالت تعادل استاتیکی می‌نامیم. واضح است که دراین وضعیت فنربه‌اندازهٔ s_0 کشیده شده است به‌طوریکه برآیند نیروی مربوط به فنر و نیروی وزن در (۱) صفر است. بنابراین نیروی فنر رو به بالا اثر می‌کند و اندازهٔ آن برابر وزن جسم است یعنی،

$$ks_0=mg \tag{۲}$$

فرض‌کنید $y=y(t)$ معرف جابجایی جسم از حالت تعادل استاتیکی باشد که جهت مثبت را به‌طرف پایین فرض نموده‌ایم (شکل ۳۴).

بنابرقانون هوك نیروی فنر متناظر با جابجایی y چنین است

$$F_2=-ks_0-ky \tag{۳}$$

که این عبارت ازبرآیند نیروی فنر $-ks_0$ است وقتی که جسم در حالت تعادل استاتیکی است، نیروی اضافی فنر $-ky$، که به علت جابجایی ایجاد شده است. توجه داشته باشید که علامت آخرین جملهٔ (۳) درست انتخاب شده باشد زیرا وقتی y مثبت است $-ky$ منفی است و بنا بر بحثی که انجام شد نشان دهندهٔ نیرویی به سمت بالاست، در حالیکه برای y منفی $-ky$ نمایانگر نیرویی به‌سمت پایین است.

برآیند نیروهای F_1 و F_2 که از (۱) و (۳) نتیجه می‌شوند عبارت است از

$$F_1+F_2=mg-ks_0-ky$$

که با توجه به (۲) چنین می‌شود

$$F_1+F_2=-ky \tag{۴}$$

دستگاه غیر میرا. هرگاه میرایی دستگاه به اندازه‌ای کوچك باشد که بتوان از آن صرفنظرنمودآنگاه (۴) برآیند تمام نیروهای مؤثر برجسم است. اکنون معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از **قانون دوم نیوتن**

نیرو = شتاب × جرم

به‌دست‌آورد که درآن نیرو عبارت‌است ازبرآیند نیروهای مؤثر برجسم در هرلحظه است. در این حالت شتاب عبارت است از $\ddot{y}=d^2y/dt^2$ و برآیند نیروها از (۴) به دست می‌آید. از اینرو

$$m\ddot{y}=-ky$$

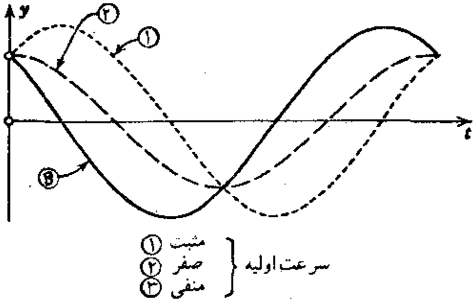
بنابراین حرکت دستگاه مورد نظرمان از معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر به‌دست می‌آید

$$m\ddot{y}+ky=0 \qquad (۵)$$

جواب عمومی عبارت است از

$$y(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \qquad (\omega_0=\sqrt{k/m}) \qquad (۶)$$

حرکت مربوطه را **نوسان همساز** نامند. شکل ۳۵ صورتهای نوعی منحنی (۶) مربوط به شرایط اولیهٔ متفاوت را نشان می‌دهد.



شکل ۳۵. نوسانات همساز

با به‌کاربردن دستور جمع کسینوسها دانشجو می‌تواند تحقیق کند که (۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [همچنین (۱۳) را درضمیمهٔ ۳ ببینید]

$$y(t)=C\cos(\omega_0 t-\delta) \qquad (C=\sqrt{A^2+B^2}\ ,\quad \tan\delta=B/A) \qquad (۶^*)$$

چون دورهٔ تناوب‌توابع مثلثاتی (۶) برابر $2\pi/\omega_0$ است جسم درهرثانیه $\omega_0/2\pi$ نوسان دارد. کمیت $\omega_0/2\pi$ را **بسامد** نوسان نامیده و برحسب دور برثانیه اندازه‌گیری می‌شود. نام جدیدی برای دور برثانیه هرتز[1] (Hz) است.

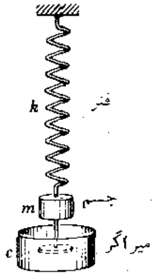
دستگاه میرا. هرگاه جسمی را به یك میراگر وصل کنیم (شکل ۳۶) آنگاه باید میرایی ناشی از چسبندگی را به حساب بیاوریم. نیروی میرایی در جهت خلاف حرکت لحظه‌ای جسم است و فرض می‌کنیم که این نیرو با سرعت جسم $\dot{y}=dy/dt$ متناسب است. به‌طورکلی این‌فرض حداقل برای سرعتهای کم تقریب خوبی‌است. بنابراین‌نیروی

۱. ه. هرتز (H. Hertz)، ۱۸۵۷–۱۸۹۴، فیزیکدان آلمانی.

میرایی به‌شکل زیر است

$$F_3 = -c\dot{y}$$

حال نشان می‌دهیم که ثابت میرایی c مثبت است. هرگاه $\dot{y}$ مثبت‌باشد جسم بطرف پایین حرکت می‌کند (جهت مثبت محور y ها) و $-c\dot{y}$ باید نیرویی بسمت بالا باشد یعنی، بنا بر قرارداد، $-c\dot{y} < 0$ که ایجاب می‌کند $c > 0$. وقتی $\dot{y}$ منفی است جسم به سمت بالا حرکت می‌کند و $-c\dot{y}$ باید نمایانگر نیرویی به سمت پایین باشد یعنی $-c\dot{y} > 0$ و یا $c > 0$.



شکل ۳۶. دستگاه میرا

حال برآیند نیروهای وارد برجسم عبارت‌اند از [به (۴) رجوع کنید]

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - c\dot{y}$$

از اینرو بنا به‌قانون دوم نیوتن،

$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$$

و می‌بینیم که حرکت دستگاه مکانیکی میرا با معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \qquad (7)$$

بیان می‌شود. معادلهٔ مشخصهٔ نظیر آن عبارت است از

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

ریشه‌های این معادله چنین‌اند

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

با استفاده از علامتگذاریهای اختصاری

$$\beta=\frac{1}{2m}\sqrt{c^2-4mk} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{c}{2m} \tag{8}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\lambda_2=-\alpha-\beta \quad \text{و} \quad \lambda_1=-\alpha+\beta$$

شکل جواب (۷) به مقدار میرایی بستگی خواهد داشت و همانند بخش ۲.۲ می‌توانیم سه حالت متمایز زیر را مشخص کنیم:

حالت ۱. $c^2>4mk$ ریشه‌های حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 **(میرایی شدید)**

حالت ۲. $c^2<4mk$ ریشه‌های مختلط مزدوج **(میرایی خفیف)**

حالت ۳. $c^2=4mk$ یك ریشهٔ حقیقی مضاعف **(میرایی بحرانی)**

این سه حالت را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم

حالت ۱. میرایی شدید. وقتی ثابت میرایی c به اندازه‌ای بزرگ باشد که $c^2>4mk$، درآن صورت λ_1 و λ_2 ریشه‌های حقیقی متمایزند. جواب عمومی (۷) عبارت است از

$$y(t)=c_1e^{-(\alpha-\beta)t}+c_2e^{-(\alpha+\beta)t} \tag{9}$$

و می‌بینیم که در این حالت جسم نوسان نمی‌کند. به ازای $t>0$ در (۹) نماها هردو منفی‌اند زیرا $\alpha>0$، $\beta>0$ و $\beta^2=\alpha^2-k/m<\alpha^2$. بنابراین وقتی t به‌سمت بینهایت میل می‌کند هردو عبارت در (۹) به سمت صفر میل می‌کند. عملاً، پس از زمان نسبتاً طولانی وزنه به‌حالت تعادل استاتیکی ($y=0$) می‌رسد. این مطلب ازنظر فیزیکی قابل فهم است زیرا میرایی از دستگاه انرژی می‌گیرد و نیروی خارجی‌ای برای ادامهٔ حرکت وجود ندارد. شکل ۳۷ رابطهٔ (۹) را به ازای بعضی شرایط اولیهٔ نوعی نشان می‌دهد.

حالت ۲. میرایی خفیف. این جالبترین حالت است. هرگاه ثابت میرایی c به‌اندازه‌ای کوچك باشد که $c^2<4mk$ آنگاه β در (۸) موهومی محض است یعنی

$$\beta=i\omega^* \quad \text{که درآن} \quad \omega^*=\frac{1}{2m}\sqrt{4mk-c^2} \tag{10}$$

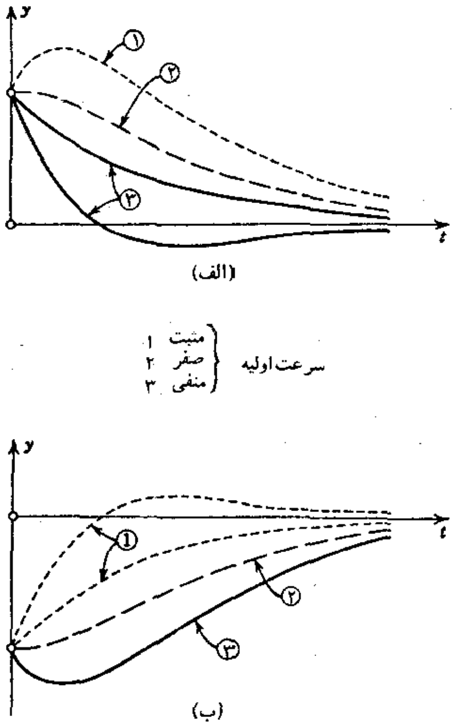
(می‌نویسیم ω^* تا با ω که دربخش ۱۳.۲ به‌کار می‌بریم اشتباه نشود.) ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مزدوج یکدیگرند، یعنی

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega^* \quad , \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$$

و جواب عمومی عبارت است از

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta) \tag{11}$$

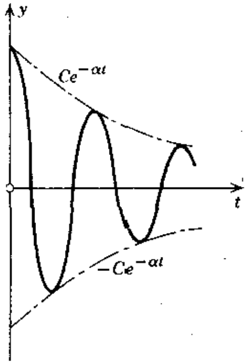
که در آن $C^2 = A^2 + B^2$ و $\tan\delta = B/A$ [مانند (۶*)].



شکل ۳۷. حرکات نوعی درحالت میرایی شدید
(الف) جابجایی اولیهٔ مثبت
(ب) جابجایی اولیهٔ منفی

این جواب نمایانگر نوسانات میراست. چون $\cos(\omega^* t - \delta)$ بین ۱− و ۱+ تغییر می‌کند منحنی جواب، در شکل ۳۸، بین منحنیهای $y = Ce^{-\alpha t}$ و $y = -Ce^{-\alpha t}$ قرار دارد و با این منحنیها وقتی تماس حاصل می‌کند که $\omega^* t - \delta$ مضرب صحیحی از π باشد.

بسامد نوسان $\omega^*/2\pi$ دور بر ثانیه است. از (۱۰) می‌بینیم که هرچقدر $c\ (>0)$ کوچکتر باشد ω^* بزرگتر است و نوسان سریعتر انجام می‌گیرد. وقتی c به‌سمت صفر میل کند ω^* به‌سمت $\omega_0=\sqrt{k/m}$ میل می‌کند که متناظر با نوسانات همساز (۶) است.

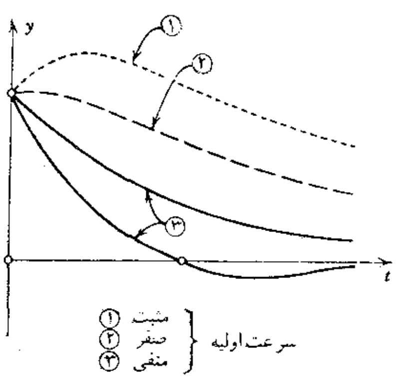


شکل ۳۸. نوسان میرا درحالت ۲

حالت ۳. میرایی بحرانی. اگر $c^2=4mk$ آن وقت $\beta=0$ و $\lambda_1=\lambda_2=-\alpha$، وجواب عمومی عبارت است از

$$y(t)=(c_1t+c_2)\,e^{-\alpha t} \tag{۱۲}$$

چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی‌شود و c_1t+c_2 می‌تواند حداکثر یك صفر مثبت داشته باشد نتیجه می‌شود که حرکت حداکثر یك عبور ازحالت تعادل $(y=0)$ دارد.



شکل ۳۹. میرایی بحرانی

هر گاه شرایط اولیه طوری باشد که c_1 و c_2 هم‌علامت باشند بـه هیچ وجه چنین وضعی پیش نمی‌آید. این شبیه حالت ۱ است. شکل ۳۹ اشکال نوعی (۱۲) را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۶.۲

نوسانات همساز (حرکت غیر میرا)

۱. چگونه بسامد یك نوسان همساز به شرایط اولیه بستگی دارد؟ هر گاه یك جسم ۲۰ نیوتنی با یك جسم ۴۰ نیوتنی تعویض شود و فنر همان فنرقبلی باشد فرکانس چگونه تغییر می‌یابد؟

۲. رابطهٔ (۶) را با فرض $m = 10\,\text{kg}$ و $k = 10\,\text{N/m}$ درنظربگیرید. A و B را طوری پیدا کنید که جابجایی اولیه ۰٫۱ متروسرعت اولیه برابربا (الف) ۰٫۱ — متر برثانیه ؛ (ب) صفر؛ (پ) ۰٫۱ متر برثانیه باشد. این توابع را به شکل (*۶) نمایش دهید ونمودار منحنیهای آنها را رسم کنید.

۳. نمودارنوسان همساز(۶) را به‌ازای مقادیرمختلف مدول‌فنر، مثلاً، $k = 1, 4, 9, 16$ رسم کنید ، فرض براین است که جرم برابر ۱ باشد و حرکت از حالت $y = 1$ و سرعت اولیه صفر شروع شود. فرکانسها چه هستند؟

۴. یك فنر طوری است که وزنهٔ ۲۰ نیوتنی آن را ۹٫۸ سانتیمتر می کشد. انتهای پایینی فنردرحالیکه وزنهٔ ۲۰ نیوتنی به‌آن وصل است به‌اندازهٔ ۵ سانتیمتر پایین کشیده شده و سرعتی برابر $30\,\text{cm/s}$ بـه طرف بالا به‌آن داده می‌شود. موقعیت وزنه را در تمام زمانهای بعدی به فرض آنکه میرایی صفر باشد پیدا کنید.

۵. نوسان همساز (۶) را که درآن جابجایی اولیهٔ y_0 وسرعت اولیهٔ v_0 است معین‌نمایید وآن را به‌شکل (*۶) نمایش دهید.

۶. اگر یك فنر طوری باشد که وزنهٔ $20\,\text{N}$ آن را بـه اندازهٔ ۲ سانتیمتر بکشد بسامد نوسان همساز آن چه اندازه است؟ دورهٔ تناوب چقدر است؟

۷. نشان دهید کـه بسامد یـك نـوسان همساز یك جسم متصل بـه فنر عبارت است از $(\sqrt{g/s_0})/2\pi$ وبنابراین‌دورهٔ تناوب‌آن $2\pi\sqrt{s_0/g}$ است که درآن s_0 افزایش طول نشان داده شده درشکل ۳۴ است.

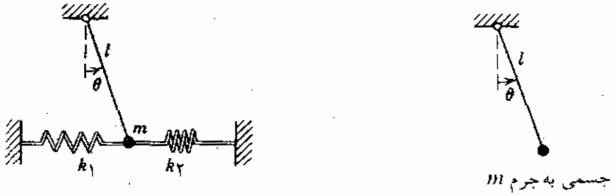
۸. هر گاه جسمی به‌فنری به‌مدول $k_1 = 10$ آویزان باشد واین فنرخود به‌فنری به‌مدول $k_2 = 20$ آویخته شده باشد مدول k این ترکیب فنرها چیست؟

۹. (آونگ) بسامد نوسان آونگ به طول l شکل ۴۰ را تعیین کنید. از مقاومت هوا و وزن میله صرفنظرکنید. فرض کنید A به‌اندازهٔ‌کافی کوچك باشد که $\sin\theta \approx \theta$.

۱۰. ساعتی دارای پاندولی به‌طول ۱ متر است. هردفعه که حرکت آونگ در یك جهت

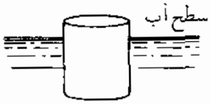
تمام می‌شود درموقع رسیدن به‌حالت اولیه‌اش یك ضربه می‌زند. درهر دقیقه ساعت چند ضربه می‌نوازد؟

۱۱. فرض کنید که دستگاه شکل ۴۱ شامل آونگی نظیر مسئلهٔ ۹ و دو فنر با ثابتهای k_1 و k_2 باشد که به‌جسم مرتعش متصل ودو دیوار قائم است به‌طوری که $\theta = 0$ حالت تعادل استاتیکی است و $\theta(t)$ درحین حرکت کوچك باقی می‌ماند. دورهٔ تناوب T را پیدا کنید.



شکل ۴۱. دستگاه مسئلهٔ ۱۱ — **شکل ۴۰.** آونگ مسئلهٔ ۹

۱۲. یك شناور استوانه‌ای بـه قطر ۶۰ سانتیمتر با محور قائم در آب قرار گرفته است (شکل ۴۲). در صورتی که کمی آن را فشار بدهیم و رها نماییم ارتعاشی با دورهٔ تناوب ۲ ثانیه پیدا می‌کند. وزن جسم شناور را پیدا کنید. راهنمایی: بنا به اصل ارشمیدس* نیروی رانش برابر وزن آب جابه‌جا شده توسط جسم است (که فرض می‌شود قسمتی از آن یا تمام آن درآب فرو رفته باشد).



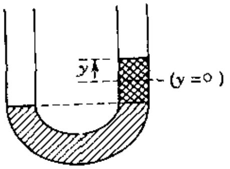
شکل ۴۲. شناور مسئلهٔ ۱۲

۱۳. اگر ۱ لیتر آب بتواند دریك لوله U شکل به‌قطر ۲ سانتیمتر (شکل ۴۳) به طرف بالا وپائین ارتعاش داشته باشد بسامد چقدر است؟ ازاصطکاك صرفنظر کنید.

۱۴. (میرایی) حرکت $y(t)$ دستگاه مکانیکی که با معادلهٔ (۷) توصیف شد برای میرایی درحال افزایش مثلا $c = 0, 1, 2, 10$ را معین کنید ونمودار آن را رسم نمایید. فرض کنید $m = 1$، $k = 1$، جابه‌جایی اولیه ۱ وسرعت اولیه صفر باشد.

---

* Archimedes



شکل ۴۳. لولهٔ مسئلهٔ ۱۳

حرکت میرایی شدید

۱۵. نشان دهید برای آنکه (۹) در شرایط اولیهٔ $y(0)=y_0$ و $v(0)=v_0$ صدق کند باید داشته باشیم

$$c_1=\frac{[(1+\alpha/\beta)y_0+v_0/\beta]}{2} \quad \text{و} \quad c_2=\frac{[(1-\alpha/\beta)y_0-v_0/\beta]}{2}$$

۱۶. نشان دهید که در حالت میرایی شدید، جسم حداکثر یك مرتبه می‌تواند از $y=0$ بگذرد (شکل ۳۷).

۱۷. درمسئلهٔ ۱۶ شرایطی برای c_1 و c_2 پیدا کنید به‌طوری که جسم به‌هیچ‌وجه‌از $y=0$ عبور نکند.

۱۸. نشان دهید که یك حرکت میرایی شدید با جابجایی اولیهٔ صفر نمی‌تواند از $y=0$ بگذرد.

حرکت میرایی خفیف (نوسان میرا)

۱۹. نشان دهید که نوسان میرایی که درشرایط اولیهٔ $y(0)=y_0$ و $v(0)=v_0$ صدق کند عبارت است از

$$y=e^{-\alpha t}(y_0\cos\omega^* t+\omega^{*-1}(v_0+\alpha y_0)\sin\omega^* t$$

۲۰. سه نوسان میرا به‌صورت

$$y=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)=Ce^{-t}\cos(t-\delta)$$

پیدا کنید که از $y=1$ شروع شوند وسرعت اولیهٔ آنها به‌ترتیب ۱ −، ۰، ۱+ باشد. نمودارهای مربوطه را رسم کنید.

۲۱. نشان‌دهید که بسامد $\omega^*/2\pi$ درحرکت میرای‌خفیف با افزایش میرایی کاهش‌می‌یابد.

۲۲. نشان دهید که برای میرایی کوچك داریم

$$\omega^*\approx\omega_0\left(1-\frac{c^2}{8mk}\right)$$

۲۳. مقادیر t نظیر ماگزیمم و می‌نیمم نوسان $y(t)=e^{-t}\sin t$ را معین کنید. با رسم نمودار $y(t)$ نتیجهٔ حاصل را امتحان کنید.

۲۴. نشان دهید که ماگزیمم و می‌نیمم مقادیر یك حرکت میرای خفیف در فواصل زمانی مساوی رخ می‌دهد وفاصلهٔ بین دو ماگزیمم متوالی $2\pi/\omega^*$ است.

۲۵. **(نزول لگاریتمی)** ثابت کنید که نسبت دو دامنهٔ ماگزیمم متوالی دریك نوسان میرا (۱۱) ثابت است، لگاریتم طبیعی این نسبت $\Delta=2\pi\alpha/\omega^*$ است. (Δ را نزول لگاریتمی نوسان نامند.) Δ را درمورد $y=e^{-t}\cos t$ پیدا کنید ومقادیر t متناظر بهماگزیمم ومی‌نیمم را معین نمایید.

۲۶. حرکت میرایی خفیف جسمی به‌جرم $m=0.5$ kg را درنظر بگیرید. هرگاه‌زمان بین دو ماگزیمم متوالی ۱ ثانیه باشد ودامنهٔ ماگزیمم بعداز ۱۰ دور به ۱/۲ مقدار اولیه کاهش یابد ثابت میرایی دستگاه چیست؟

میرایی بحرانی

۲۷. حرکت بحرانی (۱۲) راکه از y_0 با سرعت اولیهٔ v_0 شروع می‌شودپیداکنید.

۲۸. تحت چه شرایطی (۱۲) دریك لحظهٔ $t>0$ دارای یك ماگزیمم یا می‌نیمم‌است؟

۲۹. دامنهٔ ماگزیمم یا می‌نیمم‌را درمسئلهٔ ۲۸ برحسب مقادیر اولیهٔ y_0 و v_0 نمایش‌دهید.

۳۰. **(کمانش یك میله)** معادلهٔ $y''+\gamma^2 y=0$ همچنین‌کاربردهایی داردکه در آنها متغیر مستقل یك متغیر فضایی است (بجای زمان t). شکل ۴۴ مثال مشهوری‌رانشان می‌دهد که عبارت است ازکمانه‌کردن یك میله تحت تأثیر یك نیروی قائم ثابت F که به قسمت بالایی میله اعمال شده است. درمکانیك نشان داده شده است‌که منحنی $y(x)$ مربوط به میلهٔ تحت تأثیربار، یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبه دوم زیراست

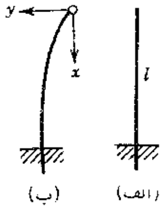
$$EIy''=-Fy$$

E مدول کشسانی مربوط به جنس میله است. I گشتاور لختی سطح مقطع (که دایره‌ای فرض می‌شود) نسبت به محوری است‌که از مرکز دایره می‌گذرد. فرض می‌کنیم E و I ثابت باشند، قسمت پائینی میله درگیر وانتهای بالائی‌آن آزاداست. نشان دهیدکه نسبت به‌مختصات نشان داده شده درشکل ۴۴ ب این فرضها به شرایط

$$y(0)=0\,,\qquad y'(l)=0$$

منجر می‌شودکه درآن l طول میله است وفرض می‌شود y کوچك باشد. یك‌جواب به‌ازای هر F عبارت از $y=0$ است. (شکل ۴۴ الف) اما می‌دانیم که اگر F از یك مقدار بحرانی تجاوزکند تعادل شکل ۴۴ الف دیگر پایدار نیست یعنی هرگاه جزئی جابجایی حادث شود میله به وضع اول بر نمی‌گردد بلکه به صورت منحنی

درمی‌آید. نشان دهید که این نیروی بحرانی عبارت است از $F_{\text{بحرانی}}=(\pi/2l)^2EI$ و $y(x)$ متناظر با این نیرو درشکل ۴۴ ب قسمتی از یك منحنی سینوسی است.



شکل ۴۴. کماقش یك میلهٔ نازك

۷.۲ معادلهٔ کشی

معادلهٔ کشی یا معادلهٔ اویلر[1]

$$x^2y''+axy'+by=0 \qquad (a \text{ و } b \text{ ثابت‌اند}) \tag{1}$$

را می‌توان با عملیات کاملا جبری نیز حل کرد. با جایگزینی

$$y=x^m \tag{2}$$

ومشتقات آن درمعادلهٔ (۱) در می‌یابیم

$$x^2m(m-1)x^{m-2}+ax\,mx^{m-1}+bx^m=0$$

با حذف جملهٔ مشترك x^m، که وقتی $x\neq 0$ باشد صفر نیست، معادلهٔ کمکی

$$m^2+(a-1)m+b=0 \tag{3}$$

را به‌دست می‌آوریم. هرگاه ریشه‌های m_1 و m_2 این معادله متفاوت باشند آنگاه دو تابع

$$y_1(x)=x^{m_1} \quad \text{و} \quad y_2(x)=x^{m_2}$$

بـه ازای همهٔ xهایی که برای آنها این دو تابع تعریف شده‌اند، تشکیل یك پایه برای

---

۱. **لئونارد اویلر** (Leonard Euler) ۱۷۰۷–۱۷۸۳، ریاضیدان خلاق سویسی؛ او تقریباً درتمام رشته‌های ریاضی وکاربردهایش درمسائل فیزیکی منشأ اثر بود. کتابهای مهم او در جبر وحساب دیفرانسیل وانتگرال شامل نتایج متعدد کارهای تحقیقی شخص اوست. ریاضیدان بزرگ فرانسوی **آگوستین لوئی کشی** (Augustin Louis Cauchy)، ۱۷۸۹–۱۸۵۷، پدر آنالیز مدرن است. او تجربهٔ زیادی دربارهٔ نظریهٔ سریهای نامتناهی، آنالیز مختلط ومعادلات دیفرانسیل داشت.

جوابهای (۱) می‌دهند. جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2} \qquad (c_1 \text{ و } c_2 \text{ دلخواه‌اند}) \tag{۴}$$

مثال ۱

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$x^2y''-1.5xy'-1.5y=0$$

معادلهٔ کمکی عبارت است از

$$m^2-2.5m-1.5=0$$

که دو ریشهٔ $m_1=-0.5$ و $m_2=3$ دارد. از اینرو پایه‌ای از جوابهای حقیقی به‌ازای تمام مقادیر مثبت x عبارت است از

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_2=x^3$$

وجواب عمومی متناظر برای تمام آن x ها عبارت است از

$$y=\frac{c_1}{\sqrt{x}}+c_2x^3$$

معادلهٔ کمکی (۳) تنها درصورتی دارای ریشهٔ مضاعف $m_1=m_2$ است که

$$b=\frac{1}{4}(1-a)^2 \quad \text{درآن صورت} \quad m_1=m_2=\frac{1-a}{2}$$

در این حالت بحرانی می‌توانیم با به‌کار بردن روش تغییر پارامترها جواب دومی به‌دست بیاوریم. چگونگی عمل شبیه به‌بخش ۴.۲ است و به‌نتیجهٔ زیر منجر می‌شود (به مسئلهٔ ۱ رجوع شود)

$$y_2=uy_1=(\ln x)\,y_1$$

از اینرو با نوشتن m به‌جای m_1 می‌بینیم که

$$y_1=x^m \quad \text{و} \quad y_2=x^m\ln x \qquad \left(m=\frac{1-a}{2}\right) \tag{۵}$$

جوابهای (۱) درحالتی هستند که (۳) ریشهٔ مضاعف داشته باشد. ازآنجائیکه این جوابها مستقل‌خطی‌اند تشکیل پایه‌ای ازجوابهای حقیقی (۱) برای تمام مقادیرمثبت x می‌دهند و جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$y=(c_1+c_2 \ln x)\, x^m \qquad (6)$$
(c_1 و c_2 دلخواه‌اند)

مثال ۲ جواب عمومی درحالت ریشهٔ مضاعف

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$x^2y''-3xy'+4y=0$$

معادلهٔ کمکی دارای ریشهٔ مضاعف $m=2$ است. از اینرو یك پایهٔ جوابهای حقیقی برای تمام مقادیر مثبت x عبارت است از x^2 ، $x^2 \ln x$ و جواب عمومی متناظر چنین است

$$y=(c_1+c_2 \ln x)\, x^2$$

مسائل بخش ۷.۲

۱. y_2 در (۵) را با روش تغییر پارامترها به‌دست بیاورید.

۲. مستقیماً تحقیق کنید که در حالتی که (۳) ریشهٔ مضاعف داشته باشد تابع y_2 در (۵) جوابی از (۱) است.

۳. نشان دهید که اگر (۳) دو ریشهٔ مختلف m_1 و m_2 داشته باشد توابع $x^{m_1} \ln x$ و $x^{m_2} \ln x$ جوابهای (۱) **نیستند.**

۴. $x^2y''+xy'-y=0$

۵. $x^2y''-3xy'+3y=0$

۶. $x^2y''+xy'-4y=0$

۷. $x^2y''-xy'+y=0$

۸. $(x^2D^2-xD+0.75)\,y=0$

۹. $(xD^2-3D)\,y=0$

۱۰. $(x^2D^2+0.25)\,y=0$

۱۱. $(xD^2+D)\,y=0$

معادلات زیر را به‌صورت (۱) تحویل وحل کنید

۱۲. $(z+1)^2\,y''+5(z+1)\,y'+3y=0$

۱۳. $(2z-3)^2\,y''+7(2z-3)y'+4y=0$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

۱۴. $x^2y''+yy'-0.25y=0 \quad , \quad y(1)=2 \quad , \quad y'(1)=1$

۱۵. $x^2y''-3xy'+4y=0 \quad , \quad y(1)=1 \quad , \quad y'(1)=1$

۱۶. $(x_2D^2+xD-2.25)y=0 \quad , \quad y(1)=2 \quad , \quad y'(1)=0$

۱۷. $(x^2D^2-3xD+3)y=0 \quad , \quad y(1)=0 \quad , \quad y'(1)=-2$

۱۸. نشان دهید که با قرار دادن $x=e^t(x>0)$ معادلهٔ کشی (۱) را می‌توان به‌معادلهٔ $\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0$ ، که ضرایب آن ثابت‌اند، تبدیل نمود.

۱۹. معادلهٔ مسئلهٔ (۱۸) را به‌صورت (۱) بر گردانید.

۲۰. نشان دهید که هر گاه تبدیل مسئلهٔ ۱۸ را به‌کار ببریم آنگاه از (۲) عبارتی به‌صورت (۲)، بخش ۲.۲، نتیجه می‌شود و از (۶)، با صرفنظر کردن از نمادگذاری، به‌عبارتی به‌صورت (۸) بخش ۴.۲ می‌رسیم.

۸.۲ وجود و یکتایی جوابها

یك **مسئلهٔ با مقدار اولیه** برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم شامل معادله و **دو شرط اولیه** است، یکی برای جواب $y(x)$ ودیگری برای مشتق آن $y'(x)$. حال به‌بررسی مسائل با مقدار اولیهٔ به‌صورت

$$(1) \qquad y''=f(x)y'+g(x)y=0, \quad y(x_0)=K_1, \quad y'(0)=K_2$$

می‌پردازیم که شامل یك معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی همگن مرتبهٔ دوم است؛ K_1 و K_2 ثابتهای مفروضی هستند. مهم این خواهد بود که پیوستگی ضرایب f و g برای وجود ویکتایی جواب مسئلهٔ (۱۱)کافی است.

قضیهٔ وجود یکتایی

هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ در یك فاصلهٔ باز I توابعی پیوسته باشند x_0 در I باشد آنگاه مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ (۱) درفاصلهٔ I دارای جواب یکتای $y(x)$ است.

برای اثبات وجود همان ملزومات قضیهٔ وجود دربخش ۱۲.۱ بکار می‌رود ودراینجا بیان نمی‌شود. این را می‌توان درمرجع [B11] ضمیمهٔ ۱ پیدا کرد.

اثبات یکتایی[1]. با فرض آنکه (۱) در فاصلهٔ I دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ داشته باشد نشان می‌دهیم که تفاضل آنها یعنی

$$y(x)=y_1(x)-y_2(x)$$

درفاصلهٔ I متحد با صفر است در آن صورت در فاصلهٔ I، $y_1\equiv y_2$ که یکتایی را ایجاب می‌کند.

از آنجائی که معادلهٔ (۱) همگن وخطی است y یك جواب آن معادله درفاصلهٔ I

۱. این اثبات به‌وسیلهٔ همکارم پرفسور ا. د. تسیبر (A. D. Ziebur) توصیه شد.

است وچون y_1 و y_2 درشرایط اولیهٔ یکسانی صدق می‌کنند y درشرایط زیرصدق‌می‌کند

$$y(x_0)=0\,,\qquad y'(x_0)=0 \tag{۲}$$

تابع

$$z(x)=y(x)^2+y'(x)^2$$

ومشتق آن

$$z'=2yy'+2y'y''$$

را درنظر می‌گیریم. از معادلهٔ دیفرانسیل داریم

$$y''=-fy'-gy$$

با قرار دادن این مقدار درعبارت z' به‌دست می‌آوریم

$$z'=2yy'-2fy'^2-2gyy' \tag{۳}$$

حال چون y و y' حقیقی هستند داریم

$$(y\pm y')^2=y^2\pm 2yy'+y'^2\geqslant 0$$

واز روی این فوراً دو نامساوی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\text{(الف)}\ \ 2yy'\leqslant y^2+y'^2=z \quad \text{و} \quad \text{(ب)}\ \ -2yy'\leqslant y^2+y'^2=z \tag{۴}$$

حال برای آخرین جمله در (۳) داریم

$$-2gyy'\leqslant|-2gyy'|=|g||2yy'|\leqslant|g|z$$

با استفاده از نتایج واعمال (۴ الف) درعبارت $2yy'$ در (۳) پیدا می‌کنیم

$$z'\leqslant z+2|f|y'^2+|g|z$$

یا با نمایش تابع داخل پرانتز با h به‌ازای تمام مقادیر x در I داریم

$$z'\leqslant hz \tag{۵ الف}$$

به‌همین ترتیب از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}-z'&=-2yy'+2fy'^2+2gyy'\\&\leqslant z+2|f|z+|g|z=hz\end{aligned} \tag{۵ ب}$$

نامساویهای (۵ الف) و (۵ ب) با نامساویهای زیر معادلند

$$z'-hz\leqslant 0\,,\qquad z'+hz\geqslant 0 \tag{۶}$$

عوامل انتگرال کننده برای دو عبارت سمت چپ عبارت‌اند از

$$F_۲ = e^{\int h(x)dx} \quad و \quad F_۱ = e^{-\int h(x)dx}$$

چون h پیوسته است انتگرالهای واقع در توان تابع نمایی وجود دارنـد. نظر به اینکه $F_۱$ و $F_۲$ مثبت هستند از (۶) به‌دست می‌آوریم

$$F_۲(z'+hz)=(F_۲z)' \geqslant ۰ \quad و \quad F_۱(z'-hz)=(F_۱z)' \leqslant ۰$$

که این بدان معنی است که درفاصلهٔ I، $F_۱z$ غیرصعودی و $F_۲z$ غیرنزولی است. چون $z(x_۰)=۰$ بنا به (۲)، ازاینرو درصورتی که $x \leqslant x_۰$، به‌دست می‌آوریم

$$F_۱z \geqslant (F_۱z)_{x_۰}=۰ \quad , \quad F_۲z \leqslant (F_۲z)_{x_۰}=۰$$

به‌همین ترتیب درصورتی که $x \geqslant x_۰$ داریم

$$F_۱z \leqslant ۰ \quad , \quad F_۲z \geqslant ۰$$

با تقسیم بر $F_۱$ و $F_۲$ و با توجه به‌اینکه این توابع مثبت هستند رویهمرفته داریم

به‌ازای تمام مقادیر x در I $\quad z \geqslant ۰ \quad , \quad z \leqslant ۰$

و این ایجاب می‌کندکه در فاصلهٔ I داشته باشیم $z=y^۲+y'^۲\equiv ۰$. از این‌رو برای فاصلهٔ I داریم $y\equiv ۰$ و یا $y_۱\equiv y_۲$ است و اثبات به‌اتمام می‌رسد.

بقیهٔ این بخش به‌برخی ازنتایج مهم این قضیه اختصاص داده خواهد شد.

برای آمادگی در بررسی این قسمت به مفاهیم وابستگی و استقلال خطی توابع که دربخش ۳.۲ گفته شد برمی گردیم. فرض کنید $y_۱(x)$ و $y_۲(x)$ توابع مفروضی هستند که درفاصلهٔ باز I تعریف شده‌اند و رابطهٔ

$$k_۱y_۱(x)+k_۲y_۲(x)=۰$$

را در I درنظر بگیرید که درآن $k_۱$ و $k_۲$ اعداد ثابتی هستند که باید تعیین گردند. مسلماً این رابطه به ازای $k_۱=۰$ و $k_۲=۰$ برقرار است. ممکن است بتوانیم یك مقدار $k_۱\neq ۰$ را طوری پیدا کنیم که رابطهٔ فوق در I برقرار باشد. درآن صورت آن را بر $k_۱$ تقسیم می‌کنیم و $y_۱$ را پیدا می‌نمائیم:

$$y_۱=-\frac{k_۲}{k_۱}y_۲$$

به همین ترتیب اگر رابطهٔ بالا به ازای یك $k_۲\neq ۰$ در I برقرار باشد می‌توانیم $y_۲$ را پیدا کنیم:

$$y_۲=-\frac{k_۱}{k_۲}y_۱$$

می‌بینیم که درهر دوحالت y_1 و y_2 درفاصلهٔ I وابستهٔ خطی هستند.

معهذا اگر $k_1=0$ و $k_2=0$ تنها دوعددی باشند که به‌ازای آنها رابطهٔ مذکور درفاصلهٔ I برقرار است نمی‌توان y_1 یا y_2 را پیدا کرد و این توابع درفاصلهٔ I مستقل خطی‌اند.

نتیجه آنکه دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در فاصلهٔ I، که هردو تابع درآن تعریف شده‌اند، وقتی و تنها وقتی وابسته خطی هستند که بتوان ثابتهای k_1 و k_2 را، که هردو صفر نباشند، طوری پیدا کرد که به‌ازای تمام مقادیر در فاصلهٔ I داشته باشیم

$$k_1 y_1(x)+k_2 y_2(x)=0 \qquad (7)$$

ازاین نتیجه دراثبات بعدی استفاده خواهیم کرد.

دربررسیهای بعدی به‌معیار دیگری برای آزمون وابستگی و استقلال خطی دوجواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ یك معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت زیر احتیاج داریم

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \qquad (8)$$

دراین معیار دترمینان

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1 y_2'-y_2 y_1'$$

که دترمینان رانسکی[1] و یا به طور اختصار **رانسکین** y_1 و y_2 نامیده می‌شود به‌کار می‌رود. این را می‌توان به‌طریق زیر شرح داد.

قضیهٔ ۲ (وابستگی و استقلال خطی جوابها)

فرض کنید که ضرایب $f(x)$ و $g(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل (۸) در یك فاصلهٔ باز I پیوسته‌اند. درآن صورت هردو جوابی از (۸) درفاصلهٔ I وابستهٔ خطی‌اند اگر و تنها اگر رانسکین W آنها به ازای مقداری از x در I، مثلاً $x=x_0$، برابر صفر باشد. (هرگاه به ازای $x=x_0$ داشته باشیم $W=0$ آنگاه در I داریم $W\equiv 0$).

اثبات. (الف) فرض می‌کنیم $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دوجواب (۸) در I باشند که وابستهٔ خطی‌اند. در آن صورت دو ثابت k_1 و k_2 که هردو باهم صفر نیستند وجود دارد به‌طوری که

$$k_1 y_1+k_2 y_2=0$$

---

۱. به‌وسیلهٔ **هون**، (Hone)، ۱۷۷۸–۱۸۵۳، که بعداً نام خود رابه‌رانسکی(wronski) تغییر داد، ارائه شد. خواننده بادترمینان مرتبهٔ دوم ازحساب دیفرانسیل‌وانتگرال مقدماتی بایدآشنا باشد؛ در غیر این صورت می‌تواند به بخش ۹.۷ که مستقل از سایر بخشهای فصل ۷ است رجوع کند.

درفاصلهٔ I برقرار باشد. با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' = 0$$

فرض کنید $k_1 \neq 0$. در آن صورت با ضرب کردن معادلهٔ اول در y_2'/k_1 و معادلهٔ دوم در $-y_2/k_1$ و جمع کردن روابط حاصل به‌دست می‌آوریم

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 \quad \text{یعنی} \quad W(y_1, y_2) = 0$$

هرگاه $k_1 = 0$ آنگاه $k_2 \neq 0$ و استدلال شبیه فوق است.

(ب) بعکس، فرض کنید به ازای $x = x_0$ در I داشته باشیم $W(y_1, y_2) = 0$. دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) &= 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \qquad (۹)$$

که درآن k_1 و k_2 مجهولند را در نظر بگیرید. چون دستگاه همگن و دترمینان دستگاه درست برابر رانسکین $W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ است و $W = 0$، دستگاه دارای جواب k_1 و k_2 است که هردو باهم صفر نیستند (به بخش ۹.۷ رجوع شود). با استفاده ازاین دوعدد k_1 و k_2 تابع زیر را درنظر می گیریم

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

بنا به قضیهٔ بنیادی ۱ بخش ۱.۲ تابع $y(x)$ در فاصلهٔ I یك جواب (۸) است. از (۹) می‌بینیم که شرایط اولیهٔ $y(x_0) = 0$ و $y'(x_0) = 0$ در آن صادقند. جواب دیگری برای (۸) که همان شرایط اولیه درآن صدق کند عبارت است از $y^* \equiv 0$. چون f و g پیوسته‌اند قضیهٔ یکتائی قابل اعمال است و نتیجه می گیریم که $y \equiv y^*$ یعنی درفاصلهٔ I

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0$$

و چون k_1 و k_2 هردو صفر نیستند y_1 و y_2 در فاصلهٔ I وابستهٔ خطی هستند. از این گذشته، بنا به این مطلب، و اولین قسمت اثبات، نتیجه می‌شود که در فاصلهٔ I $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

مثال ۱

توابع $y_1 = \cos \omega x$ و $y_2 = \sin \omega x$ جوابهای معادلهٔ زیر هستند

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \neq 0)$$

یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که رانسکین آنها دارای مقدار ω است. پس این توابع پایه‌ای ازجوابها را به‌ازای تمام مقادیر x تشکیل می‌دهند.

مثالهای بیشتری در بخشهای ۳.۲ و ۴.۲ گنجانده شده است. مثال زیر این امر را روشن می‌کندکه فرض پیوستگی ضرایب را درقضیهٔ ۲ نمی‌توان حذف نمود.

مثال ۲

توابع

$$y_\text{۲}=\begin{cases} x^\text{۳} & x\geqslant \text{۰} \\ -x^\text{۳} & x<\text{۰}\end{cases} \quad \text{و} \quad y_\text{۱}=x^\text{۳}$$

جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-\frac{\text{۳}}{x}y'+\frac{\text{۳}}{x^\text{۲}}y=\text{۰} \qquad (\text{۱۰})$$

به ازای تمام مقادیر x هستند و درستی این مطلب را می‌توان به‌سادگی با قراردادن هریك از توابع و مشتقات آنها در (۱۰) تحقیق کرد. خواننده می‌تواند نشان دهدکه این توابع روی محور x ها مستقل خطی‌اند اگرچه رانسکین آنها متحد با صفر است. این با قضیهٔ ۲ تناقضی ندارد زیرا ضرایب (۱۰) در $x=\text{۰}$ پیوسته نیستند.

البته مثال ۲ این مطلب را نیز روشن می‌کندکه اگر $u_\text{۱}$ و $u_\text{۲}$ توابع مشتقپذیری از x باشند شرط $W(u_\text{۱}\ ,\ u_\text{۲})=\text{۰}$ فقط شرط لازم برای وابستگی خطی $u_\text{۱}$ و $u_\text{۲}$ است [چنانچه از قسمت (الف) اثبات قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود] اما این شرط کافی نیست.

حال نشان می‌دهیم معادله‌ای به شکل (۸) که ضرایب آن در یك فاصلهٔ باز I پیوسته‌اند پایه‌ای برای جوابها در I، و در واقع بینهایت از چنین پایه‌ها، دارند.

اثبات. برطبق قضیهٔ وجود نتیجه می‌شود که (۸) دارای جوابی به‌صورت $y_\text{۱}(x)$ است که درشرایط اولیهٔ

$$y_\text{۱}(x_\circ)=\text{۱} \quad , \quad y_\text{۱}'(x_\circ)=\text{۰}$$

صدق می‌کند و نیز جوابی به‌صورت $y_\text{۲}(x)$ داردکه شرایط اولیهٔ

$$y_\text{۲}(x_\circ)=\text{۰} \quad , \quad y_\text{۲}'(x_\circ)=\text{۱}$$

درموردآن‌صادق‌است و $x_\circ$ هرنقطهٔ مشخصی در I است. در $x_\circ$ داریم $W(y_\text{۱},\ y_\text{۲})=\text{۱}$ از این‌رو، بنابرقضیهٔ ۲، دوجواب در فاصلهٔ I مستقل خطی هستند و پایه‌ای برای (۸) در فاصلهٔ I تشکیل می‌دهند. پایهٔ دیگر عبارت است از $ay_\text{۱}$ و $by_\text{۲}$ که $a\neq\text{۰}$ و $b\neq\text{۰}$ ثابتهای دلخواه‌اند، بنابراین بینهایت از چنین پایه‌هایی وجود دارد. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

حالا این مطلب مهم را ثابت خواهیم کردکه جواب عمومی معادله‌ای به صورت

(۸) با ضرایب پیوسته شامل کلیهٔ جوابهای (۸) است.

قضیهٔ ۳ (جواب عمومی)
فرض کنید

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{۱۱}$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل (۸) در یك فاصلهٔ باز I باشد که در آن ضرایب f و g پیوسته‌اند. فرض کنید $Y(x)$ جوابی برای (۸) در I باشد که شامل ثابتهای دلخواهی نیست. درآن‌صورت $Y(x)$، با نسبت دادن مقادیر مناسبی به ثابتهای c_1 و c_2، از (۱۱) به‌دست می‌آید.

اثبات. فرض کنید $Y(x)$ جوابی برای (۸) درفاصلهٔ I باشدکه شامل ثابتهای دلخواهی نیست و فرض کنید $x=x_0$ نقطهٔ ثابتی در I باشد. نخست نشان می‌دهیم که می‌توانیم مقادیری برای c_1 و c_2 در (۱۱) پیدا کنیم به‌طوری که

$$y(x_0)=Y(x_0) \quad , \quad y'(x_0)=Y'(x_0)$$

و یا اینکه

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)&=Y(x_0)\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)&=Y'(x_0) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در واقع، این یك دستگاه معادلات خطی برحسب مجهولات c_1 و c_2 است. دترمینان آن رانسکین y_1 و y_2 در $x=x_0$ است. از آنجایی‌که (۱۱) جواب عمومی است y_1 و y_2 در فاصلهٔ I مستقل خطی هستند و از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شودکه رانسکین آنها صفر نیست. ازاین‌رو دستگاه دارای جواب یکتای $c_1=c_1^*$، $c_2=c_2^*$ است که می‌توان آن را با دستور کرامر (بخش ۹.۷) به دست آورد. با استفاده از این ثابتها از (۱۱) جواب خصوصی

$$y^*(x)=c_1^*y_1(x)+c_2^*y_2(x)$$

را به‌دست می‌آوریم. از (۱۲) درمی‌یابیم که

$$y^*(x_0)=Y(x_0) \quad , \quad y^{*\prime}(x_0)=Y'(x_0) \tag{۱۳}$$

به کمك این رابطه و نیز قضیهٔ یکتایی نتیجه می گیریم که y^* و Y در فاصلهٔ I همانند هستند و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

مسائل بخش ۸.۲

با استفاده از رانسکین و قضیهٔ ۲ استقلال خطی جفت‌توابع زیر را که به‌صورت پایه‌هایی دربخشهای ۴.۲ و ۷.۲ ظاهر شدند نشان دهید.

۱. $e^{\lambda_۱ x}$, $e^{\lambda_۲ x}$

۲. $e^{(p+iq)x}$, $e^{(p-iq)x}$

۳. $e^{px}\cos qx$, $e^{px}\sin qx$

۴. $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$

۵. $x^{m_۱}$, $x^{m_۲}$

۶. x^{m} , $x^{m}\ln x$

درهرحالت معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی‌همگن مرتبهٔ دومی پیدا کنید که توابع داده شده‌جوابهای آنها باشند. استقلال خطی را با استفاده ازقضیهٔ ۲ نشان دهید.

۷. $\cos\omega x$, $\sin\omega x$

۸. e^{x} , xe^{x}

۹. $x^{۲}$, $x^{۱/۲}$

۱۰. ۱ , e^{-x}

۱۱. ۱ , $x^{۲}$

۱۲. $x^{۲}$, $x^{۲}\ln x$

۱۳. $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$

۱۴. $\cosh x$, $\sinh x$

۱۵. $e^{i\beta x}$, $e^{-i\beta x}$

با استفاده از (۷) وابستگی یا استقلال خطی توابع زیر را معلوم کنید.

۱۶. x , $x^{۳}$

۱۷. $\ln x$, $\ln x^{۳}$ $(x>۰)$

۱۸. e^{x} , ۱

۱۹. $x+۱$, $x-۱$

۲۰. $\sqrt{x}$, $x^{۳/۲}$ $(x>۰)$

۲۱. $|x|x^{۲}$, $x^{۳}$ $(x<۰)$

۲۲. نشان دهید که $y_۱$ ، $y_۲$ در مثال ۲ تشکیل یك پایه برای جوابهای (۱۰) می‌دهند اما $W(y_۱, y_۲)\equiv ۰$.

۲۳. نشان دهید که $W(x^{۲}, x|x|)=۰$ است اما توابع $x^{۲}$ و $x|x|$ در فاصلهٔ $-۱<x<۱$ مستقل خطی‌اند. آیا این با قضیهٔ ۲ تناقض دارد؟

۲۴. فرض کنید $y_۱$ و $y_۲$ یك پایهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیلی را تشکیل دهند که مفروضات قضیهٔ ۲ در آن صادق است. نشان دهید $z_۱=a_{۱۱}y_۱+a_{۱۲}y_۲$ ، $z_۲=a_{۲۱}y_۱+a_{۲۲}y_۲$ وقتی و تنها وقتی یك پایهٔ آن معادله است که دترمینان ضرایب a_{jk} صفر نباشد.

۲۵. فرض کنید که (۸) در فاصلهٔ I دارای ضرایبی پیوسته باشد. نشان دهید دو جواب (۸) در فاصلهٔ I که دریك نقطه از I صفرند نمی‌توانند تشکیل یك پایهٔ جواب (۸) را در I بدهند. چند مثال بیاورید.

۹.۲ معادلات دیفرانسیل همگن ازمرتبهٔ دلخواه

یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه n ام را درصورتی **خطی** نامند که بتوان آن را به‌صورت

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=r(x) \qquad (۱)$$

نوشت که درآن‌تابع r درسمت راست و ضرایب f_0، f_1، ...، f_{n-1} توابع‌مفروضی هستند و $y^{(n)}$ عبارت از nامین مشتق y نسبت به x است. هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n راکه نتوان به‌صورت (۱) نوشت **غیرخطی** نامند.

هرگاه $r(x)\equiv 0$، معادلهٔ (۱) چنین می‌شود

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0 \qquad (۲)$$

و آن را **همگن** نامند. اگر $r(x)$ متحد با صفر نباشد معادله را **غیرهمگن** می‌نامند.

با استفاده از نماد عملگر (بخش ۵.۲) می‌توانیم (۱) را به‌صورت

$$\begin{aligned} L[y]&=P(D)[y] \\ &=[D^n+f_{n-1}(x)D^{n-1}+\dots+f_1(x)D+f_0(x)]y=r(x) \end{aligned} \qquad (۱^*)$$

بنویسیم و به‌طریقی مشابه درمورد (۲) عمل کنیم.

تابع $y=\varphi(x)$ را درصورتی **جواب** معادلهٔ دیفرانسیل (خطی یا غیرخطی) مرتبهٔ n ام در فاصلهٔ I می‌نامند که $\varphi(x)$ تعریف شده و در این فاصله n مرتبه مشتق‌پذیر باشد و به قسمی باشد که با جایگرینی φ و مشتقات آن به‌جای تابع نامشخص y و مشتقات آن درمعادله اتحاد برقرار شود.

حال خواهیم دید که ملاحظات بخشهای ۳.۲ و ۸.۲ قابل گسترش به معادلات دیفرانسیل همگن خطی ازمرتبهٔ دلخواه n است.

قضیهٔ وجود و یکتایی

هرگاه $f_0(x)$، ...، $f_{n-1}(x)$ در فاصلهٔ باز I توابعی پیوسته باشند، آنگاه مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ متشکل از معادلهٔ (۲) و n شرط اولیهٔ

$$y(x_0)=K_1, \qquad y'(x_0)=K_2, \ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0)=K_n$$

درفاصلهٔ I دارای جواب یکتای $y(x)$ است؛ دراینجا x_0 هر نقطهٔ مشخصی در I است

و K_1، . . .، K_n اعداد داده شده‌ای هستند.

اثبات وجود را می‌توان در مرجع [B۱۱] ضمیمهٔ ۱ یافت و یکتایی را با تعمیم جزئی اثباتی که در بخش ۸.۲ گفته شد ثابت نمود.

برای بسط ملاحظات بخش ۳.۲ به‌مفاهیم وابستگی و عدم‌استقلال خطی $n(\geqslant 2)$ تابع مانند $y_1(x)$، . . .، $y_n(x)$ نیاز داریم. این توابع را در یك فاصلهٔ I، که در آن تعریف شده‌اند، **وابستهٔ خطی** نامند هر گاه (دست‌کم) یکی از آنها را در فاصلهٔ I بتوان به‌صورت «**ترکیب خطی**» $n-1$ تابع‌دیگر نمایش‌داد، یعنی، به‌صورت مجموعی از آن توابع که هر کدام در یك مقدار ثابت (صفر یا غیر صفر) ضرب شده‌اند. هر گاه هیچیك از توابع‌را نتوان بدین صورت نوشت، آنهارا در فاصلهٔ I **مستقل‌خطی** می‌نامند.

این تعریف آنچه راکه در بخش ۳.۲ در مورد دو تابع به‌عنوان یك حالت خاص بیان کردیم شامل می‌شود. n تابع‌وابستهٔ‌خطی‌در I را یك **مجموعهٔ وابستهٔ خطی** ازتوابع در I نیز می‌نامند. توابع مستقل خطی را نیز می‌توان به طریقی مشابه تعریف کرد.

مثلا، توابع $y_1=x$ ، $y_2=x^2$ ، $y_3=x^3$ درهر فاصله‌ای مستقل خطی‌اند. توابع $y_1=x$ و $y_2=3x$ و $y_3=x^2$ درهرفاصله‌ای وابستهٔ‌خطی‌اند زیرا $y_2=3y_1+0y_3$.

n تابع $y_1(x)$ ، . . .، $y_n(x)$ راکه درفاصلهٔ I تعریف شده‌اند وابستهٔ خطی نامند اگر و تنها اگر بتوانیم ثابتهای K_1، . . .، K_n را کـه تمام آنها صفر نباشند طوری پیدا کنیم که به ازای تمام مقادیر x در فاصلهٔ I رابطهٔ

$$K_1y_1(x)+\cdots+K_ny_n(x)=0 \tag{3}$$

صادق باشد.

درواقع اگر (۳) به‌ازای یك مقدار $K_1\neq 0$ صادق باشد می‌توان‌آن را بر K_1 تقسیم نموده و y_1 را به‌صورت ترکیب خطی y_2 ، . . . ، y_n:

$$y_1=-\frac{1}{K_1}\left(K_2y_2+\cdots+K_ny_n\right)$$

بیان‌کنیم که وابستگی خطی را ثابت می‌کند. بـه همین ترتیب، اگر (۳) بـه ازای یك $K_i\neq 0$ صادق باشد می‌توانیم y_i را به صورت ترکیب خطی سایر توابع بیان نماییم. از طرف دیگر اگر $K_1=0$، . . .، $K_n=0$ تنها مجموعه ثابتهایی باشد کـه به ازای آن در فاصلهٔ I (۳) صادق است در آن صورت نمی‌توانیم هیچیك از توابع را برحسب سایر توابع بیابیم و توابع مستقل خطی‌اند.

جواب یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n (خطی یا غیر خطی) را در صورتی **جواب عمومی** می‌نامند کـه شامل n عدد ثابت مستقل دلخواه باشد.[1] دراینجا منظور از استقلال

---

۱. به پانوشت بخش ۳.۲ رجوع کنید.

آن است که جواب را نتوان به صورتی تحویل نمود که شامل کمتر از n ثابت دلخواه باشد. هرگاه مقادیر معینی را به n عدد ثابت نسبت دهیم آنگاه جواب حاصله را **جواب خصوصی** آن معادله می‌نامند.

یک‌مجموعه از n جواب مستقل خطی $y_1(x)$، . . . ، $y_n(x)$ ازمعادلهٔ همگن‌خطی (۲) در فاصلهٔ I را یک **پایه** یا یک **دستگاه بنیادی** جوابهای (۲) در I نامند.

هرگاه y_1، . . . ، y_n چنین پایه‌ای باشد آنگاه

$$(۴)\qquad y(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)\qquad (c_1،\ldots،c_n \text{ دلخواهند})$$

جواب عمومی (۲) در I است. در واقع، از آنجاکه (۲) خطی و همگن است، (۴) جوابی از (۲) است و چون y_1، . . . ، y_n درفاصلهٔ I توابع مستقل‌خطی هستند هیچیک از آنهارا نمی‌توان به‌شکل ترکیب خطی بقیه بیان کرد یعنی، (۴) را نمی‌توان به‌صورتی شامل کمتر از n ثابت دلخواه تحویل نمود.

آزمون وابستگی واستقلال‌خطی‌جوابها (قضیهٔ۲ بخش ۸.۲) را می‌توان به معادلات مرتبهٔ nام به‌صورت زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۲ (وابستگی و استقلال خطی جوابها)

فرض کنید ضرایب $f_0(x)$، . . . ، $f_{n-1}(x)$ رابطهٔ (۲) در یک فاصلهٔ باز I پیوسته باشند، در آن‌صورت n جواب y_1، . . . ، y_n معادلهٔ (۲) درفاصلهٔ I وقتی و فقط وقتی در I وابستهٔ خطی هستند که **رانسکین** آنها

$$(۵)\qquad W(y_1,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

به ازای مقداری مانند $x=x^\circ$ در I صفر باشد. اگر در $x=x^\circ$ داشته باشیم $W=0$ در آن صورت در I داریم $W\equiv 0$.

ایدهٔ این اثبات شبیه اثبات قضیهٔ ۲ بخش ۸.۲ است.

جواب‌عمومی معادله‌ای به‌شکل ۲ باضرایب پیوسته شامل کلیهٔ‌جوابهای (۲) است. درواقع، تعمیم قضیهٔ۳ بخش ۸.۲ به‌طریق زیر صادق است.

قضیهٔ ۳ (جواب عمومی)

فرض‌کنید (۴) جواب‌عمومی (۲) دریک‌فاصلهٔ‌باز I باشدکه‌درآن $f_0(x)$، . . . ، $f_{n-1}(x)$ پیوسته‌اند و $Y(x)$ را جوابی برای (۲) درفاصلهٔ I بگیریدکه شامل ثابتهای‌دلخواه نباشد.

در این‌صورت $Y(x)$ با نسبت دادن مقادیر مناسبی به ثابتهای دلخواه $c_1, \dots, c_n$ از (۴) به‌دست می‌آید.

ایدهٔ اثبات شبیه اثبات قضیهٔ ۳ بخش ۸.۲ است.

مثال ۱

توابع $y_1 = e^{-x}$ ، $y_2 = e^x$ ، و $y_3 = e^{2x}$ جوابهای معادلهٔ زیرند

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \tag{۶}$$

رانسکین عبارت است از

$$W(e^{-x},\quad e^x,\quad e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 6e^{2x} \neq 0$$

که نشان می‌دهد این توابع به ازای تمام مقادیر x پایه‌ای برای جوابهای (۶) می‌دهند و جواب عمومی متناظر با آن عبارت است از

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

مسائل بخش ۹.۲

ثابت کنید:

۱. هرگاه $y \equiv 0$ تابعی از یك مجموعهٔ توابع در فاصلهٔ I باشد این مجموعه در I وابستهٔ خطی است.

۲. هرگاه تابعی ازیك‌مجموعهٔ توابع در I مضرب ثابتی ازتابع دیگری ازاین‌مجموعه در I باشد، این مجموعه در I وابستهٔ خطی است.

۳. هرگاه مجموعه‌ای از p تابع در I وابستهٔ خطی باشد مجموعه‌ای از $n\,(\geqslant p)$ تابع در I که شامل آن مجموعه باشد در I وابستهٔ خطی است.

۴. هرگاه مجموعه‌ای از توابع در I وابستهٔ خطی باشد، این مجموعه برای هر زیر‌فاصلهٔ I وابستهٔ خطی است.

۵. هرگاه مجموعه‌ای از توابع در I مستقل خطی باشد، این مجموعه در هر فاصلهٔ J شامل I که در آن فاصله همهٔ توابع تعریف شده‌اند، مستقل خطی است.

کدامیك از توابع زیر روی محور x های مثبت وابستهٔ خطی‌اند یا مستقل خطی؟

۶. $1\ ,\ x\ ,\ x^2$

۷. $\cosh^2 x\ ,\ \sinh^2 x\ ,\ 1$

۸. $\cos x\ ,\ \sin x\ ,\ 1$

۹. $\ln x\ ,\ \ln x^2\ ,\ \ln x^3$

۱۰. $e^x\ ,\ xe^x\ ,\ x^2e^x$

۱۱. $1\ ,\ x\ ,\ 2x$

۱۲. $x\ ,\ x-1\ ,\ x+1$

۱۳. $1\ ,\ x^2\ ,\ x^4\ ,\ x^6$

۱۴. $e^{2x}\ ,\ e^{-2x}\ ,\ 0$

با استفاده از قضیهٔ ۲ نشان دهید که توابع داده‌شده پایه‌ای برای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل متناظرشان تشکیل می‌دهند.

۱۵. $e^{-x}\ ,\ e^x\ ,\ xe^x\ ,\ y'''-y''-y'+y=0$

۱۶. $e^{-x}\ ,\ xe^{-x}\ ,\ x^2e^{-x}\ ,\ y'''+3y''+3y'+y=0$

۱۷. $x\ ,\ x^2\ ,\ x^3\ ,\ x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

۱۸. $x^{1/2}\ ,\ x^{-1/2}\ ,\ 1\ ,\ x^2y'''+3xy''+0.75y'=0$

۱۹. $e^x\ ,\ xe^x\ ,\ x^2e^x\ ,\ x^3e^x\ ,\ y''''-4y'''+6y''-4y'+y=0$

۲۰. $e^x\ ,\ e^{-x}\ ,\ \cos x\ ,\ \sin x\ ,\ y''''-y=0$

۱۰.۲ معادلات خطی همگن از مرتبهٔ دلخواه با ضرایب ثابت

روش بخش ۲.۲ را می‌توان به‌آسانی به‌معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n با ضرایب ثابت

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \qquad (1)$$

تعمیم داد. با جایگزینی $y=e^{\lambda x}$ و مشتقات آن در (۱) معادلهٔ مشخصهٔ

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \qquad (2)$$

را به دست می‌آوریم. اگر این معادله دارای n ریشهٔ متمایز λ_1 ، . . . ، λ_n باشد آنگاه n جواب

$$y_1=e^{\lambda_1 x}\ ,\ \ldots\ ,\ y_n=e^{\lambda_n x} \qquad (3)$$

به‌ازای تمام‌مقادیر x تشکیل یك‌پایه می‌دهد وجواب عمومی متناظر با (۱) عبارت‌است‌از

$$y=c_1e^{\lambda_1 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x} \qquad (4)$$

درصورت وجود یك ریشهٔ‌مضاعف $\lambda_1=\lambda_2$ در (۳) داریم $y_1=y_2$ و نظیر بخش ۴.۲، y_1 و $y_2=xy_1$ را به‌عنوان دو جواب مستقل خطی متناظر باآن ریشه می‌گیریم.

هر گاه یك ریشهٔ سه‌گانه به‌صورت $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ وجود داشته باشد آنگاه در (۳) داریم $y_1=y_2=y_3$ و سه جواب مستقل خطی متناظر با آن ریشه عبارت‌اند از

$$y_1 \quad , \quad xy_1 \quad , \quad x^2y_1 \tag{۵}$$

این جوابها را با روش تغییر پارامترها می‌توان به دست آورد. بطور کلیتر اگر λ یك ریشهٔ مرتبهٔ m باشد در آن‌صورت m جواب مستقل خطی متناظر با آن عبارت‌اند از

$$e^{\lambda x} \; , \; xe^{\lambda x} \; , \; \ldots \; , \; x^{m-1}e^{\lambda x} \tag{۶}$$

درواقع، استقلال‌خطی تقریباً آشکاراست. جایگزینی نشان می‌دهد که اینها جواب‌اند. هر گاه نماد عملگر (بخش ۵.۲) را بکار ببریم فرمولهای متناظر کمی ساده‌تر خواهند شد برای این‌کار (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$L[y]=P(D)[y]=[D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0]\,y=0$$

بنا به‌فرض داریم

$$P(D)=Q(D)(D-\lambda)^m \tag{۷}$$

که در آن $Q(D)$ یك عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ $n-m$ است و متناظر با سایر ریشه‌هایی است که معادلهٔ مشخصهٔ (۱) می‌تواند داشته باشد. حال برای توابع $x^ke^{\lambda x}$ $(k=0\,,\,\ldots\,,\,m-1)$ در (۶) به‌دست می‌آوریم

$$(D-\lambda)(x^ke^{\lambda x})=kx^{k-1}e^{\lambda x}+\lambda x^ke^{\lambda x}-\lambda x^ke^{\lambda x}=kx^{k-1}e^{\lambda x}$$

از اینرو با اعمال $D-\lambda$ روی این رابطه داریم

$$(D-\lambda)^2(x^ke^{\lambda x})=k(k-1)x^{k-2}e^{\lambda x}$$

و به‌همین ترتیب. سرانجام

$$(D-\lambda)^k(x^ke^{\lambda x})=k\,!\,e^{\lambda x}$$

بطوری که

$$(D-\lambda)^{k+1}(x^ke^{\lambda x})=k\,!\,(D-\lambda)e^{\lambda x}=0$$

از آنجاکه در (۶)، $k+1\leqslant m$ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود:

$$(D-\lambda)^m(x^ke^{\lambda x})=0 \qquad\qquad k=0\;,\;\ldots\;,\;m-1$$

به‌دلیل (۷) این رابطه نشان می‌دهد که توابع (۶) جوابهای (۱) درحالت یك ریشهٔ مرتبهٔ m هستند.

کل کار نسبتاً ساده است و می‌توان آن را با دو مثال توضیح داد.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y''' - ۲y'' - y' + ۲y = ۰$$

ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ

$$\lambda^۳ - ۲\lambda^۲ - \lambda + ۲ = ۰$$

عبارت‌اند از ۱ −، ۱ و ۲ وجواب عمومی متناظر با (۴) عبارت است از

$$y = c_۱ e^{-x} + c_۲ e^{x} + c_۳ e^{۲x}$$

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y^{(۵)} - ۳y'''' + ۳y''' - y'' = ۰$$

معادلهٔ مشخصهٔ

$$\lambda^۵ - ۳\lambda^۴ + ۳\lambda^۳ - \lambda^۲ = ۰$$

دارای ریشه‌های $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۰$ و $\lambda_۳ = \lambda_۴ = \lambda_۵ = ۱$ می‌باشد وجواب عبارت است از

$$y = c_۱ + c_۲ x + (c_۳ + c_۴ x + c_۵ x^۲) e^{x} \qquad (۸)$$

مسائل بخش ۲.۱۰

۱. نشان دهید که (۸) را همچنین می‌توان با قرار دادن $y'' = z$ ؛ پیدا کردن جواب عمومی z از معادلهٔ مرتبهٔ سوم جدید و دو بار انتگرالگیری از z به دست آورد.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید

۲. $y''' - ۳y'' + ۳y' - y = ۰$ ۳. $y'''' + ۳y'' - ۴y = ۰$

۴. $y'''' - y = ۰$ ۵. $y''' + y' = ۰$

۶. $y'''' + ۴y''' + ۶y'' + ۴y' + y = ۰$ ۷. $y'''' - ۵y'' + ۴y = ۰$

معادله‌ای پیدا کنید که برای آن توابع داده شده تشکیل یك پایه بدهند

۸. $\cosh x \, , \, \sinh x \, , \, \cos ۲x \, , \, \sin ۲x$

۹. $e^{x} \, , \, xe^{x} \, , \, x^۲ e^{x}$

۱۰. $e^{-x}\ ,\ xe^{-x}\ ,\ e^{x}\ ,\ xe^{x}$

۱۱. $1\ ,\ x\ ,\ e^{2x}\ ,\ xe^{2x}$

۱۲. $\sin x\ ,\ \sin 2x\ ,\ \cos x\ ,\ \cos 2x$

۱۳. $e^{-2x}\ ,\ e^{-x}\ ,\ e^{x}\ ,\ e^{2x}\ ,\ 1$

تقلیل مرتبه. بعضی اوقات ممکن‌است یافتن یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل مفروضی نسبتاً آسان باشد. دراین صورت مرتبهٔ معادله را می‌توان تقلیل داد ، یعنی، سایرجوابهای معادلهٔ داده شده‌را می‌توان ازمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ پایینتری به دست‌آورد.

۱۴. هرگاه $y_1(x)$ یك جواب $y''+f(x)\,y'+g(x)\,y=0$ باشد نشان دهیدجواب دیگر $y_2(x)=u(x)\,y_1(x)$ است‌که درآن $u(x)$ با حل معادلهٔ مرتبه اول زیر برحسب $z=u'$ به‌دست می‌آید :

$$y_1u''+(2y_1'+fy_1)\,u'=0$$

۱۵. هرگاه $y_1(x)$ یك جواب $y'''+f(x)\,y''+g(x)\,y'+h(x)\,y=0$ باشد نشان دهید جواب دیگر $y_2(x)=u(x)\,y_1(x)$ است که درآن $u(x)$ باحل معادلهٔ مرتبهٔ دوم زیر برحسب $z=u'$ به‌دست می‌آید :

$$y_1u'''+(3y_1'+fy_1)\,u''+(3y_1''+2fy_1'+gy_1)\,u'=0$$

با استفاده از روش تقلیل مرتبه معادلات زیر را حل کنید

۱۶. $y'''-3y''-y'+3y=0\ ,\ \ y_1=e^{x}$

۱۷. $x^3y'''-3xy'+3y=0\ ,\ \ y_1=1/x$

۱۸. $y''-4xy'+(4x^2-2)\,y=0\ ,\ \ y_1=e^{x^2}$

۱۹. $x^3y'''-3x^2y''+(6-x^2)\,xy'-(6-x^2)\,y=0\ ,\ \ y_1=x$

۲۰. (معادلهٔ‌کشی) معادلهٔ‌کشی یا معادلهٔ اویلر مرتبهٔ سوم عبارت است از

$$x^3y'''+ax^2y''+bxy'+cy=0$$

با تعمیم روش بخش ۷.۲ نشان دهید که $y=x^m$ وقتی وتنها وقتی‌جواب معادله‌است که m ریشهٔ [illegible] کی زیر باشد

$$m^3+(a-3)\,m^2+(b-a+2)\ [illegible]\ 0$$

معادلهٔ $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$ را حل کنید.

۱۱.۲ معادلات خطی غیرهمگن

تا اینجا معادلات خطی همگن را بررسی کرده‌ایم حال دربارهٔ معادلات خطی غیر همگن بحث می کنیم. برای سادگی توجهمان را به‌معادلات مرتبهٔ دوم

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = r(x) \qquad (۱)$$

معطوف می کنیم، اما آشکاراست که نتایج این بخش را می‌توان به‌آسانی به‌معادلات خطی از هرمرتبه‌ای تعمیم داد.

ابتدا نشان خواهیم دادکه جواب عمومی $y(x)$ معادلهٔ (۱) را می‌توان به دست آورد درصورتی که جواب عمومی $y_h(x)$ معادلهٔ همگن متناظر با آن

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0 \qquad (۲)$$

معلوم باشد. ادعا می کنیم که درآن صورت $y(x)$ را با اضافه نمودن هرجواب $\bar{y}$ از(۱) که شامل ثابتهای دلخواه نباشد به y_h به‌دست می‌آوریم یعنی

$$y(x) = y_h(x) + \bar{y}(x) \qquad (۳)$$

درواقع، چون y_h شامل دومقدار ثابت دلخواه است y هم شامل دوثابت دلخواه‌خواهد بود و همان‌طور که در بخش۳.۲ تعریف شد، y وقتی جواب عمومی (۱) است که‌اساساً جوابی از آن بوده باشد. برای نشان دادن این مطلب (۳) را در (۱) قرار می‌دهیم. در این صورت سمت چپ (۱) چنین می‌شود

$$(y_h + \bar{y})'' + f(y_h + \bar{y})' + g(y_h + \bar{y})$$

این را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(y_h'' + f y_h' + g y_h) + \bar{y}'' + f\bar{y}' + g\bar{y}$$

از آنجاکه y_h جواب (۲) است عبارت‌داخل پرانتز صفر می‌شود. چون $\bar{y}$ در (۱)صدق می کند مجموع بقیهٔ جملات برابر $r(x)$ است وحکم ثابت می‌شود.

سؤالی که عملا باقی می‌ماند این است که چگونه جواب $\bar{y}$ را از (۱) بــه دست بیاوریم. روشهای مربوطـه در بخش بعد و در بخشهای ۱۵.۲ و ۱۶.۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

فعلا ثابت می‌کنیم کـه جواب عمومی معادلهٔ (۱) بـا توابع پیوستهٔ f و g و r کلیهٔ جوابهای (۱) را نمایش می‌دهد.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی)

فرض‌کنید $f(x)$ ، $g(x)$ و $r(x)$ در (۱) درفاصلهٔ باز I توابعی پیوسته باشند[1]. $Y(x)$

---

۱. چنان‌که می‌دانیم این شرط برای وجود y_h در I وهمچنین برای وجود $\bar{y}$ در I کافی‌است همانگونه‌که دربخش ۱۶.۲ آشکار خواهد شد.

را جوابی برای معادلهٔ (۱) در فاصلهٔ I بگیرید که شامل ثابت دلخواهی نباشد. در این صورت $Y(x)$ به نسبت دادن مقادیر مناسبی به‌دو ثابت دلخواه،که در حل عمومی $y_h(x)$ از معادلهٔ (۲) وجود داشتند ، از (۳) به دست می‌آید. در (۳) تابع $y(x)$ هر جوابی در فاصلهٔ I برای (۱) می‌باشدکه شامل ثابت دلخواه نباشد.

اثبات. قرار می‌دهیم $y^* = Y - y$. از آنجا

$$y^{*\prime\prime}+f y^{*\prime}+g y^* =(Y''+fY'+gY)-(y''+f y'+g y)=r-r=0$$

یعنی ، y^* جواب معادلهٔ (۲) است. حال y^* شامل ثابتهای دلخواه نیست. پس، بنابه قضیهٔ ۳ بخش ۸.۲ (که بجایٔ Y مقدار y^* را به‌کاربرده‌ایم) می‌توان آن را بانسبت‌دادن مقادیرمناسبی به ثابتهای دلخواه در y_h به‌دست‌آورد. بااین‌کار، چون $Y=y^*+\bar{y}$ حکم نتیجه می‌شود.

این قضیه نشان می‌دهدکه هرجوابی از (۱)که شامل ثابتهای دلخواه نباشد ، بنابه تعریفی‌که در بخش ۳.۲ داشتیم ، یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱) است و حالا می‌توانیم نتایج را به‌ترتیب زیر فرموله کنیم.

قضیهٔ ۲ (جواب عمومی)

جواب عمومی $y(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن خطی (۱) برابر است با مجموع جواب عمومی $y_h(x)$ مربوط به‌معادلهٔ‌همگن (۲) متناظربا آن و جواب خصوصی دلخواه $y_p(x)$ مربوط به (۱):

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x) \tag{۴}$$

مسائل بخش ۱۱.۲

۱. نشان دهیدکه $y_{p_1}=\sin 2x$ و $y_{p_2}=\sin 2x-\sin x$ جوابهای خصوصی $y''+y=-3\sin 2x$ هستند. جوابهای عمومی (۴) متناظر با آن را پیدا کنید ونشان دهیدکه یکی‌ازآنها را می‌توان به‌دیگری تبدیل نمود به‌طوری‌که انتخاب y_p مهم نباشد.

۲. نشان دهیدکه هر یك از دو جواب عمومی (۴) متناظر با y_p متفاوت را می‌توان به دیگری تبدیل نمود.

۳. نشان دهیدکه هرگاه y_1 یك جواب (۱) به ازای $r=r_1$ و y_2 یك جواب (۱) به ازای $r=r_2$ باشد در آن صورت $y=y_1+y_2$ یك جواب (۱) بـه ازای $r=r_1+r_2$ است.

۴. نشان دهید که $y_1=e^x$ یك جواب $y''+y=2e^x$ و $y_2=x\sin x$ یك‌جواب $y''+y=2\cos x$ است. با استفاده از مسئلهٔ ۳ جواب عمومی معادلهٔ $y''+y=2e^x+2\cos x$ را پیدا کنید.

۵. قضایای ۱ و ۲ را به‌معادله‌ای از هرمرتبهٔ n بسط دهید.

درهریك از حالات زیر تحقیق کنید که $y_p(x)$ یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده بوده وجواب عمومی را پیدا کنید.

۶. $y''+y=2e^x \ , \ y_p=e^x$

۷. $y''-y=2e^x \ , \ y_p=xe^x$

۸. $y''-3y'+2y=2x^2-6x+2 \ , \ y_p=x^2$

۹. $y''+4y=-12\sin 2x \ , \ y_p=3x\cos 2x$

۱۰. $y''+9y=18x \ , \ y_p=-2x$

۱۱. $(D^2-1)\,y=2\cos x \ , \ y_p=-x\cos x$

۱۲. $(D^2+D)\,y=2\sin x \ , \ y_p=-x\cos x$

۱۳. $(4x^2D^2+1)\,y=(1-x^2)\cos 0.5x \ , \ y_p=\cos 0.5x$

۱۴. $(x^2D^2-3xD+3)\,y=3\ln x-4 \ , \ y_p=\ln x$

۱۵.

$$(D^2+6D+9)\,y=\frac{e^{-3x}}{x^2+1} \ , \ y_p=(x\arctan x-0.5\ln(x^2+1))-e^{-3x}$$

۱۲.۲ روشی برای حل معادلات خطی غیرهمگن

برای به‌دست آوردن‌جواب عمومی یك معادلهٔ دیفرانسیل‌خطی غیرهمگن به‌جواب‌خصوصی $y_p(x)$ آن معادله نیاز داریم. این مطلب در بخش قبل نشان داده شد. چگونه می‌توانیم این تابع y_p را پیدا کنیم؟

دربخش ۱۶.۲ به بررسی روشی کلی برای یافتن y_p خواهیم پرداخت. در بخش حاضر روش مخصوص بسیار ساده‌تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که به اصطلاح **روش ضرایب نامعین** نـامیده می‌شود و در مسائل مهندسی نظیر ارتعاشات مکانیکی واداشته و ارتعاشات الکتریکی پایه‌ای است. این روش برای معادلات

$$y''+ay'+by=r(x) \qquad (۱)$$

قابل اعمال است که در آن $r(x)$ طوری است که شکل جواب خصوصی $y_p(x)$ معادلهٔ (۱) قابل حدس باشد[۱]؛ مثلا ممکن است r توان ساده‌ای از x، یك چند جمله‌ای، یك تابع نمایی، یك تابع سینوسی یا کسینوسی و یا مجموعی از این نوع توابع باشد. روش بدین ترتیب است که برای y_p عبارتی شبیه $r(x)$ که شامل ضرایب مجهول است فرض می‌شود و با قرار دادن y_p و مشتقات آن در (۱) این ضرایب معلوم می‌شوند. انتخاب چنین نامی برای این روش از اینجا ناشی شده است.

حال برای تفهیم مطلب به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱

معادلهٔ غیرهمگن زیر را حل کنید

$$y''-۴y'+۳y=۱۰e^{-۲x} \qquad (۲)$$

مشتقات $e^{-۲x}$ عبارتند از حاصلضرب $e^{-۲x}$ دراعدادی ثابت، بنابراین فرض می کنیم

$$y_p=k\,e^{-۲x}$$

جایگزینی y_p ، y'_p ، y''_p در (۲) نتیجه می‌دهد

$$۴k\,e^{-۲x}-۴(-۲k\,e^{-۲x})+۳k\,e^{-۲x}=۱۰\,e^{-۲x}$$

واز آنجا $۴k+۸k+۳k=۱۰$ ، و $k=۲/۳$. پایه‌ای برای معادلهٔ همگن‌عبارت است از e^{x} ، $e^{۳x}$. پس بنابر قضیهٔ ۲ بخش قبل جواب زیرحاصل می‌شود

$$y=y_h+y_p=c_۱e^{x}+c_۲e^{۳x}+\frac{۲}{۳}e^{-۲x}$$

مثال ۲

معادلهٔ غیرهمگن زیر را حل کنید

$$y''+۴y=۸x^۲ \qquad (۳)$$

$y_p=Kx^۲$ را امتحان می کنیم ولی این‌کار مؤثر نمی‌افتد زیرا داریم $y''_p=۲K$ و با قرار دادن این مقدار در (۳) نتیجه می گیریم

$$۲K+۴k\,x^۲=۸x^۲$$

---

۱. دانشجویان در بخش ۱۶.۲ مشاهده خواهند کرد که این روش درواقع از روش عمومی نتیجه می‌شود.

و برای برقراری این رابطه بـه ازای هر x باید ضرایب هر توانی از x در هر طرف $(x, x^۲)$ همانند باشند:

$$۲K=۰ \quad , \quad ۴K=۸$$

که جوابی ندارد. حال تابع زیر را امتحان می‌کنیم

$$y_p=Kx^۲+Lx+M \quad \text{درآن صورت} \quad y_p''=۲K$$

با جایگزینی در (۳) نتیجه می‌شود

$$۲K+۴(Kx^۲+Lx+M)=۸x^۲$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $x^۲$ و x و $x^۰$ درطرفین داریم

$$۴K=۸, \quad ۴L=۰, \quad ۲K+۴M=۰$$

بنابراین $K=۲$ ، $L=۰$ ، $M=-۱$ واز اینرو $y_p=۲x^۲-۱$ وجواب عمومی معادلهٔ (۳) عبارت است از

$$y=A\cos ۲x+B\sin ۲x+۲x^۲-۱$$

آیا دلیل به‌جواب نرسیدن آنچه راکه ابتدا فرض کردیم می‌دانید؟

مثال ۳

این معادلهٔ غیر همگن را حل کنید

$$y''-y'-۲y=۱۰\cos x \qquad (۴)$$

دانشجو ممکن است $y_p=K\cos x$ را بیازماید ودریابدکه با این‌کار به‌جواب‌نمی‌رسد. چون مشتقات کسینوس توابع سینوس و کسینوس هستند بدین ترتیب عمل می‌کنیم

$$y_p=K\cos x+M\sin x$$

از آنجا

$$y_p'=-K\sin x+M\cos x$$

$$y_p''=-K\cos x-M\sin x$$

با قرار دادن این مقادیر در (۴) به‌دست می‌آوریم

$$(-۳K-M)\cos x+(K-۳M)\sin x=۱۰\cos x$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos x$ و $\sin x$ دردو طرف داریم

$$-۳K-M=۱۰ \quad , \quad K-۳M=۰$$

بنابراین $K=-۳$ ، $M=-۱$ و $y_p=-۳\cos x-\sin x$. یك‌جواب‌عمومی

معادلهٔ همگن متناظر با آن عبارت است از

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

ونتیجهٔ کلی چنین است

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 3\cos x - \sin x.$$

این مثالها قاعدهٔ زیر را به‌ذهن می‌آورد.

قاعده

هرگاه $r(x)$ در (۱) یکی از توابع واقع درستون ۱ جدول ۱.۲ باشد برای y_p یك‌ترکیب خطی با ضرایب نامعین $r(x)$ ومشتقات آن‌که مستقل خطی‌اند (به ستون ۲ رجوع شود) انتخاب‌کنید وضرایب را با جایگزینی معین نمایید.

هرگاه $r(x)$ مجموعی از توابع ستون ۱ باشد برای y_p مجموع توابع واقع در سطور متناظرش را انتخاب‌کنید.

هرگاه جمله‌ای در $r(x)$ یك جواب معادلهٔ همگن متناظر با (۱) باشد انتخاب خود را به‌ترتیب زیر تکمیل‌کنید.

قاعدهٔ تکمیلی

عبارت واقع در سطر مناسب ستون ۲ را در x یا x^2 ضرب‌کنید بسته به اینکه عدد واقع در ستون۳ یك ریشهٔ ساده یا مضاعف معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ همگن متناظر با(۱) باشد. اثبات درزیر آمده است.

حال به بررسی دو مثال اضافی می‌پردازیم یکی برای حالتی که به قاعدهٔ تکمیلی نیازی نیست ودیگری برای وقتی که لازم است.

مثال ۴

جواب خصوصی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{3x}$$

به‌ترتیب زیر شروع می کنیم

$$y_p = K_1 x + K_0 + Ce^{3x}$$

با جایگزینی پیدا می کنیم $K_1 = 2$ ، $K_0 = 3$ ، $C = 1/2$ و بنابراین

$$y_p = 2x + 3 + \frac{1}{2} e^{3x}$$

جدول ۱۰۲
روش ضرایب نامعین

جملهٔ $r(x)$	انتخاب y_p	
ke^{px}	Ce^{px}	p
$kx^n (n=0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$	0
$k \cos qx$	$K \cos qx + M \sin qx$	iq
$k \sin qx$	$K \cos qx + M \sin qx$	iq

مثال ۵

این معادلهٔ غیرهمگن را حل کنید

$$y'' - 2y' + y = (D-1)^2 y = e^x + x. \tag{5}$$

بنا به جدول ۱۰۲ جملهٔ x دلالت برانتخاب جواب خصوصی زیر دارد

$$K_1 x + K_0.$$

نظر به اینکه ۱ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصهٔ $(\lambda-1)^2 = 0$ است، بنا به قاعدهٔ تکمیلی جملهٔ e^x مستلزم جواب خصوصی

$$Cx^2 e^x \qquad (\text{بجای } Ce_x)$$

است. روی‌هم‌رفته داریم

$$y_p = K_1 x + K_0 + Cx^2 e^x.$$

با قرار دادن این عبارت در (۵) به‌دست می‌آوریم

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ce^x + K_1 x - 2K_1 + K_0 = e^x + x.$$

ازاین‌رو $C = 1/2$ ، $K_1 = 1$ ، $K_0 = 2$ بوده و جواب عمومی (۵) عبارت است از

$$y = y_h + y_p = (c_1 x + c_2)e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + x + 2.$$

قواعدی که ما به‌کار می‌بریم ساده‌اند. باید توجه کرد که این قواعد فقط درحالات

مندرج درجدول ۱.۲ مفیدند. اثبات این قواعد از اهمیت کمتری برخوردار است و ما آن را برای تکمیل کردن بحث می‌آوریم و به‌عنوان یك‌وسیلهٔ مناسب ازعملگرها (بخش ۵.۲) استفاده می‌کنیم. خواننده می‌توانـد از این برهان بگذرد یـا به عنوان یکی از کاربردهای روشهای عملگری آن را بخواند.

برای سطر ۱ جدول ۱.۲ معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر است

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=ke^{px} \tag{۶}$$

با ضرب دوطرف در $D-p$ به‌دست می‌آوریم

$$(D-p)(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=k(D-p)[e^{px}]=0 \tag{۷}$$

از روی شکل (۶) و (۷) مستقیماً می‌بینیم کـه هرجواب (۶) در (۷) صدق می‌کند. از این‌رو هرجواب (۶) را می‌تـوان از جواب عمومی (۷) به دست آورد. معادلهٔ (۷) یك معادلهٔ همگن مرتبهٔ سوم است. شکل جواب عمومی آن بستگی به این دارد که ریشه‌های آن متفاوت یا مساوی باشند. جوابهای عمومی (۷) عبارت‌اند از

(۸)

(الف) هر گاه $p\neq\lambda_1\neq\lambda_2\neq p$ ، $y=(c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x})+Ce^{px}$

هر گاه $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq p$ ، $y=(c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x})+Ce^{px}$

(ب) هر گاه $\lambda_1\neq\lambda_2=p$ ، $y=(c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{px})+Cxe^{px}$

(پ) هر گاه $\lambda_1=\lambda_2=p$ ، $y=(c_1e^{px}+c_2xe^{px})+Cx^2e^{px}$

توابع واقع در پرانتزها جوابهای عمومی معادلهٔ همگن متناظر بـا (۶) هستند. از این‌رو آخرین‌جمله، بامقدارمناسب C ، جواب خصوصی y_p از (۶) است. این امرنشان می‌دهد کـه (۸ الف) اثبات کنندهٔ قاعده است، (۸ ب) قاعدهٔ تکمیلی در مورد یك ریشهٔ ساده را ثابت می‌کند و(۸پ) درمورد یك ریشهٔ مضاعف را، وقتی‌که $r(x)=ke^{px}$. برای سطور ۲و۳جدول۱.۲ ایدهٔ اثبات همانند بالاست؛ بجای $D-p$ درآن‌صورت باید D^{n+1} رادر سطر۲ به کار گیریم کـه نتیجه می‌شود $D^{n+1}[x^n]=0$ و D^2+q^2 در سطر ۳ نتیجه می‌دهد $(D^2+q^2)[\cos qx]=0$ و $(D^2+q^2)[\sin qx]=0$.

مسائل بخش ۱۲.۲

۱. قاعدهٔ تکمیلی درحالت مربوط به‌سطر ۲ جدول ۱.۲ را به‌تفصیل اثبات کنید.

۲. مسئلهٔ ۱ را نسبت به‌سطر ۳ جدول ۱.۲ حل کنید.

جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۳. $y''+y=x^2+x$

۴. $y''+2y'+y=2x^2$

۵. $y''+5y'+6y=9x^4-x$

۶. $y''-y'-2y=\sin x$

۷. $y''+y'-6y=52\cos 2x$

۸. $y''+y'-2y=3e^x$

۹. $y''+y=2\sin x$

۱۰. $y''-2y'+2y=2e^x\cos x$

۱۱. $y'''+2y''-y'-2y=1-4x^3$

۱۲. $y''''-5y''+4y=10\cos x$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۱۳. $y''+y=-x-x^2$

۱۴. $y''-y=e^x$

۱۵. $y''+4y=e^{-x}$

۱۶. $y''-y'-2y=4\sin x$

۱۷. $y''+y=\sin x$

۱۸. $y''+y'-2y=e^x$

۱۹. $y''-4y'+3y=e^{2x}$

۲۰. $y''-4y'+9y=10e^{2x}-12\cos 3x$

روش ضرایب نامعین درمورد بعضی ازمعادلات مرتبهٔ اول نیز به‌کار می‌رود وازروش‌معمولی (بخش ۷.۱) ساده‌تر است. با استفاده از هر دو روش معادلات زیر را حل کنید.

۲۱. $y'+y=x^4$

۲۲. $y'-2y=\sin 4x$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۲۳. $y''+25y=5x,\ y(0)=5,\ y'(0)=-4.8$

۲۴. $y''-y=x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$

۲۵. $y''-2y'+y=2x^2-8x+4,\ y(0)=3,\ y'(0)=3$

۲۶. $y''-y'-2y=10\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-3$

۲۷. $y''-y'-2y=3e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=-2$

۲۸. $y''+2y'+2y=-2\cos 2x-4\sin 2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

۲۹. $y''+4y'+8y=4\cos x+7\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$

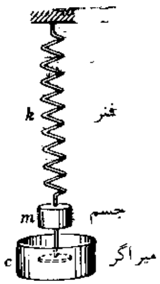
۳۰. $y''+2y'+10y=4.5\cos x-\sin x,\ y(0)=0.5,\ y'(0)=3$

۱۳۰۲ نوسانات واداشته. تشدید

دربخش ۶.۲ نوسانات آزاد یك جسم متصل به‌یك فنر را که درشکل ۴۵ نشان داده شده است بررسی کردیم. این حرکت به‌وسیلهٔ معادلهٔ همگن

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=0 \tag{1}$$

بیان می‌شود که درآن m جرم جسم و c ثابت میرایی و k مدول فنر است. حالا با فرض اینکه یك نیروی متغیر $r(t)$ بردستگاه اثر کند بررسی خود را گسترش می‌دهیم. ازاین‌راه با موضوعات جالب دیگری آشنا می‌شویم که در ریاضیات مهندسی ، بویژه در ارتباط با تشدید، بنیادی هستند.



شکل ۴۵. وزنهٔ متصل به فنر

به‌خاطر داریم که معادلهٔ (۱) با درنظر گرفتن نیروهای مؤثر برجسم و با استفاده از قانون دوم نیوتن به‌دست‌آمد. ازاین‌رو واضح است که معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به‌وضعیت فعلی با افزودن $r(t)$ به (۱) به‌دست می‌آید؛ یعنی

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=r(t)$$

$r(t)$ را **ورودی** یا **نیروی محرك** و جواب متناظر با آن را **خروجی** یا **پاسخ** دستگاه به نیروی محرك می‌نامند. (بخش ۷.۱ را نیز ببینید.) حرکت حاصل را یك **حرکت واداشته** می‌نامند و این مقابل **حرکت آزاد** است که متناظر با معادلهٔ (۱) درغیاب نیروی خارجی $r(t)$ است.

به ورودیهای متناوب توجه خاصی مبذول می‌داریم. یك ورودی سینوسی را درنظر

می گیریم، مثلا

$$r(t)=F_0 \cos \omega t \qquad (F_0>0,\ \omega>0)$$

ورودیهای متناوب پیچیده‌تر بعداً دربخش ۷.۱۰ بررسی خواهند شد.

حال معادلهٔ دیفرانسیل مورد بحث چنین می‌شود

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_0 \cos \omega t. \tag{2}$$

می‌خواهیم جواب عمومی این معادله را که نمایشگر خروجی دستگاه مرتعش است تعیین نمائیم و دربارهٔ آن بحث کنیم. چون جواب عمومی متناظر با معادلهٔ همگن (۱) بنابربخش ۶.۲ معلوم است حال باید جواب خصوصی $y_p(t)$ معادلهٔ (۲) را معین کنیم.

این کار را می‌توان با روش‌ضرایب نامعین (بخش ۱۲.۲) انجام داد بدین‌ترتیب که

$$y_p(t)=a \cos \omega t+b \sin \omega t. \tag{3}$$

با مشتقگیری ازاین تابع داریم

$$\dot{y}_p=-\omega a \sin \omega t+\omega b \cos \omega t \quad , \quad \ddot{y}_p=-\omega^2 a \cos \omega t-\omega^2 b \sin \omega t.$$

باقراردادن این‌عبارات در (۲) و مرتب کردن‌ضرایب سینوس وکسینوس به‌دست می‌آوریم

$$[(k-m\omega^2)a+\omega cb] \cos \omega t+[-\omega ca+(k-m\omega^2)b] \sin \omega t=F_0 \cos \omega t$$

با مساوی قراردادن ضرایب سینوس وکسینوس درطرفین داریم

$$\begin{aligned}(k-m\omega^2)a+\omega cb&=F_0\\ -\omega ca+(k-m\omega^2)b&=0\end{aligned} \tag{4}$$

این دستگاه متشکل از دو معادلهٔ جبری خطی با مجهولات a و b است. جواب دستگاه به طریق معمولی حذفی یا قاعدهٔ کرامر (در صورت لزوم بخش ۹.۷ را ببینید) به دست می‌آید. پیدا می کنیم

$$a=F_0\frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2} \quad , \quad b=F_0\frac{\omega c}{(k-m\omega^2)^2+\omega^2c^2}$$

مشروط برآنکه مخرج صفر نباشد. هر گاه نظیربخش ۶.۲ قراردهیم $\sqrt{k/m}=\omega_0\,(>0)$ داریم

$$a=F_0\frac{m(\omega_0^2-\omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2} \quad , \quad b=F_0\frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2} \tag{5}$$

بنابراین جواب عمومی به‌دست می‌آید

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t). \quad (۶)$$

که در آن y_h جواب عمومی (۱) بوده و y_p از رابطهٔ (۳) معین می‌شود که ضرایب آن از (۵) به‌دست می‌آید.

حالا رفتار دستگاه مکانیکی را مورد بحث قرار می‌دهیم و بین دو حالت $c=0$ (بدون‌میرائی) و $c>0$ (بامیرایی) تفاوت قایل می‌شویم. این حالات بادونوع خروجی مختلف متناظرند.

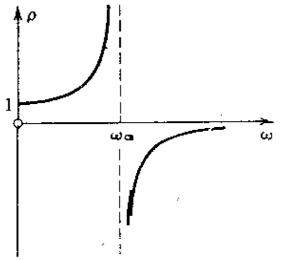
حالت ۱. نوسانات واداشتهٔ غیرمیرا. هرگاه میرایی وجود نداشته باشد آنگاه $c=0$. فرض می‌کنیم $\omega_0^2\neq\omega^2$. این فرض لازم است. بدین ترتیب از (۳) نخست و (۵) به‌دست می‌آوریم

$$y_p(t)=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t=\frac{F_0}{k[1-(\omega/\omega_0)^2]}\cos\omega t \quad (۷)$$

ازاین رابطه و رابطهٔ (*۶) بخش ۶.۲ جواب عمومی زیر را داریم

$$y(t)=C\cos(\omega_0 t-\delta)+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \quad (۸)$$

این خروجی نمایشگر جمع اثرهای دو نوسان همساز است؛ بسامدهای آنها عبارت‌اند از **«بسامد طبیعی»** دستگاه $\omega_0/2\pi$ [دور بر ثانیه] (یعنی بسامد حرکت غیر میرای آزاد) و بسامد ورودی $\omega/2\pi$.



شکل۴۶. عامل تشدید $\rho(\omega)$

از رابطهٔ (۷) دامنهٔ ماکزیمم y_p، عبارت است از

$$a_0=\frac{F_0}{k}\rho \quad \text{که درآن} \quad \rho=\frac{1}{1-(\omega/\omega_0)^2} \quad (۹)$$

این دامنه به ω و ω_0 بستگی دارد. وقتی $\omega \to \omega_0$ مقادیر ρ و a_0 به‌سمت بینهایت میل می کنند. این پدیدهٔ تحریك نوسانات بزرگ که با تساوی بسامدهای طبیعی و ورودی حاصل می‌شود $(\omega = \omega_0)$ را **تشدید** می‌نامند و درمطالعهٔ دستگاههای ارتعاشی ازاهمیت زیادی برخوردار است (به دنبالهٔ مطلب رجوع کنید). کمیت ρ را عامل تشدید می‌نامند (شکل ۴۶). از (۹) می‌بینیم که ρ/k برابر با نسبت دامنه‌های تابع y_p و ورودی است.

در حالت تشدید معادلهٔ (۲) چنین می‌شود

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \qquad (۱۰)$$

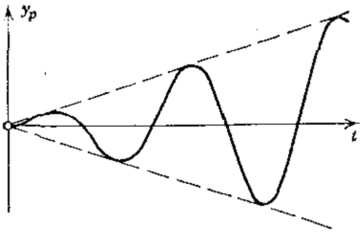
بنابه‌قاعدهٔ تکمیلی بخش‌قبل نتیجه‌می گیریم که جواب‌خصوصی (۱۰) دارای‌شکل‌زیراست

$$y_p(t) = t\,(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

با قرار دادن این رابطه در (۱۰) درمی‌یابیم که $a = 0$ ، $b = F_0/2m\omega_0$ و (شکل ۴۷)

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \qquad (۱۱)$$

می‌بینیم که y_p بزرگترو بزرگتر می‌شود. در عمل، این بدان معنی است که به‌دستگاههای با میرایی کم ممکن است نوسانات بزرگی اثرنمایدکه بتواند دستگاه را معیوب نماید؛ بعداً درهمین بخش به‌این جنبهٔ عملی تشدید می‌پردازیم.



شکل ۴۷. جواب خصوصی در حالت تشدید

نوسان دیگری که نوعاً جالب وبسیار مهم است نوسانی است که در آن ω به ω_0 نزدیك‌شود. مثلا جواب‌خصوصی [به (۸) رجوع شود] متناظر با شرایط‌اولیهٔ $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ یعنی

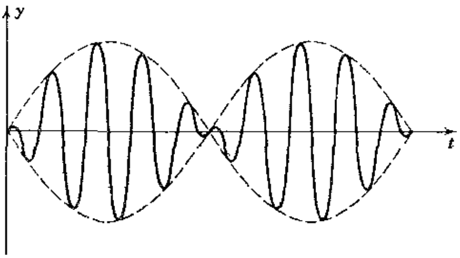
$$y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \qquad (\omega \neq \omega_0) \qquad (۱۲)$$

را در نظر بگیرید. این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت [به رابطهٔ ۱۲ ضمیمهٔ ۳

رجوع شود]

$$y(t)=\frac{۲F_{\circ}}{m(\omega_{\circ}^{۲}-\omega^{۲})}\sin\frac{\omega_{\circ}+\omega}{۲}t\sin\frac{\omega_{\circ}-\omega}{۲}t$$

چون ω نزدیك به $\omega_{\circ}$ است تفاضل $\omega_{\circ}-\omega$ کوچك می‌باشد و بنابراین دورهٔ تناوب تابع سینوسی آخری بزرگ بوده و نوسانی مطابق شکل ۴۸ خواهیم داشت



شکل ۴۸. نوسان غیر میرای واداشته وقتی‌که اختلاف بسامد طبیعی ورودی و خروجی کوچك است (**«ضربان»**)

حالت ۲. نوسانات واداشتهٔ میرا. درصورت وجود میرایی $c>\circ$ بوده و بنابر بخش ۶.۲ می‌دانیم که جواب عمومی y_h رابطهٔ (۱) با ازدیاد t به‌سمت صفر میل می‌نماید (عملا پس‌اززمانی به‌اندازهٔ‌کافی طولانی) یعنی جواب عمومی (۶) معادلهٔ (۲) حالا نشان‌دهندهٔ **جواب گذرا** می‌باشد و به‌سمت **جواب حالت مانا** یعنی y_p میل می‌نماید. بنابراین پس از زمانی باندازهٔ کافی طولانی خروجی متناظربا ورودی صرفاً سینوسی عملا یك نوسان همساز است که بسامد آن برابر با بسامد ورودی است. این چیزی است که در عمل اتفاق می‌افتد زیرا هیچ دستگاه فیزیکی‌ای کاملا غیر میرا نیست.

در حالی‌که برای حالت غیرمیرا با نزدیك شدن ω به $\omega_{\circ}$ دامنهٔ y_p به بینهایت میل می‌کند ولی برای‌حالت موردبحث چنین‌اتفاقی نمی‌افتد. دامنه همیشه محدودخواهد ماند اما به‌ازای مقداری از ω ممکن‌است ماکزیممی داشته باشد و این به مقدار c بستگی دارد. این‌مقداررا می‌توان **تشدید عملی** نامید. این‌موضوع اهمیت‌زیادی دارد زیرانشان می‌دهد که بعضی ازمقادیرورودی‌ممکن است نوسانی‌را باچنین دامنهٔ‌بزرگی تحریك کند به‌طوری که باعث خرابی دستگاه شود. چنین مواردی در عمل اتفاق افتاده است مخصوصاً پیشترها که تشدید به خوبی شناخته نشده بود. ماشین‌آلات، اتومبیلها، کشتیها، هواپیماها و پلها دستگاههای مکانیکی ارتعاشی هستند و گاهی به‌دشواری می‌توان بناهایی را پیدا کرد که از اثرات تخریبی تشدیدکاملا مصون مانده باشد.

برای پیدا کردن دامنهٔ y_p به‌صورت تابعی از ω، (۳) را به‌شکل

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta) \qquad (۱۳)$$

می‌نویسیم که در آن، بنابه (۵)،

$$C^*(\omega) = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \frac{F_۰}{\sqrt{m^۲(\omega_۰^۲ - \omega^۲)^۲ + \omega^۲ c^۲}},$$

(۱۴)

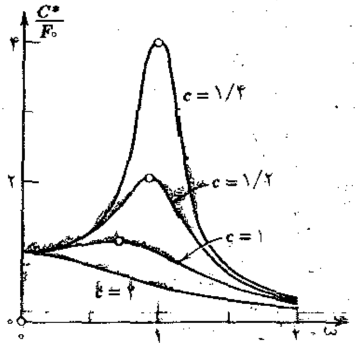
$$\tan \eta = \frac{b}{a} = \frac{\omega c}{m(\omega_۰^۲ - \omega^۲)}.$$

حال ماکزیمم $C^*(\omega)$ را تعیین می‌کنیم. با صفر قرار دادن $dC^*/d\omega$ پیدا می‌کنیم

$$[-۲m^۲(\omega_۰^۲ - \omega^۲) + c^۲]\omega = ۰$$

داخل کروشه به‌ازای مقدار زیر برابر صفر است

$$c^۲ = ۲m^۲(\omega_۰^۲ - \omega^۲). \qquad (۱۵)$$



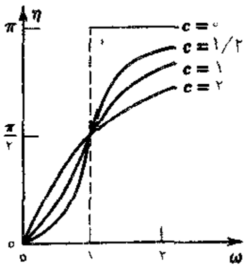
شکل ۴۹. میزان تقویت $C^*/F_۰$ به‌صورت تابعی از ω به ازای $m = ۱$، $k = ۱$ و مقادیر مختلف ثابت میرایی c

برای میرایی بقدرکافی‌زیاد $(c^۲ > ۲m^۲\omega_۰^۲ = ۲mk)$ معادلهٔ (۱۵) جواب‌حقیقی ندارد و C^* باافزایش ω بطوریکنواخت‌کاهش می‌یابد (شکل ۴۹). اگر $c^۲ \leqslant ۲mk$، معادلهٔ (۱۵) یك جواب حقیقی $\omega = \omega_{\max}$ دارد که باکاهش c افزایش می‌یابد و در صورتی که c به سمت صفر میل کند مقدار آن به $\omega_۰$ میل می‌کند. دامنهٔ $C^*(\omega)$ به‌ازای $\omega = \omega_{\max}$ ماکزیمم است و با قرار دادن $\omega = \omega_{\max}$ در (۱۴) پیدا می‌کنیم که

$$C^*(\omega_{\max}) = \frac{۲mF_۰}{c\sqrt{۴m^۲\omega_۰^۲ - c^۲}} \qquad (۱۶)$$

می‌بینیم کـه $C^*(\omega_{\max})$ محدود است هـر گـاه $c > ۰$، چون وقتی $c^۲ < ۲mk$ باشد $dC^*(\omega_{\max})/dc < ۰$ است، مقدار $C^*(\omega_{\max})$ باکاهش $c(\leqslant \sqrt{۲mk})$ افزایش می‌یابد و وقتی c به‌سمت صفرمیل کند مقدارآن به‌بینهایت میل می‌نماید و این بانتیجه‌ای که در حالت ۱ به دست آمد موافقت دارد. شکل ۴۹ **میزان تقویت** $C^*/F_۰$ (نسبت دامنه‌های خروجی و ورودی) را به‌صورت تابعی از ω به‌ازای $m = ۱$ ، $k = ۱$ ومقادیر مختلف ثابت میرایی c نشان می‌دهد.

زاویهٔ η در (۱۴) را **زاویهٔ فاز** یـا **تأخیر فاز** می‌نامند (شکل ۵۰) زیـرا تأخیر خروجی را نسبت به‌ورودی تعیین می‌کند. هرگاه $\omega < \omega_۰$، آنگاه $\eta < \pi/۲$؛ هروقت $\omega = \omega_۰$ آن‌وقت $\eta = \pi/۲$ بوده و درصورتی که $\omega > \omega_۰$ درآن‌صورت $\eta > \pi/۲$



شکل ۵۰. اختلاف فاز η به‌صورت تابعی از ω به‌ازای $m = ۱$ ، $k = ۱$ و مقادیر مختلف ثابت میرایی c

مسائل بخش ۲-۱۳

در هر مورد نوسانات حالت مانا را پیدا کنید.

۱. $\ddot{y} + y = ۳\cos ۲t$

۲. $\ddot{y} + ۴y = \sin t$

۳. $(D^۲ + ۱۶)y = \cos t - \sin t$

۴. $\ddot{y} + ۳\dot{y} + ۲y = ۱۰\sin t$

۵. $(۲D^۲ + ۲D + ۳)y = ۸۷\cos ۳t - ۵\sin t$

۶. $(D^2+D+1)\,y=2\cos t+26\cos 2t$

در هر مورد جواب حالت گذرا را پیدا کنید.

۷. $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=10\sin t$

۸. $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=65\cos 2t$

۹. $\ddot{y}+2\dot{y}+2y=85\cos 3t$

۱۰. $4\ddot{y}+4\dot{y}+5y=37.7\sin 4t$

۱۱. $(D^2+2D+5)\,y=-\sin t$

۱۲. $(D^2+2D+1)\,y=50\sin 3t$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۱۳. $\ddot{y}+25y=24\sin t\ ,\ y(0)=1\ ,\ \dot{y}(0)=1$

۱۴. $\ddot{y}+y=-9\sin 2t\ ,\ y(0)=1\ ,\ \dot{y}(0)=0$

۱۵. $\ddot{y}+y=\cos\omega t\ ,\ y(0)=y_0\ ,\ \dot{y}(0)=v_0\ ,\ \omega^2\neq 1$

۱۶. $\ddot{y}+\omega_0^2 y=\cos\omega t\ ,\ y(0)=y_0\ ,\ \dot{y}(0)=v_0\ ,\ \omega^2\neq\omega_0^2$

۱۷. به ازای چه شرایط اولیه‌ای جواب مسئلهٔ ۱۵ نمایشگر نوسانی است که بسامد آن برابر با بسامد ورودی است؟ آیا می‌توانیم شرایط اولیه را چنان پیدا کنیم که جواب مسئلهٔ ۱۶ نمایشگر نوسانی باشد که بسامد آن با بسامد طبیعی دستگاه برابر است؟

۱۸. مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ $\ddot{y}+y=\cos\omega t$ ، $\omega^2\neq 1$ ، $y(0)=0$ ، $\dot{y}(0)=0$ را حل کنید. نمودار دامنهٔ ماکزیمم را به‌صورت تابعی از ω رسم کنید. نشان دهید که جواب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y(t)=\frac{2}{1-\omega^2}\sin\left[\frac{1}{2}(1+\omega)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(1-\omega)t\right]$$

نمودارهای مناسبی برای $y(t)$ به‌ازای ۲, ۱٫۱, ۰٫۹, ۰٫۵ = ω رسم کنید.

۱۹. فرض کنید در (۱۲)، ω به ω_0 میل کند. نشان دهید که این کار به جوابی به‌صورت (۱۱) منجر می‌شود.

۲۰. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F_0\sin\omega t \qquad (c\neq 0)$$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۲۱. $\ddot{y}+10\dot{y}+29y=10\cos t+28\sin t\ ,\ y(0)=1\ ,\ \dot{y}(0)=-4$

۲۲. $0.5\ddot{y}+2\dot{y}+2.5y=\cos 5t+\sin 5t\ ,\ y(0)=-0.1\ ,\ \dot{y}(0)=0$

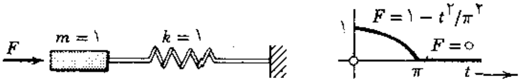
۲۳. $\ddot{y}+2\dot{y}+2y=\sin 2t-2\cos 2t \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad \dot{y}(0)=0$

۲۴. $\ddot{y}+4\dot{y}+20y=23\sin t-15\cos t \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad \dot{y}(0)=-1$

۲۵. **(لولهٔ توپ)** معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\ddot{y}+y=\begin{cases} 1-\dfrac{t^2}{\pi^2} & 0\leqslant t\leqslant\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases} \qquad y(0)=\dot{y}(0)=0$$

این معادله را می‌توان به‌دستگاه غیرمیرایی تعبیر نمود که بر آن یك نیروی F درطول یك فاصلهٔ زمانی اثر می کند (شکل را ببینید)، به‌عنوان مثال، دریك لولهٔ توپ وقتی گلوله‌ای شلیك می‌شود لوله به‌وسیلهٔ فنرهای قوی‌ترمز می‌شود (ودرآن صورت به‌وسیلهٔ یك میراگر که برای سهولت از آن صرفنظر می کنیم، میرا می‌شود). راهنمائی. در لحظهٔ $t=\pi$ هم y و هم $\dot{y}$ باید پیوسته باشند.



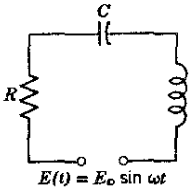
مسئلهٔ ۲۵

۱۴۰۲ مدارهای الکتریکی

بخش قبل به مطالعهٔ دستگاهی مکانیکی که از نظر عملی بسیار مورد توجه است اختصاص داده‌شده بود. حال به‌بررسی یك‌دستگاه الکتریکی با اهمیتی مشابه می‌پردازیم که می‌توان آن را جزء اساسی شبکه‌های الکتریکی دانست. این بررسی همچنین می‌تواند نشان‌دهندهٔ مثال برجسته‌ای از این مطلب مهم باشد که دستگاههای فیزیکی کاملا متفاوت را می‌توان با یك معادلهٔ دیفرانسیل متناظر دانست وبدین ترتیب این بررسی، نقش ریاضیات را درمتحد کردن پدیده‌های متفاوتی کــه ماهیتهای فیزیکی کاملا گونــاگونی دارند نشان می‌دهد. ما تناظری بین دستگاههای الکتریکی و مکانیکی پیدا خواهیم کرد که صرفاً کیفی نبوده بلکه کمی نیزهستند بدین معنی که به‌ازای‌یك دستگاه مکانیکی مفروض می‌توان مداری‌الکتریکی بنا نهاد که شدت جریان آن درست همان مقادیر جابجایی در دستگاه مکانیکی خواهد بود مشروط برآنکه عوامل سنجش مناسبی بــه‌کار گرفته شوند. اهمیت عملی چنین قیاسی بین دستگاههای مکانیکی و الکتریکی تقریباً واضح است. از این قیاس می‌توان برای ساختن «مدل الکتریکی» یك دستگاه مکانیکی مفروض استفاده کرد و در بسیاری از موارد این‌کار لازم است زیرا طرح مــدارهای الکتریکی و اندازه‌گیری جریــان و ولتاژ آسان است.

درحالی‌که ساختن یك مدل مکانیکی شاید دشوار وپرهزینه باشد واندازه‌گیری جابجاییها دراین دستگاه وقت‌گیر وغیردقیق *.

مدار «RLC» شکل ۵۱ را بررسی خواهیم کرد. مدارهای ساده‌تر در بخش ۹.۱ بررسی شدند وفرض براین است‌که دانشجو با آن موارد ساده‌تر آشنایی دارد زیرا این آشنایی مبنای به‌دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مدار حاضر است. به‌یاد داریم‌که معادلات دیفرانسیل آن مدارهـا از مساوی قرار دادن مجموع افت ولتاژ عناصر مدارها با نیروی محرکهٔ الکتریکی مدار به‌دست می‌آمدند. این عمل با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف انجام‌می‌شد که نقش‌آن درمدارها مانندنقش قانون‌دوم نیوتن (بخش ۶.۲) دردستگاههای مکانیکی است.



شکل ۵۱. مدار RLC

برای به‌دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل مدار شکل ۵۱ می‌توانیم از معادلهٔ مربوط به‌یك مدار RC [به‌رابطهٔ (۷) بخش۹.۱ رجوع شود] استفاده نمائیم و به‌آن افت‌پتانسیل $L\dot{I}$ درطول القاءکنندهٔ مدار را اضافه‌کنیم. نتیجه چنین می‌شود

$$L\dot{I}+RI+\frac{1}{C}\int I\,dt=E(t)=E_0 \sin \omega t \qquad (1')$$

از بخش ۹.۱ به‌خاطر داریم‌که $I=\dot{Q}=dQ/dt$، یعنی شدت جریان برابر با میزان تغییرات بار الکتریکی نسبت بـه زمـان است. از این‌رو $\dot{I}=\ddot{Q}$ و در ($1'$) داریم $\int I dt=Q$ بنابراین ($1'$) را می‌توان این‌طور نوشت

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E_0 \sin \omega t. \qquad (1'')$$

این‌معادلهٔ دیفرانسیل بار Q درخازن مدار RLC است. امروزه دربسیاری از مسائل‌عملی

---

* برای‌ایده‌های مشابه‌درزمینهٔ‌کامپیوترهای قیاسی‌کتاب‌سادهٔ تروت Truitt و راجرز Rogers [G۱۸] مندرج درضمیمهٔ ۱ را ببینید.

به جای بار $Q(t)$ شدت جریان $I(t)$، کمیت فیزیکی مورد نظر است. در نتیجه معادلهٔ دیفرانسیل شدت جریان $I(t)$ درمدار RLC مهمتراز('' ۱) است. این‌معادله رابامشتقگیری از (' ۱) نسبت به t به‌دست می‌آوریم. نتیجه عبارت است از

$$L\ddot{I}+R\dot{I}+\frac{1}{C}I=E_{\circ}\omega\cos\omega t \qquad (۱)$$

این همان شکل معادلهٔ (۲) بخش ۱۳.۲ را داراست. از اینرو این مدار RLC مشابه الکتریکی دستگاه مکانیکی بخش ۱۳.۲ است. مقایسهٔ مقادیر الکتریکی متناظر با مقادیر مکانیکی درجدول ۲.۲ نشان داده شده است.

جدول ۲.۲

مقایسهٔ کمیتهای مکانیکی والکتریکی درمعادلهٔ (۱) این بخش و معادلهٔ (۲) بخش ۱۳.۲

دستگاه الکتریکی	دستگاه مکانیکی
القاء L	جرم m
مقاومت R	ثابت میرایی c
وارونهٔ ظرفیت $1/C$	مدول فنر k
مشتق نیروی محرکهٔ الکتریکی $E_{\circ}\omega\cos\omega t$	نیروی محرك $F_{\circ}\cos\omega t$
شدت جریان $I(t)$	جابه‌جایی $y(t)$

برای پیدا کردن جواب خصوصی (۱) می‌توانیم نظیر بخش ۱۳.۲ عمل کنیم. با جایگزینی

$$I_p(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t \qquad (۲)$$

در (۱) به‌دست می‌آوریم

$$a=-\frac{E_{\circ}S}{R^2+S^2},\quad b=\frac{E_{\circ}R}{R^2+S^2} \qquad (۳)$$

که درآن S به‌اصطلاح **راکتانس** نامیده می‌شود و با عبارت زیر تعیین می‌شود:

$$S=\omega L-\frac{۱}{\omega C} \tag{۴}$$

درهرحالت عملی $R\neq ۰$ ، لذا مخرج کسر (۳) صفر نیست. بنابراین رابطهٔ (۲) که a و b آن با (۳) داده شده‌اند، جواب خصوصی (۱) است.

با استفاده از (۳) می‌توانیم I_p را به‌صورت

$$I_p(t)=I_۰\sin(\omega t-\theta) \tag{۵}$$

بنویسیم که درآن [به‌رابطهٔ (۱۴) ضمیمهٔ ۳ رجوع شود]

$$I_۰=\sqrt{a^۲+b^۲}=\frac{E_۰}{\sqrt{R^۲+S^۲}},\quad \tan\theta=-\frac{a}{b}=\frac{S}{R}.$$

کمیت $\sqrt{R^۲+S^۲}$ را **امپدانس** می‌نامند. فرمول بالانشان می‌دهد که امپدانس برابر نسبت $E_۰/I_۰$ است که تقریباً شبیه $E/I=R$ است (قانون اهم).

معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با (۱) عبارت است از

$$\lambda^۲+\frac{R}{L}\lambda+\frac{۱}{LC}=۰$$

و دارای ریشه‌های $\lambda_۱=-\alpha+\beta$ و $\lambda_۲=-\alpha-\beta$ است که درآن

$$\alpha=\frac{R}{۲L},\quad \beta=\frac{۱}{۲L}\sqrt{R^۲-\frac{۴L}{C}}$$

مانند بخش ۱۳۰۲ استنباط می‌کنیم هرگاه $R>۰$ (که البته در هر حالت عملی چنین است) جواب عمومی $I_h(t)$ معادلهٔ همگن وقتی t به‌سمت بینهایت میل کند به‌سمت صفر میل‌می‌کند (عملاپس‌اززمانی به‌اندازهٔکافی‌طولانی). بنابراین‌جریان گذرای $I=I_h+I_p$ به‌سمت جریان حالت مانای I_p میل می‌نماید وپس‌از زمانی به‌اندازهٔکافی طولانی‌خروجی عملا یك نوسان همساز به‌شکل (۵) است وبسامد آن با بسامد ورودی برابر خواهد بود.

مثال ۱. مدار RLC

شدت‌جریان $I(t)$ رادریك مدارRLC پیدا کنید هرگاه، اهم $R=۱۰۰$ وهانری $L=۰٫۱$ و فاراد $C=۱۰^{-۳}$ و به‌منبع ولتاژ $E(t)=۱۵۵\sin ۳۷۷\,t$ (بنابراین بسامدعبارت است از ، هرتز ۶۰ = دور بر ثانیه ۶۰) متصل است پیدا کنید. فرض براین است که در لحظهٔ $t=۰$ شدت جریان وبار الکتریکی صفر باشند.

معادلهٔ (۱) چنین است

$$۰٫۱\ddot{I}+۱۰۰\dot{I}+۱۰۰۰I=۱۵۵\times ۳۷۷\cos ۳۷۷t$$

راکتانس $S = ۳۷٫۷ - ۱/۰٫۳۷۷$ وشدت جریان حالت مانا

$$I_p(t) = a \cos ۳۷۷t + b \sin ۳۷۷t$$

است که درآن

$$a = \frac{-۱۵۵ \times ۳۵}{۱۰۰^۲ + ۳۵^۲} = -۰٫۴۸۳\,, \quad b = \frac{۱۵۵ \times ۱۰۰}{۱۰۰^۲ + ۳۵^۲} = ۱٫۳۸۱$$

سپس معادلهٔ مشخصه را حل می‌کنیم

$$۰٫۱\lambda^۲ + ۱۰۰\lambda + ۱۰۰۰ = ۰$$

ریشه‌ها عبارتند از $\lambda_۱ = -۱۰$ و $\lambda_۲ = -۹۹۰$. بنابراین جواب عمومی عبارت است از

$$(۶) \quad I(t) = c_۱ e^{-۱۰t} + c_۲ e^{-۹۹۰t} - ۰٫۴۸۳ \cos ۳۷۷t + ۱٫۳۸۱ \sin ۳۷۷t$$

$c_۱$ و $c_۲$ را از شرایط اولیهٔ $Q(۰) = ۰$ و $I(۰) = ۰$ معین می‌کنیم بنابه‌شرط دوم

$$(۷) \qquad I(۰) = c_۱ + c_۲ - ۰٫۴۸۳ = ۰$$

واما چگونه از $Q(۰) = ۰$ استفاده کنیم؟ با حل جبری $(۱')$ نسبت به $\dot{I}$ و بـا توجه به $\int I dt = Q$ داریم

$$(۸) \qquad \dot{I}(t) = \frac{۱}{L}\left[E(t) - RI(t) - \frac{۱}{C} Q(t) \right]$$

دراینجا $E(۰) = ۰$ و $I(۰) = ۰$ و $Q(۰) = ۰$، بنابراین $\dot{I}(۰) = ۰$. ازاین‌رو با مشتقگیری از (۶) به‌دست می‌آوریم

$$(۹) \qquad \dot{I}(۰) = -۱۰c_۱ - ۹۹۰c_۲ + ۱٫۳۸۱ \times ۳۷۷ = ۰$$

از حل (۷) و (۹) نتیجه می‌شود $c_۱ = -۰٫۰۴۳$ و $c_۲ = ۰٫۵۲۶$. بنابراین‌از (۶) جواب زیر را داریم

$$I(t) = -۰٫۰۴۳ e^{-۱۰t} + ۰٫۵۲۶ e^{-۹۹۰t} - ۰٫۴۸۳ \cos ۳۷۷t + ۱٫۳۸۱ \sin ۳۷۷t$$

دوجملهٔ اول به‌سرعت ازبین می‌روند وبعداز زمانی بسیارکوتاه شدت جریان عملاًنوسانی همساز با بسامد ۶۰ هرتز را، که بسامد ولتاژ داده شده است ، به‌وجود می‌آورد. توجه کنیدکه بنابر (۵)، شدت جریان حالت مانا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$I_p(t) = ۱٫۴۶۳ \sin(۳۷۷t - ۰٫۳۴)$$

مسائل بخش ۱۴۰۲

۱. رابطهٔ (۳) را از دو طریق بـه دست آورید: (الف) مستقیماً بـا جـایگزینی (۲) در (۱)؛ (ب) از رابطهٔ (۵) بخش ۱۳۰۲ بـا استفاده از جـدول ۲۰۲ و اتخاذ $E_\circ \omega$ به‌جای $F_\circ$.

۲. بسامد طبیعی (= بسامد نوسانات آزاد) یك مدار LC را (الف) بطور مستقیم، (ب) از بخش ۶۰۲ به‌وسیلهٔ جدول ۲۰۲، به‌دست بیاورید.

۳. شرایط یك مدار RLC برای میرایی شدید (حالت ۱)، میرایی خفیف (حالت ۲) و میرایی بحرانی (حالت ۳) چیست؟ درحالت خاص مقاومت بحرانی، $R_{\text{بحرانی}}$ (مشابه ثابت میرایی بحرانی $C_{\text{بحرانی}} = 2\sqrt{mk}$) چیست؟

۴. در درس ادعا شد که هرگاه $R > 0$، آنگاه وقتی $t \to \infty$ جریان گذرا به‌سمت $I_p(t)$ میل می‌کند. این مطلب را چگونه می‌توان ثابت نمود؟

۵. **(تنظیم)** درتنظیم رادیو روی یك ایستگاه، دکمه‌ای را می‌چرخانیم که c را (یاشاید L را) دریك مدار RLC طوری تغییر دهد (شکل ۵۱) تا دامنه شدت جریان‌حالت مانا ماکزیمم شود. به‌ازای چه مقدار C این امر اتفاق می‌افتد؟

شدت جریان حالت مانای مدار RLC شکل ۵۲ را درحالت زیرپیدا کنید.

۶.

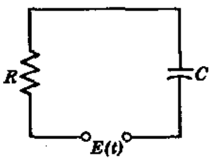
اهم $R = 200$ ، هانری $L = 10$ ، فاراد $C = 0{,}05$ ، ولت $E = 50 \sin t$

۷.

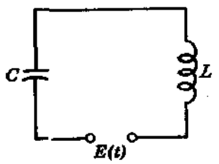
اهم $R = 240$ ، هانری $L = 40$ ، فاراد $C = 10^{-3}$ ، ولت $E = 369 \sin 10t$

۸.

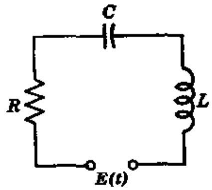
اهم $R = 40$ ، هانری $L = 10$ ، فاراد $C = 0{,}02$ ، ولت $E = 800 \cos 5t$



شکل ۵۲ مدار RLC



شکل ۵۳ مدار LC



شکل ۵۴ مدار RC

جریان گذرای مدار RLC شکل ۵۲ را درحالت زیر پیدا کنید

۹. اهم $R=200$، هانری $L=100$، فاراد $C=5\times 10^{-3}$، ولت $E=2500\sin t$

۱۰. اهم $R=20$ ، هانری $L=5$ ، فاراد $C=0.01$ ، ولت $E=850\sin 4t$

۱۱. اهم $R=16$ ، هانری $L=8$ ، فاراد $C=0.125$ ، ولت $E=300\cos 2t$

شدت جریان $I(t)$ مدار LC شکل ۵۳ را با فرض صفر بودن شدت جریان و بار اولیه‌در حالات زیرپیدا کنید.

۱۲. هانری $L=10$ ، فاراد $C=4\times 10^{-3}$ ، ولت $E=250$

۱۳. هانری $L=1$ ، فاراد $C=0.25$ ، ولت $E=90\cos t$

۱۴. هانری $L=2$ ، فاراد $C=5\times 10^{-3}$ ، ولت $E=210\sin 4t$

شدت جریان $I(t)$ درمدار RLC شکل ۵۲ را با فرض صفر بودن جریان و باراولیه در حالات زیر پیدا کنید.

۱۵. اهم $R=80$ ، هانری $L=20$ ، فاراد $C=0.01$ ، ولت $E=100$

۱۶. هانری $L=20$ ، فاراد $C=2\times 10^{-3}$ ، ولت $E=481\sin 10t$
اهم $R=160$

۱۷. اهم $R=6$ ، هانری $L=1$ ، فاراد $C=0.04$ ، ولت $E=24\cos 5t$

۱۸. نشان دهید که هرگاه $E(t)$ درشکل ۵۳ در لحظهٔ $t=a$ جهشی به‌اندازهٔ J داشته باشد آنگاه $\dot{I}(t)$ در لحظهٔ $t=a$ جهشی برابر J/L دارد در حالی‌که $I(t)$ در $t=a$ پیوسته است.

با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۸ شدت جریان $I(t)$ مدار LC شکل ۵۳ را با فرض هانری $L=1$، فاراد $C=1$ و صفر بودن شدت جریان و بار اولیه، در حالات زیر پیدا کنید.

۱۹. به‌ازای $0<t<a$ داشته باشیم $E=t$ وبه‌ازای $t>a$ داشته‌باشیم $E=0$.

۲۰. به‌ازای $0<t<a$ داشته باشیم $E=1$ وبه‌ازای $t>a$ داشته باشیم $E=0$.

۲۱. به‌ازای $0<t<\pi$ داشته باشیم $E=1-e^{-t}$ وبه‌ازای $t>\pi$ داشته‌باشیم $E=0$.

۲۲. نشان دهیدکــه هرگاه بار اولیهٔ خازن شکل ۵۴ برابر $Q(0)$ باشد، شدت جریان اولیهٔ مدار RC برابر است با

$$I(0)=\frac{E(0)}{R}-\frac{Q(0)}{RC}\,.$$

۲۳. نشان دهیدکه هرگاه $E(t)$ در شکل ۵۴ درلحظهٔ $t=a$ جهشی بـه اندازهٔ J داشته باشد آنگاه شدت جریان $I(t)$ مدار درلحظهٔ $t=a$ جهشی برابر J/R دارد.

با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۳ شدت جریان $I(t)$ در مدار RC شکل ۵۴ را بـا فرض اهم $E=1$، فاراد $C=1$ وصفر بودن بار اولیهٔ خازن برای حالات زیر پیدا کنید.

۲۴. بهازای $0<t<a$ داشته باشیم $E=t$ وبهازای $t>a$ داشته باشیم $E=a$.

۲۵. بهازای $0<t<a$ داشته باشیم $E=t$ و بهازای $t>a$ داشته باشیم $E=0$.

۱۵۰۲ روش مختلط برای بهدست آوردن جوابهای خصوصی

برای معادلهای بهصورت (۱) بخش ۱۴۰۲، مثلا

$$\ddot{I}+\dot{I}+2I=6\cos t\,, \qquad (1)$$

میدانیم که جواب خصوصی $I_p(t)$ را میتوانیم با روش ضرایب نامعین با جایگزینی

$$I_p(t)=a\cos t+b\sin t$$

در (۱) وتعیین a و b بهدست بیاوریم. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$I_p(t)=3\cos t+3\sin t$$

مهندسین اغلب یك روش مختلط ساده و آراسته را برای بـه دست آوردن $I_p(t)$ ترجیح میدهند. دراین روش با توجه بهاینکه $6\cos t$ در (۱) قسمت حقیقی

$$6e^{it}=6(\cos t+i\sin t)$$

است (بـه دستور اویلر در بخش ۴۰۲ رجوع شود) بهجای(۱) معادلهٔ دیفرانسیل زیررا بررسی میکنیم

$$\ddot{I}+\dot{I}+2I=6e^{it} \qquad (i=\sqrt{-1}) \qquad (2)$$

حال جواب خصوصی مختلطی بهصورت

$$I_p^*(t)=Ke^{it} \qquad (3)$$

را معین می‌کنیم. با جایگزینی این تابع و مشتقات آن

$$\dot{I}_p^* = iKe^{it} \quad , \quad \ddot{I}_p^* = -Ke^{it}$$

درمعادلهٔ (۲) داریم

$$(-۱+i+۲)Ke^{it} = ۶e^{it}.$$

که با حل آن نسبت به K به‌دست می‌آوریم

$$K = \frac{۶}{۱+i} = \frac{۶(۱-i)}{(۱+i)(۱-i)} = ۳-۳i\,.$$

بنابراین

$$I_p^*(t) = (۳-۳i)e^{it} = (۳-۳i)(\cos t + i\sin t)$$

یك جواب (۲) است. قسمت حقیقی I_p^* عبارت است از

$$I_p(t) = ۳\cos t + ۳\sin t$$

و این تابع جواب قسمت حقیقی معادلهٔ دیفرانسیل (۲) یعنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل مفروض (۱) است. در واقع، این تابع با آنچه دربالا به‌دست آمد همانند است. بدین‌ترتیب طرز کار عملی روش مختلط روشن می‌شود.

معادلهٔ (۱) حالت خاصی ازمعادلهٔ [ر. ك. (۱) بخش ۱۴.۲]

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{۱}{C}I = E_۰\omega\cos\omega t \qquad (۴)$$

است که حالا آن را با فرض $R \neq ۰$ بررسی می‌کنیم. معادلهٔ مختلط متناظر با آن عبارت است از

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{۱}{C}I = E_۰\omega e^{i\omega t} \qquad (۵)$$

ازتابع سمت راست چنین برمی‌آید که معادله جوابی خصوصی به‌صورت زیر دارد

$$I_p^*(t) = Ke^{i\omega t} \qquad (i = \sqrt{-۱}). \qquad (۶)$$

با جایگزینی این تابع و مشتقات آن

$$\dot{I}_p^* = i\omega Ke^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{I}_p^* = -\omega^۲ Ke^{i\omega t}$$

در (۵) داریم

$$\left(-\omega^{2}L+i\omega R+\frac{1}{C}\right)Ke^{i\omega t}=E_{0}\omega e^{i\omega t}.$$

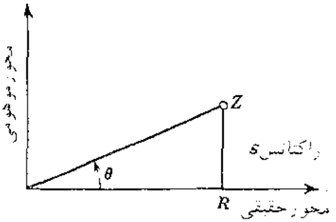
با حل این معادله نسبت به K به دست می‌آوریم

$$K=\frac{E_{0}\omega}{\frac{1}{C}-\omega^{2}L+i\omega R}=\frac{E_{0}}{iZ} \qquad (۷)$$

که درآن Z به‌اصطلاح **امپدانس مختلط** نامیده می‌شود و برابراست با

$$Z=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right). \qquad (۸)$$

نتیجه این می‌شود که رابطهٔ (۶) با K داده شده در (۷) جواب (۵) است.



شکل ۵۵. امپدانس مختلط Z

می‌بینیم که‌قسمت موهومی Z عبارت از راکتانس S است‌که با رابطهٔ (۴) بخش ۱۴.۲ تعریف شده و $|Z|$ عبارت است از امپدانس‌که در ارتباط با رابطهٔ (۵) بخش ۱۴.۲ تعریف شده است بنابراین داریم (ر.ك. به‌شکل ۵۵)

$$\tan\theta=\frac{S}{R} \quad \text{که درآن} \quad Z=|Z|e^{i\theta}$$

درنتیجه فرمول (۶) را، با K ای که در (۷) داده شده، می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$I_{p}^{*}(t)=\frac{E_{0}}{iZ}\,e^{i\omega t}=-i\,\frac{E_{0}}{|Z|}\,e^{i(\omega t-\theta)}$$

که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$I_p(t)=\frac{E_\circ}{|Z|}\sin(\omega t-\theta)=\frac{E_\circ}{\sqrt{R^۲+S^۲}}\sin(\omega t-\theta), \qquad (۹)$$

و این جواب قسمت حقیقی معادلهٔ دیفرانسیل (۵) است یعنی $I_p(t)$ جواب (۴) است. می‌بینیم که این تابع همانند (۵) بخش قبل است. چون

$$\sin(\omega t-\theta)=\sin\omega t\cos\theta-\cos\omega t\sin\theta$$

و بعلاوه

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{Re}Z}{|Z|}=\frac{R}{\sqrt{R^۲+S^۲}} \quad , \quad \sin\theta=\frac{\operatorname{Im}Z}{|Z|}=\frac{S}{\sqrt{R^۲+S^۲}}$$

جواب مزبور را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$I_p(t)=\frac{E_\circ}{R^۲+S^۲}[R\sin\omega t-S\cos\omega t]. \qquad (۱۰)$$

این همانند (۲) بخش قبل است که درآن a و b در (۳) همان بخش داده شده‌اند.

مسائل بخش ۲.۱۵

با استفاده ازروش مختلط، شدت جریان حالت مانای $I_p(t)$ را در مداری که درآن رابطهٔ (۴) صادق باشد برای حالات زیر پیدا کنید

۱. $R=۲۰$ ، $L=۱۰$ ، $C=۰/۰۵$ ، $E_\circ=۵$ ، $\omega=۲$

۲. $R=۱۰۰$ ، $L=۱۰۰$ ، $C=۱۰^{-۳}$ ، $E_\circ=۳$ ، $\omega=۴$

۳. $R=۵۰$ ، $L=۲۵$ ، $C=۰/۰۱$ ، $E_\circ=۵۰۰$ ، $\omega=۳$

۴. $R=۱۰$ ، $L=۲۰$ ، $C=۰/۱$ ، $E_\circ=۴$ ، $\omega=۲$

۵. $R=۲۵$ ، $L=۱۵$ ، $C=۰/۰۵$ ، $E_\circ=۱۰۰$ ، $\omega=۴$

۶. امپدانس مختلط Z و راکتانس S مسئلهٔ ۵ را پیدا کنید.

با استفاده از روش مختلط خروجی حالت مانای معادلات زیر را پیدا کنید.

۷. $\ddot{y}+۳\dot{y}+۱۶y=۲۴\cos ۴t$

۸. $\ddot{y}+\dot{y}+۴y=۸\sin ۲t$

۹. $\ddot{y}+5\dot{y}+\frac{1}{8}y=25\cos 10t$

۱۰. $\ddot{y}+\dot{y}+9y=-3\sin 3t$

۱۶.۲ روش عمومی حل معادلات غیرهمگن

روش ضرایب نامعین در بخش ۱۲.۲ رویهٔ ساده‌ای برای به‌دست‌آوردن جوابهای یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی غیرهمگن است و در بخشهای ۱۳.۲–۱۵.۲ دیده‌ایم که این روش کاربردهای مهمی در ارتباط با ارتعاشات دارد. معذلك این روش به نمونه‌های ساده‌تری از معادلات دیفرانسیل محدود می‌شود. روشی که دراین بخش مورد بحث قرار می گیرد کاملا عمومی اما پیچیده‌تر ازآن روش خواهد بود.

معادلهٔ دیفرانسیل خطی به‌صورت

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x) \tag{1}$$

را در نظر می گیریم با این فرض که f ، g و r در فاصلهٔ باز I پیوسته باشند. جواب خصوصی (۱) را با استفاده از روش **تغییر پارامترها**[1] به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آوریم.

می‌دانیم که معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با آن، یعنی

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0 \tag{2}$$

درفاصلهٔ I یك جواب عمومی $y_h(x)$ به‌صورت زیر دارد

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

این روش عبارت ازآن است که بجای c_1 و c_2 توابع $u(x)$ و $v(x)$ راکه باید تعیین شوند قرار دهیم به‌طوری که تابع حاصل، یعنی

$$y_p(x)=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x) \tag{3}$$

جواب خصوصی (۱) در I باشد. با مشتقگیری از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$y_p'=u'y_1+uy_1'+v'y_2+vy_2'.$$

خواهیم دید که u و v را می‌توانیم طوری تعیین کنیم که

$$u'y_1+v'y_2=0. \tag{4}$$

این عبارت y_p' را به‌صورت

$$y_p'=uy_1'+vy_2'. \tag{5}$$

---

۱. دانشجو می‌تواند برای کاربرد ساده‌تری ازاین روش، بخش ۸.۱ را مرور کند.

تحویل می‌نماید. با مشتقگیری ازاین تابع داریم

$$y_p'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' , \qquad (۶)$$

با جایگزینی (۳) ، (۵) و (۶) در (۱) و مرتب کردن جملاتی که شامل u و v هستند به‌دست می‌آوریم

$$u(y_1'' + fy_1' + gy_1) + v(y_2'' + fy_2' + gy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r.$$

چون y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ همگن (۲) هستند این رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u'y_1' + v'y_2' = r.$$

معادلهٔ (۴) عبارت است از

$$u'y_1 + v'y_2 = 0.$$

این یك دستگاه دو معادلهٔ جبری خطی با توابع مجهول u' و v' است. جواب با قاعدهٔ کرامر (ر. ك. به‌بخش ۹.۷) به‌دست می‌آید. پیدا می‌کنیم

$$u' = -\frac{y_2 r}{W} \quad , \quad v' = \frac{y_1 r}{W} \quad , \qquad (۷)$$

که درآنها

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

رانسکین y_1 و y_2 است (ر. ك. به‌بخش ۸.۲). واضح است که $W \neq 0$ زیرا y_1، y_2 پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند. با انتگرالگیری از (۷) داریم

$$u = -\int \frac{y_2 r}{W} dx \quad , \quad v = \int \frac{y_1 r}{W} dx \cdot$$

این انتگرالها به‌دلیل پیوسته بودن $r(x)$ وجود دارند. با جایگزینی این عبارات برحسب u و v در (۳) جواب مطلوب (۱) را به‌دست می‌آوریم

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx \cdot \qquad (۸)$$

توجه کنید که هرگاه ثابت انتگرالگیری (۸) دلخواه باشد آنگاه (۸) جواب عمومی (۱) را نمایش می‌دهد.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' + y = \sec x. \qquad (۹)$$

روش‌ضرایب نامعین (بخش ۱۲.۲) را نمی‌توان به‌کار برد. توابع

$$y_۱=\cos x \quad , \quad y_۲=\sin x$$

تشکیل یك پایهٔ جواب معادلهٔ همگن را می‌دهند. رانسکین آنها عبارت است از

$$W(y_۱, y_۲)=\cos x \cos x-(-\sin x)\sin x=۱.$$

بنابراین جواب خصوصی (۹) را از (۸) به‌دست می‌آوریم:

$$y_p=-\cos x\int \sin x \sec x\, dx+\sin x\int \cos x \sec x\, dx$$

$$=\cos x \ln|\cos x|+x \sin x.$$

جواب عمومی متناظر به معادله دیفرانسیل (۹) عبارت است از:

$$y=y_h+y_p=[c_۱+\ln|\cos x|]\cos x+(c_۲+x)\sin x$$

مسائل بخش ۱۶.۲

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱. $y''+y=\csc x+x$

۲. $y''+۹y=\sec ۳x$

۳. $y''-۴y'+۴y=e^{۲x}/x$

۴. $y''+۶y'+۹y=e^{-۳x}/(x^۲+۱)$

۵. $y''+۲y'+y=e^{-x}\cos x$

۶. $y''+۲y'+y=e^{-x}\ln x$

۷. $(D^۲-۲D+۱)y=x^{۳/۲}e^x$

۸. $(D^۲-۲D+۱)y=e^x/x^۳$

۹. $(D^۲+۲D+۲)y=e^{-x}/\cos^۳ x$

۱۰. $(x^۲D^۲-۴D+۵)y=e^{۲x}/\sin x$

۱۱. $(D^۲+xD-۱)y=۴$

۱۲. $(x^۲D^۲-۲)y=۳x^۲$

۱۳. $(x^2D^2-2xD+2)y=x^4$

۱۴. $(x^2D^2+xD-0.25)y=1/x$

۱۵. $(x^2D^2-2xD+2)y=1/x^2$

۱۶. $(x^2D^2-2xD+2)y=x^3\cos x$

۱۷. $x^2y''-4xy'+6y=1/x^4$

۱۸. $x^2y''-4xy'+6y=x^4\sin x$

۱۹. $xy''-y'=2x^2e^x$

۲۰. $x^2y''+xy'-y=x^3e^x$

۳

دستگاههای معادلات دیفرانسیل، صفحهٔ فاز، پایداری

بخش ۱.۳ به دستگاههای معادلات دیفرانسیل اختصاص داده شده است. این قسمت به‌صورت مقدماتی و بدون استفاده از ماتریسها بیان می‌شود. (روش ماتریسی بررسی دستگاهها در بخش ۵.۷ ارائه خواهد شد.)

در بخش ۲.۳ به‌بررسی معادلات دیفرانسیل در صفحهٔ فاز می‌پردازیم.

پایداری مفهومی است در ریاضیات مهندسی جدید، مثلاً در رابطه با مدارهای فیدبك و دستگاههای کنترل، که اهمیتی فزاینده دارد. این یك مفهوم فیزیکی است و تقریباً بدین معنی است که تغییرات کوچکی در دستگاه فیزیکی در یك لحظه فقط باعث تغییراتی جزئی در رفتار دستگاه در تمام لحظات بعدی شود. ما پایداری را در بخش ۳.۳، در ارتباط با معادلات دیفرانسیل با استفاده از صفحهٔ فاز بررسی می‌کنیم.

پیشتاز این فصل: فصلهای ۱ و ۲.

مراجع: ضمیمهٔ ۱ قسمت ب.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۳ دستگاههای معادلات دیفرانسیل

دستگاههای معادلات دیفرانسیل کاربردهای مهمی دارد. مثلاً، این دستگاهها به‌عنوان مدلهایی برای دستگاههای مکانیکی یا الکتریکی، که ترکیباتی از دستگاههای سادهٔ بحث شده در

بخشهای ۲.۶ ، ۲.۱۳ و ۲.۱۴ هستند، به‌کرات مطرح می‌شوند.

بخش حاضر مشتمل بر روش حل مقدماتی[1] دستگاههای معادلات دیفرانسیل است و ما روش **حذفی** را بررسی می‌کنیم. در این روش توابع مجهول ومشتقات آنها را پی‌درپی حذف‌می‌کنیم تا به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ بالاتری برسیم که تنها شامل یك تابع مجهول ومشتقات آن است. با حل این معادله سایر توابع مجهول به‌نوبت معلوم می‌شوند. حال با ذکر یك مثال نوعی به‌بیان جزئیات امر می‌پردازیم.

مثال ۱

دستگاه

$$\dot{x} = ۴x - ۲y \qquad \text{(الف)}$$
$$\dot{y} = x + y \qquad \text{(ب)} \qquad (۱)$$

را که شامل دومعادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ‌اول است درنظر بگیرید. x و y توابع‌مجهول نسبت به t هستند. منظور از جواب (۱) زوجی از توابع x و y است که وقتی آنها را در (۱) قراردهیم این‌معادلات به‌یك اتحاد تبدیل شوند. دستگاه رابا روش‌حذفی به‌ترتیب زیر حل می‌کنیم. از (۱ الف) داریم

$$y = -\frac{۱}{۲}\dot{x} + ۲x. \qquad (۲)$$

از (۱ الف) مشتق می‌گیریم. در معادلهٔ حاصل نخست $\dot{y}$ را از (۱ ب) و سپس y را از (۲) جایگزین می‌کنیم. این‌کار منجر به

$$\ddot{x} = ۴\dot{x} - ۲\dot{y}$$
$$= ۴\dot{x} - ۲(x + y)$$
$$= ۴\dot{x} - ۲x - ۲\left(-\frac{۱}{۲}\dot{x} + ۲x\right).$$

می‌شود. پس از مرتب نمودن و ساده‌کردن جملات داریم

$$\ddot{x} - ۵\dot{x} + ۶x = ۰.$$

جواب عمومی عبارت است از

$$x = c_۱e^{۳t} + c_۲e^{۲t}. \qquad (\text{۳ الف})$$

۱. یعنی، بدون استفاده ازبردارها و ماتریسها. روش برداری در فصل مربوط بـه ماتریسها (دربخش ۱۵.۷) آمده است. البته‌کسانی که بابردارها وماتریسها آشنا هستند می‌توانند مستقیماً بخش ۱۵.۷ را مطالعه‌کنند.

با مشتقگیری نتیجه می‌شود

$$\dot{x} = ۳c_۱e^{۳t} + ۲c_۲e^{۲t}.$$

بنابراین از (۲) داریم

$$y = \frac{۱}{۲}c_۱e^{۳t} + c_۲e^{۲t}. \qquad (۳\ ب)$$

به‌طور کلی، روش حذفی در مورد دستگاههایی به‌صورت

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_۱x + b_۱y + f_۱(t) \qquad (\text{الف}) \\ \dot{y} &= a_۲x + b_۲y + f_۲(t) \qquad (\text{ب}) \end{aligned} \qquad (۴)$$

اعمال می‌شود که درآنها $f_۱$ و $f_۲$ توابعی داده‌شده و $a_۱$ ، $b_۱$ ، $a_۲$ ، $b_۲$ اعدادی ثابت هستند. اگر $b_۱ = a_۲ = ۰$، دستگاه به دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول مجزا تبدیل می‌شود که هریك را می‌توان با روش بخش ۷.۱ حل نمود. هرگاه یکی از این دو ثابت، مثلا $b_۱$، صفر نباشد می‌توانیم ازروشی مشابه آنچه درمثال ۱ گفتیم استفاده کنیم. یعنی، اول از (۴ الف) به‌دست می‌آوریم

$$b_۱y = \dot{x} - a_۱x - f_۱ \qquad (۵)$$

حال از (۴ الف) مشتق می گیریم. در معادلهٔ حاصل $\dot{y}$ را از (۴ ب) و سپس $b_۱y$ را از (۵) قرارمی‌دهیم. نتیجه $\dot{f}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_۱\dot{x} + b_۱\dot{y} + \dot{f}_۱ \\ &= a_۱\dot{x} + b_۱(a_۲x + b_۲y + f_۲) + \dot{f}_۱ \\ &= a_۱\dot{x} + b_۱a_۲x + b_۲(\dot{x} - a_۱x - f_۱) + b_۱f_۲ + \dot{f}_۱ . \end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات داریم

$$\ddot{x} - (a_۱ + b_۱)\dot{x} + (a_۱b_۲ - b_۱a_۲)x = r(t)$$

که در آن

$$r(t) = b_۱f_۲(t) - b_۲f_۱(t) + \dot{f}_۱(t).$$

با حل این معادله x را پیدا می کنیم. سپس y از (۵) به‌دست می‌آید.

آیا می‌توان روش حذفی را درمورد دستگاههای عمومیتری که جنبه‌های عملی آنها مورد توجه است توسعه داد؟ جواب مثبت است و ما با ارائهٔ دو مثال نوعی در این باره بحث می کنیم.

مثال ۲. دستگاه مکانیکی

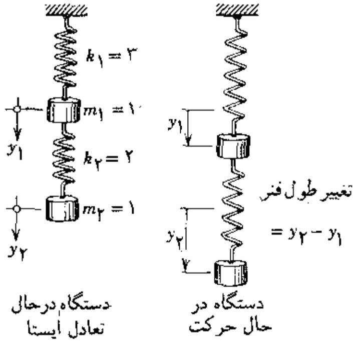
شکل ۵۶ یك‌دستگاه مکانیکی‌را نشان می‌دهد که متشکل از دو وزنه و دو فنر است. مدلی ریاضی برای این دستگاه درست کنید و آن را حل نمایید؛ یعنی، جابجاییهای $y_1(t)$ و $y_2(t)$ وزنه‌ها را از وضعیت تعادل استاتیکی ($y_1 = 0$ و $y_2 = 0$) با در نظر گرفتن مفروضات بخش ۶.۲ پیداکنید (حرکت در امتداد قائم است، میرایی وجود ندارد و از وزن وزنه‌ها صرفنظر می‌شود).

حل. مانند بخش ۶.۲ معادلات دیفرانسیل مربوط به این دستگاه مکانیکی از قانون دوم نیوتن چنین به‌دست می‌آید:

$$\ddot{y}_1 = -3y_1 + 2(y_2 - y_1)$$
$$\ddot{y}_2 = -2(y_2 - y_1).$$

این روابط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\text{(6)} \qquad \ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2 \quad \text{(الف)}$$
$$\ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2. \quad \text{(ب)}$$



شکل ۵۶. مثال ۲

از (۶ الف) داریم

$$\text{(7)} \qquad y_2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_1 + \frac{5}{2}y_1$$

در مثال ۱ یك مرتبه مشتق گرفتیم. در اینجا از (۶ الف) دو مرتبه مشتق می گیریم. در معادلهٔ حاصل $\ddot{y}_2$ را از (۶ ب) و y_2 را از (۷) قرار می‌دهیم. نتیجه چنین است

$$y_1'''' = -5\ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2$$
$$= -5\ddot{y}_1 + 2(2y_1 - 2y_2)$$
$$= -5\ddot{y}_1 + 4y_1 - 4\left(\frac{1}{2}\ddot{y}_1 + \frac{5}{2}y_1\right).$$

با مرتب نمودن جملات داریم

$$y_1'''' + 7\ddot{y}_1 + 6y_1 = 0. \tag{8}$$

معادلهٔ مشخصهٔ $\lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = 0$ نسبت به $p = \lambda^2$ درجه‌دوم است. ریشه‌ها عبارت‌اند از $p_1 = -1$ و $p_2 = -6$. از این‌رو λ دارای چهار مقدار i ، $-i$ ، $\sqrt{6}i$ ، $-\sqrt{6}i$ می‌باشد. بنابراین جواب عمومی (۸) را چنین به‌دست می‌آوریم

$$y_1 = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos\sqrt{6}t + b_2 \sin t\sqrt{6}t. \tag{۹ الف}$$

با دوبار مشتقگیری داریم

$$\ddot{y}_1 = -a_1 \cos t - b_1 \sin t - 6a_2 \cos\sqrt{6}t - 6b_2 \sin\sqrt{6}t$$

با استفاده از این روابط و (۹ الف) از (۷) به‌دست می‌آوریم

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{2}a_2 \cos\sqrt{6}t - \frac{1}{2}b_2 \sin\sqrt{6}t. \tag{۹ ب}$$

این‌جواب (۹) برای (۶) نشان‌دهندهٔ نوسانات همساز دو وزنه دردستگاه مکانیکی‌مفروض است.

مثال ۳. شبکهٔ الکتریکی

شدت جریانهای $I_1(t)$ و $I_2(t)$ شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۵۷ را پیدا کنید با این فرض که در لحظهٔ $t = 0$ که کلید بسته است تمام بارها و جریانها صفر باشند.

حل. مدل ریاضی شبکه از قانون ولتاژ کیرشهف، مانند بخش ۱۴۰۲، به دست می‌آید. از حلقهٔ سمت چپ نتیجه می‌شود

$$\dot{I}_1 + 4(I_1 - I_2) = 12.$$

برای حلقه سمت راست داریم

$$6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int I_2\,dt = 0.$$

با دوباره‌نویسی معادلهٔ اول و مشتقگیری از معادلهٔ دوم درمی‌یابیم که جریانهای I_1 و I_2 شبکه در دستگاه زیرصادق‌اند

(الف) $\dot{I}_1 + 4I_1 - 4\dot{I}_2 = 12$

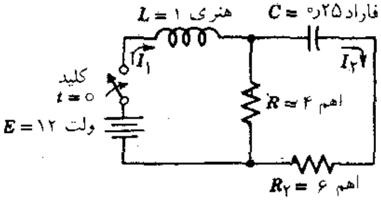
(ب) $-4\dot{I}_1 + 10\dot{I}_2 + 4I_2 = 0.$ (۱۰)

توجه داشته باشید که معادلهٔ دوم شامل مشتقات هر دو تابع مجهول است. دستگاه (۱۰) را حل می‌کنیم. از (۱۰ الف) داریم

$$I_2 = \frac{1}{4}\dot{I}_1 + I_1 - 3 \qquad (۱۱)$$

با مشتقگیری داریم

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{4}\ddot{I}_1 + \dot{I}_1.$$



شکل ۵۷. مثال ۳

با جایگزینی این مقدار و نیز (۱۱) در (۱۰ ب) به‌دست می‌آوریم

$$-4\dot{I}_1 + 10\left(\frac{1}{4}\ddot{I}_1 + \dot{I}_1\right) + 4\left(\frac{1}{4}\dot{I}_1 + I_1 - 3\right) = 0.$$

پس از ساده نمودن نتیجه می‌شود

$$\ddot{I}_1 = \frac{14}{5}\dot{I}_1 + \frac{8}{5}I_1 = \frac{24}{5}$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$\dot{I}_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{-0.8t} + 3. \qquad (۱۲ \text{ الف})$$

و مشتق آن چنین است

$$\dot{I}_1 = -2c_1e^{-2t} - 0.8c_2e^{-0.8t}.$$

از این رابطه و (۱۱) اکنون می‌توانیم I_2 را محاسبه کنیم:

$$I_2 = \frac{1}{2} c_1 e^{-2t} + \frac{4}{5} c_2 e^{-0.8t}. \qquad (۱۲\ ب)$$

شرایط اولیه عبارتند از $I_1(0)=0$ و $I_2(0)=0$. از این‌رو بنابه (۱۲):

$$I_1(0) = c_1 + c_2 + 3 = 0\,,$$

$$I_2(0) = \frac{1}{2} c_1 + \frac{4}{5} c_2 = 0\,.$$

ونتیجه می‌شود $c_1 = -8$ و $c_2 = 5$. بنا براین جواب مسئله چنین است

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3$$

$$I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0.8t}.$$

می‌بینیم وقتی که $t \to \infty$، I_1 به‌مقدار ۳ آمپر میل می‌کند درحالی که I_2 به‌سمت‌صفر میل می‌کند. این امر قابل انتظار بود. چرا؟

مسائل بخش ۳-۱۰

دستگاههای معادلات دیفرانسیل زیر را (که درآنها $D=d/dt$) حل کنید.

۱. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$

۲. $Dx = x + y$, $Dy = 4x + y$

۳. $\dot{x} + \dot{y} = \cos t$, $\dot{x} - \dot{y} = \sin t$

۴. $(D+4)x + 6y = 0$, $(D-1)y - x = 0$

۵. $\ddot{x} = y + 1$, $\ddot{y} = x + t$

۶. $(D-2)x + 2Dy = 2 - 4e^{2t}$, $(2D-3)x + (3D-1)y = 0$

جوابهای معادلات زیر را طوری پیدا کنید که شرایط داده شده درآنها صدق کند

۷. $Dx = 3x + 4y$, $Dy = 4x - 3y$, $x(0) = 1,\quad y(0) = 3$

۸. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -8x + 11y$, $x(0) = 1,\quad y(0) = 1$

۹. $(D-۲)x-۳y=۲e^{۲t}$

$-x+(D-۴)y=۳e^{۲t}$

$x(۰)=-۲/۳\,,\ y(۰)=۱/۳$

۱۰. $\dot{x}=۵x+۴y-۵t^۲+۶t+۲۵$

$\dot{y}=x+۲y-t^۲+۲t+۴$

$x(۰)=۰\,,\quad y(۰)=۰$

۱۱. جواب (۹) درمثال ۲ عبارت از جمع اثرهای دو نوسان همساز است. نشان دهید که حالات خاص عبارتند از

(الف) $y_۱=\sin t,\qquad y_۲=۲\sin t$

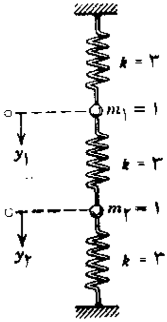
(ب) $y_۱=\sin\sqrt{۶}\,t,\qquad y_۲=-\frac{۱}{۲}\sin\sqrt{۶}t$

نشان دهید که‌در(الف)درهرلحظه، وزنه‌ها هردو با هم بالا یا هردو باهم‌پایین‌می‌روند بنابراین، درهر زمان مفروض، هردو فنر کشیده یا هر دو فنر فشرده می‌شوند. نمودار (الف) را رسم کنید؛ دستگاههای مختصات جداگانه را بدین ترتیب انتخاب کنید که محورهای آنها موازی بوده و مبدأ دستگاه $ty_۲$ به‌اندازهٔ ۲ درحدود امتداد قائم‌زیر مبدأ دستگاه $ty_۱$ قرار گیرد. به طریقی مشابه (ب) را مورد بحث قرار داده ونمودار آن را رسم کنید. مقایسه کنید، آیا قابل توجیه است که (ب) بسامد بالاتری از(الف) داشته باشد؟

۱۲. مدلی برای دستگاه مکانیکی شکل زیر بسازید وآن را با مفروضات فیزیکی‌ای که‌در مثال ۲ داشتیم حل کنید. در حالت خاص جوابهای متناظر با سرعتهای اولیهٔ صفر و جابجاییهای اولیه صفر را پیدا کنید، نمودار آنها را رسم نموده با هم مقایسه کنید.

(الف) $y_۱(۰)=۱\ ،\ y_۲(۰)=۱$

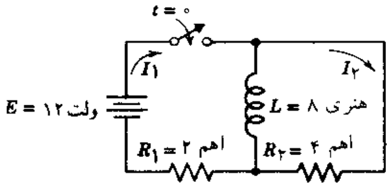
(ب) $y_۱(۰)=-۱\ ،\ y_۲(۰)=۱$



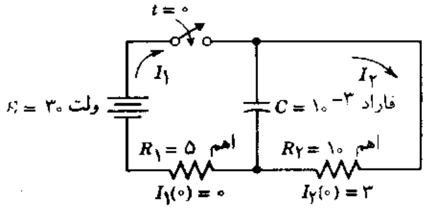
مسئله ۱۲. (دستگاه درحال تعادل‌استاتیکی)

۱۳. مدل شبکهٔ شکل ۵۷ را حل کنید. فرض بر این است که ولت $E = ۱۰۰$ ، و سایر دادهها مانند حالت قبل باشد. این مسئله را با مثال ۳ مقایسه کنید و نظر بدهید.
برای شبکههای زیر مدلی (دستگاه معادلات دیفرانسیل) بسازید و آن را حل کنید. همچنین شدت جریانهای حالت مانا را تعیین نمایید.

۱۴.



۱۵.



۲.۳ صفحهٔ فاز

یك دستگاه مکانیکی را درصورتی خودگردان نامند که معادلهٔ دیفرانسیل آن بهطور صریح شامل متغیرمستقل (مثلا زمان t) نباشد. بدین ترتیب اگرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم باشد شکل آن بهصورت زیر است

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}) = ۰. \tag{۱}$$

دراینجا $\dot{y} = dy/dt = v$ سرعت است. بنابه قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\,\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v. \tag{۲}$$

بنا براین یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول برای v بهصورت تابعی از متغیر y که حالامتغیر مستقل میشود بهدست میآوریم. (همچنینمسائل بخش ۱.۲ را ببینید.) جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل جدیدمنحنیهائی را درصفحهٔ yv نمایشمیدهند. صفحهٔ yv را **صفحهٔ فاز** نامند.

این اصطلاح از مکانیك گرفته شده است که در آن‌جا منظور از «صفحهٔ فاز» صفحهٔ yp است، $p=mv$ اندازهٔ حرکت و m جرم نقطهٔ مادی درحال حرکت است.

مثال ۱. نوسانات همساز

دستگاه مرتعش خودگردان به‌معادلات (ر. ك. بخش ۶.۲)

$$\ddot{y}+y=0, \quad y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=1$$

دارای جواب زیر است (شکل ۵۸ الف)

$$y=\sin t.$$

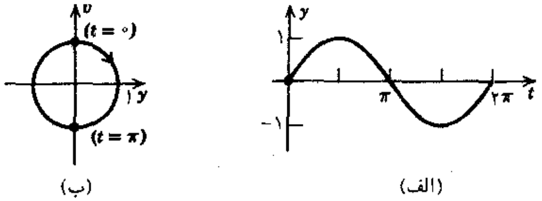
با استفاده از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dv}{dy}v+y=0, \quad v(0)=1.$$

ازاین‌رو

$$v^2+y^2=1 \quad \text{و} \quad v\,dv+y\,dy=0$$

واین نشان می‌دهد که در صفحهٔ فاز یك نوسان همساز به‌شکل دایره ظاهر می‌شود (شکل ۵۸ ب). توجه کنید که متناظر با هرمقدار t نقطه‌ای روی دایره با مختصات $y(t)$ و $v(t)$ وجود دارد. درصورت تمایل می‌توانیم نقاط را مطابق شکل۵۸ ب، به‌ازای $t=0$ و $t=\pi$ مشخص نموده وجهت ازدیاد t را با فلش نشان دهیم.



شکل ۵۸. نمودار یك نوسان همساز
(الف) درصفحهٔ xy، (ب) درصفحهٔ فاز

معادلهٔ جدیدی که با استفاده از (۲) به دست آمده ازمرتبهٔ اول است. از این‌رو می‌توانیم یك میدان راستا (بخش ۲.۱) درصفحهٔ فاز به‌کار بریم تا رفتار عمومی‌جوابهای $v(y)$ را، بدون آنکه عملاً آن معادله را حل کرده باشیم، مورد بحث قرار دهیم. مهندسین بکرات از این امکان بهره می گیرند، مخصوصاً درمورد معادلات دیفرانسیل غیرخطی این

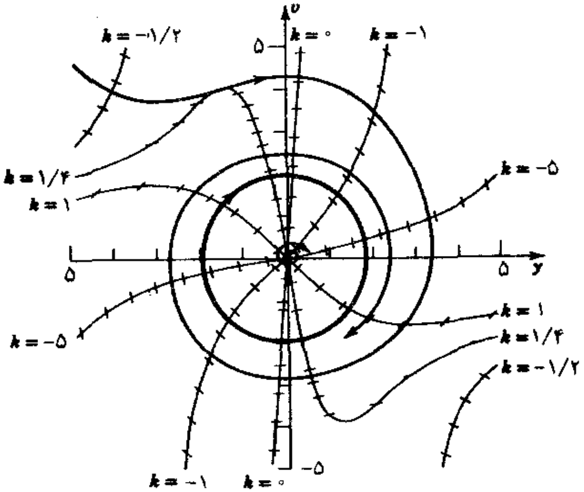
موضوع را با ذکر یك مثال خیلی مهم روشن می‌کنیم.

مثال ۲. نوسانات خود تقویتی، معادلهٔ واندرپل*

سیستمهای فیزیکی‌ای وجود دارند که درنوسانات کوچك به‌سیستم انرژی‌داده می‌شود، در حالی که در نوسانات بزرگ انرژی از سیستم گرفته می‌شود. به عبارت دیگر نوسانات بزرگ ممکن است میرا باشند در حالی که برای نوسانات کوچك «میرایی منفی» وجود دارد (دادن انرژی به سیستم). به دلایل فیزیکی انتظار داریم که چنین دستگاهی به رفتار دوره‌ای متمایل گردد که به صورت یك منحنی بسته که آن را **چرخهٔ حدی** می‌نامند در صفحهٔ فاز ظاهر شود. معادلهٔ دیفرانسیل مشهوری که چنین ارتعاشاتی را بیان می‌کند معادلهٔ واندرپل است

$$\ddot{y}-\mu(1-y^2)\dot{y}+y=0 \qquad (\mu>0) \qquad (۳)$$

این معادله درمطالعهٔ مدارهای الکتریکی شامل لامپهای خلأ به‌کارمی‌رود. به ازای $\mu=0$ داریم $\ddot{y}+y=0$ و نوسانات همساز را به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم $\mu>0$ جملهٔ مربوط به‌میرایی دارای ضریب $-\mu(1-y^2)$ است. این مقدار در نوسانات کوچك



شکل ۵۹. نمودار تکه ـ خطی برای معادلهٔ واندرپل به‌ازای $\mu=۰٫۱$ درصفحهٔ فاز که همچنین چرخهٔ حدی ودو منحنی جواب را نشان می‌دهد.

---

* Van der Pol

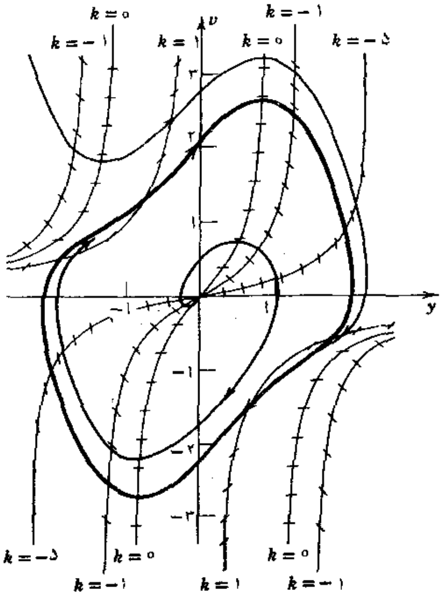
یعنی وقتی که $1 > y^2$، منفی است بنابراین «میرایی منفی» به ازای $y^2 = 1$ برابر صفر است (بدون میرایی) و این مقدار مثبت است هر گاه $y^2 > 1$ (میرایی مثبت، اتلاف انرژی). اگر μ کوچك باشد ما انتظار یك چرخهٔ حدی را داریم که تقریباً یك دایره است زیرا دراین‌صورت معادلهٔ اصلی اختلاف کمی با $\ddot{y}+y=0$ دارد. اگر μ بزرگ باشد چرخهٔ حدی احتمالا به گونه‌ای متفاوت خواهد بود.

با استفاده از $\ddot{y}=v\,dv/dy$، از (۳) داریم

$$\frac{dv}{dy}v-\mu(1-y^2)v+y=0.$$

منحنیهای همشیب عبارت‌اند از ثابت $= dv/dy=k$، یعنی

$$\frac{dv}{dy}=\mu(1-y^2)-\frac{y}{v}=k. \qquad (۴)$$



شکل ۶۰. نمودار تکه ـ خطی برای معادلهٔ واندرپل به‌ازای $\mu=1$ درصفحهٔ فاز که همچنین چرخهٔ حدی، ودو منحنی جواب را نشان می‌دهد.

این رابطه منجر می‌شود به

$$v=\frac{y}{\mu(1-y^2)-k}$$

این منحنیها کمی پیچیده هستند. شکل ۵۹ برخی ازاین منحنیها را به ازای مقدار کوچك $\mu=0.1$ نشان‌می‌دهد؛ این شکل همچنین چرخهٔ حدی (تقریباًیك‌دایره) ودومنحنی جواب را، که یکی ازخارج و دیگری از داخل به چرخهٔ حدی می‌رسد، نشان می‌دهد. منحنی‌دوم به‌صورت یك حلزونی باریك است وفقط قسمت اصلی آن درشکل نشان داده شده است. برای مقادیر بزرگ μ وضعیت تغییر می کند و چرخهٔ حدی دیگر شبیه به‌دایره نمی‌ماند. شکل ۶۰ این مطلب را به‌ازای $\mu=1$ روشن می‌نماید. توجه‌کنیدکه نزدیك شدن منحنی جواب $v(y)$ به‌چرخهٔ حدی به‌مراتب سریعتر است تا درمورد $\mu=0.1$.

مسائل بخش ۲.۳

۱. جواب عمومی مثال ۱ عبارت است از $y=A\cos t+B\sin t$. شعاع دایرهٔ متناظر با آن درصفحهٔ فاز چه‌اندازه است؟

۲. نوسانات‌میرای $y(t)=e^{-t}\sin t$ را درنظر بگیرید. بعضی از نقاط منحنی‌متناظر را درصفحهٔ فاز رسم کنید تا دریابیدکه این باید یك حلزونی باشد.

معادلات زیر را حل‌کنید ونوع منحنیهای متناظر با آن را درصفحهٔ فازنمایش دهید.

۳. $4\ddot{y}+y=0$ ۴. $\ddot{y}+\omega^2 y=0$

۵. $\ddot{y}-y=0$ ۶. $\ddot{y}-k^2 y=0$

معادلات زیر را به‌مرتبهٔ اول تحویل نموده وجواب آنها را پیداکنید وبرخی ازمنحنیهای جواب را درصفحهٔ فاز رسم‌کنید

۷. $\ddot{y}=\dot{y}$ ۸. $\ddot{y}+3\dot{y}=0$ ۹. $y\ddot{y}+\dot{y}^2=0$ ۱۰. $\ddot{y}+\dot{y}^2=0$

۱۱. **(آونگ)** نشان دهیدکه حرکت یك آونگ غیرمیرا به‌طول l (شکل ۴۰ بخش۶.۲) به‌صورت معادلهٔ غیرخطی زیر نشان داده می‌شود.

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

که درآن $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ شتاب ثقل درسطح زمین است. نمودار صفحهٔ فاز رابا فرض $l=2\ \mathrm{m}$ و منحنی متناظر با جواب $\theta(t)$ که در آن $\theta(0)=0$ و $\dot{\theta}(0)=1\ \mathrm{m/s}$ را رسم‌کنید.

۳.۳ نقاط بحرانی-پایداری

می‌توانیم بدون آنکه معادلات را حل کنیم از صفحهٔ فاز دربارهٔ رفتار عمومی جوابهای معادلات دیفرانسیل اطلاعاتی به دست آوریم. هرچقدر معادلات پیچیده‌تر باشند این امر مهمترخواهد بود.

دراین بخش خواهیم دید که دستگاههای معادلات دیفرانسیل را از طریق صفحهٔ فاز نیز می‌توان مطالعه کرد. این کار به شیوه‌ای نسبتاً طبیعی منجر به بررسی پایداری می گردد. مفاهیم پایداری درفیزیك عنوان می‌شود که درآنجا معنی پایداری به تقریب این است که تغییر کوچکی (اغتشاش کوچکی) دریك دستگاه فیزیکی دریك لحظه فقط تغییراتی جزئی دررفتار دستگاه را برای تمام زمانهای بعدی باعث شود.

اول یادآوری می کنیم که یك معادلهٔ دیفرانسیل

$$\ddot{y} = G(y,\ \dot{y})$$

را می‌توان به‌صورت دستگاه

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{v} = G(y,\ v)$$

نوشت و یك جواب $y(t)$ ، $v(t)$ این دستگاه منحنی‌ای را در صفحهٔ yv ، صفحهٔ فاز ، نمایش می‌دهد (بخش ۲.۳).

درحال‌حاضر برای بحث کلیترمناسب این است که نمادگذاری‌راتغییردهیم. بجای y می گذاریم x وبجای v می گذاریم y . دراین صورت صفحهٔ فاز عبارت از صفحهٔ xy است‌ودستگاه ما عبارت است از $\dot{x} = y$ ، $\dot{y} = G(x,\ y)$. به‌صورت کلیتردستگاههایی به‌صورت

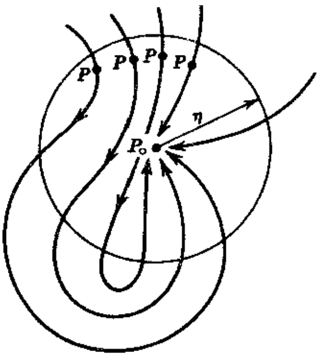
$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,\ y) \\ \dot{y} &= G(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

که درآن y هرمتغیری است، ونه‌لزوماً $\dot{x}$ ، را درنظر می گیریم. یك جواب $x(t)$ ، $y(t)$ برای (۱) نمایش دهندهٔ یك منحنی c درصفحهٔ xy (ویا درحالت تبهگون به‌صورت یك نقطه) است. این منحنی را منحنی جواب یا **راه** (بعضی اوقات مسیر) (۱) می‌نامند. جهتی راکه t زیـاد می‌شود جهت مثبت در c نامیده و با علامت سهم نشان می‌دهند. این سهم جهت‌گیری c را تعریف می کند. هر گاه t زمان و c مسیر یك جسم متحرك باشدجهت‌مثبت جهتی است که با گذشت زمان جسم درطول c حرکت می کند.

از (۱) می‌بینیم که شیب یك مسیر مار برنقطهٔ $P:(x,\ y)$ عبارت است از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,\ y)}{F(x,\ y)}. \tag{2}$$

توجه کنید کـه (۲) هیچ اطلاعاتی دربارهٔ جهت گیری یك مسیر نمی‌دهد. همچنین توجه داشته باشید که در P باید داشته باشیم $F(x,y) \neq 0$. هر گاه در P ، $F(x, y)=0$ اما $G(x, y) \neq 0$ ، می‌توانیم بجای (۲) از $dx/dy=F(x, y)/G(x, y)$ استفاده نموده و از $dx/dy=0$ نتیجه بگیریم که مماس بر C در P قائم است. لکن هر گاه هم F و هم G درنقطه‌ای صفر باشند چه می‌توان کرد؟ این مسئله مبحث اصلی این بخش است و به نتایج جالبی منجر می‌شود که از نظر عملی حائز اهمیت است.



شکل ۶۱. نقطهٔ بحرانی جاذب P_0 از (۱)

نقطه‌ای مانند $P_0:(x_0, y_0)$ را که در آن هم F و هم G صفرند **نقطهٔ بحرانی** (۱) نامند.

نقاط بحرانی P_0 ، بسته به رفتار مسیرهای نـزدیك این نقاط، انـواع گوناگونی دارنـد. در این بحث فرض می کنیم که P_0 منفرد باشد، یعنی، P_0 تنها نقطهٔ بحرانی (۱) درقرص مدوری حول P_0 باشد. مفاهیم زیر برای منظور ما بنیادی هستند.

یك نقطهٔ بحرانی P_0 از (۱) را **جاذب** نامند هر گاه، بطور تقریب، P_0 مآلا تمام مسیرهای(۱) راکه دریك لحظه به‌قدرکافی به P_0 نزدیك‌اند جذب کند؛ به‌طوردقیق: هر گاه قرص D به شعاع $\eta > 0$ حول P_0 وجود داشته باشد به طوری که هرمسیری از (۱) کـه نقطه‌ای در D دارد (این نقطـه در شکل ۶۱ بـا P نشان داده شده است) وقتی $t \to \infty$، به‌سمت P_0 میل کند.

یك نقطهٔ بحرانی P_0 از (۱) را **پایدار**[۱] نامند هر گاه، به‌طورتقریب، تمام مسیرهای (۱) که در یك لحظه به قدرکافی نزدیك P_0 هستند درتمام زمانهای بعدی نیز نزدیك P_0

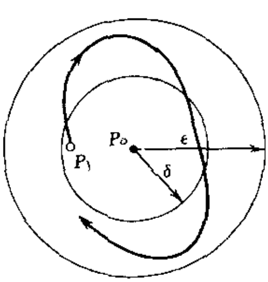
---

۱. به‌طور دقیقتر، پایدار به‌تعبیرلیاپانوف (Liapunov). تعاریف دیگری ازپایداری وجود دارند اما تعریف لیاپانوف، که ما فقط آن را درنظر می گیریم، شاید مفیدترین آنها باشد.

باقی بمانند؛ به طور دقیق: هر گاه به ازای هرقرص D_ε به شعاع $\varepsilon > 0$ حول P_0 قرصی مانند D_δ به‌شعاع $\delta > 0$ حول P_0 وجود داشته باشد به‌طوری که هرمسیری از(۱) که نقطه‌ای مانند P_1 (مثلا متناظر با $t = t_1$) در D_δ را درتمام نقاط متناظر با $t \geqslant t_1$ را در D_ε داشته باشد. شکل ۶۲ را ببینید.

نقطهٔ بحرانی P_0 از (۱) را **پایدار مجانبی** نامند هرگاه P_0 هم پایدار و هم جاذب باشد.

نقطهٔ بحرانی P_0 از (۱) راکه پایدار نباشد **ناپایدار** نامند.



شکل ۶۲. نقطهٔ بحرانی پایدار P_0 از (۱).
(مسیر شروع شده از P_1 درقرص به‌شعاع ε متوقف می‌گردد.)

واضح است که یك نقطهٔ بحرانی پایدار P_0 ضرورتی ندارد که پایدارمجانبی باشد زیرا P_0 ممکن است جاذب نباشد. در واقع پایداری ایجاب نمی‌کند که مسیرهای (۱) در همسایگی P_0 باید به P_0 میل کنند. از طرف دیگر یك نقطهٔ بحرانی جاذب P_0 لازم نیست که پایدار باشد. این مطلب کمتر واضح است حتی شاید تعجب‌آور باشد. اما این درست است زیرا مسیرها ممکن است به صورتی باشندکه ابتدا به طور دلخواهی به P_0 نزدیك شوند و سپس قبل ازآن‌که درحد به P_0 برسند ازآن دور شوند. (به‌طور رسمی، به‌ازای هر $\delta > 0$ و هر M در زمانی مانند t_1 مسیری بافاصلهٔ کمتر از δ از P_0 وجود داردکه به‌فاصله‌ای بزرگتر از M از P_0 در زمان $t_2 > t_1$ می‌رسد و وقتی $t \to \infty$ به‌سمت P_0 میل می‌کند.) به‌نظر می‌رسدکه مسیرهای سمت چپ P_0 درشکل ۶۱ وضعیت را روشن نمایند. مثالهایی از معادلات دیفرانسیل مربوطه پیچیده بوده و درعمل به ندرت با آنها مواجه می‌شویم (چنین مثالهایی در [B۱] و [B۹] مندرج در ضمیمهٔ ۱ آورده شده‌اند.)

تاکنون با پایداری یا ناپایداری نقاط بحرانی سروکار داشتیم. اکنون به رده‌بندی بیشتری می‌پردازیم. خواهیم دیدکه انواع گوناگونی ازنقاط بحرانی بسته به‌شکل مسیرها درهمسایگی چنین نقطه‌ای وجود دارند.

گرهٔ سره یك نقطهٔ بحرانی‌مانند P_0 است به قسمی که وقتی $t\to\infty$ یا $t\to-\infty$ هرمسیر در یك جهت معین به P_0 میل کند و برای هرامتداد مفروضی مسیری که در این امتداد به P_0 برسد وجود داشته باشد.

به‌عنوان مثال، دستگاه

$$\dot{x}=x \quad , \quad \dot{y}=y \tag{۳}$$

در $(0\,,0)$ دارای یك گرهٔ سرهٔ ناپایدار است زیرا یك جواب عمومی عبارت است از (شکل ۶۳)

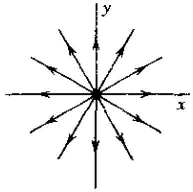
$$x=Ae^{t} \quad , \quad y=Be^{t},$$

به قسمی که مسیرها اشعه‌ای هستند که از $(0\,,0)$ به سمت بیرون امتداد دارند. توجه کنید که وقتی $A\neq 0$ ، $y=(B/A)x$ و وقتی $B\neq 0$ ، $x=(A/B)y$.

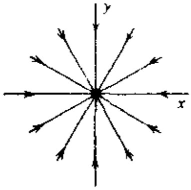
به‌همین ترتیب دستگاه

$$\dot{x}=-x \quad , \quad \dot{y}=-y \tag{۴}$$

دارای یك گرهٔ سرهٔ پایدار و جاذب درمبدأ است (شکل ۶۴).



شکل ۶۳. گرهٔ سرهٔ ناپایدار



شکل ۶۴. گرهٔ سرهٔ پایدار و جاذب

یك **گرهٔ ناسره** نقطه‌ای بحرانی مانند P_0 است به‌طوری‌که هرمسیری ، احتمالا به استثنای یك جفت مسیر، همان امتداد حدی در P_0 را داشته باشد.

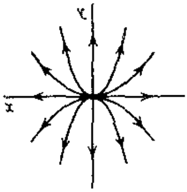
به‌عنوان مثال دستگاه

$$\dot{x}=x \quad , \quad \dot{y}=2y \tag{۵}$$

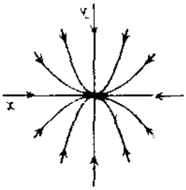
دارای یك گرهٔ ناسرهٔ ناپایدار درمبدأ است (شکل ۶۵). دستگاه

$$\dot{x}=-x \quad , \quad \dot{y}=2y \tag{۶}$$

دارای یك گرهٔ ناسرهٔ پایدار و جاذب درمبدأ است (شکل ۶۶).



شکل ۶۵. گره ناسرهٔ ناپایدار



شکل ۶۶. گره ناسرهٔ پایدار و جاذب

دستگاه زیر:

$$\dot{x}=x \quad , \quad \dot{y}=x+y \tag{۷}$$

دارای یك گرهٔ ناسرهٔ ناپایدار در $(0,0)$ است به طوری که وقتی $t \to -\infty$ تمام مسیرها دارای یك امتداد حدی باشند (شکل۶۷). در واقع، خواننده می‌تواند نشان دهد که یك جواب عمومی چنین است

$$x=Ae^{t} \quad , \quad y=(At+B)e^{t}.$$

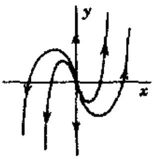
به ازای $A=0$ نتیجه عبارت از اشعهٔ قائم $(x=0)$ است و به ازای $A\neq 0$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{(At+B+A)\,e^{t}}{Ae^{t}} \to -\infty \qquad \text{وقتی } t\to-\infty$$

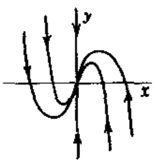
یعنی وقتی $t \to -\infty$ مسیرها درامتداد قائم به‌سمت مبدأ میل می‌نمایند. به‌طریقی مشابه، دستگاه

$$\dot{x}=-x \quad , \quad \dot{y}=x-y \tag{۸}$$

دارای یك گرهٔ ناسرهٔ پایدار جاذب در $(0 \ , \ 0)$ است به طوری که وقتی $t \to \infty$، تمام مسیرها دارای یك امتداد حدی، شوند (شکل ۶۸).



شکل ۶۷. گرهٔ ناسرهٔ ناپایدار



شکل ۶۸. گرهٔ ناسرهٔ پایدار و جاذب

یك نقطه زینی نقطه‌ای بحرانی مانند P_0 است به‌طوری که تعداد زیاد ولی محدودی

ازمسیرها وقتی $t \to \infty$ به سمت $p_\circ$ میل نمایند ووقتی $t \to \infty$ تعداد زیاد ولی‌محدودی از مسیرها به $P_\circ$ برسند یك نقطهٔ زینی ناپایدار است.

به‌عنوان مثال دستگاه

$$\dot{x} = x \quad , \quad \dot{y} = -y \tag{۹}$$

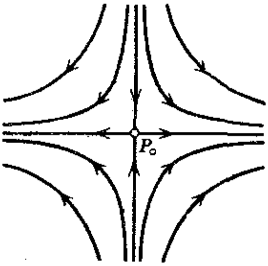
دارای یك نقطهٔ زینی درمبدأ است (شکل۶۹). وقتی $t \to \infty$ دومسیر به مبدأ میل‌می‌کنند و وقتی $t \to -\infty$ دو مسیر به‌آن میل می‌کنند. مسیرها شاخه‌هایی از هذلولی هستند.

مرکز نقطه‌ای‌بحرانی مانند $P_\circ$ است به‌قسمی‌که مسیرها تشکیل منحنیهای بسته‌ای را بدهندکه شامل $P_\circ$، واقع در ناحیه‌ای‌که به‌وسیلهٔ منحنی محصور شده است، باشد.

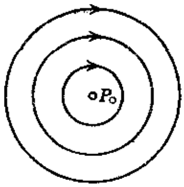
مثلا، دستگاه

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x \tag{۱۰}$$

مرکزی در مبدأ دارد (شکل ۷۰).



شکل ۶۹. نقطهٔ زینی



شکل ۷۰. مرکز

نقطهٔ حلزونی و یا نقطهٔ گردابی یك نقطهٔ بحرانی مانند $P_\circ$ است به قسمی که مسیرها تشکیل حلزونی حول $P_\circ$ داده و $P_\circ$ به‌صورت نقطهٔ مجانبی باشد.

مثلا، دستگاه

$$\dot{x} = -x + y \quad , \quad \dot{y} = -x - y \tag{۱۱}$$

یك نقطهٔ حلزونی پایدار در مبدأ دارد (شکل ۷۱). درواقع، خواننده می‌تواند تحقیق‌کند که جواب عمومی عبارت است از

$$x = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \quad , \quad y = e^{-t}(B\cos t - A\sin t).$$

با قراردادن $C^2 = A^2 + B^2$ ، $\cos\alpha = A/C$ و $\sin\alpha = B/C$ می‌توانیم معادلات بالا را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$x = Ce^{-t}\cos(t - \alpha) \quad , \quad y = -Ce^{-t}\sin(t - \alpha).$$

با به‌کار بردن مختصات قطبی تعریف شده با r و θ

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

با مقایسه داریم $r=Ce^{-t}$ و $\theta=\alpha-t$. از این‌رو $t=\alpha-\theta$ و

$$r(\theta)=C_{\circ}e^{\theta} \qquad (C_{\circ}=Ce^{-\theta})$$

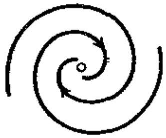
که یك حلزونی را نمایش می‌دهد.

دستگاههایی راکه به‌عنوان مثال ذکر کردیم به‌صورت

$$\dot{x}=ax+by \qquad \text{(الف)}$$
$$\dot{y}=cx+dy \qquad \text{(ب)} \qquad (۱۲)$$

هستند که در آنها $ad-bc\neq\circ$. جوابها باید به‌صورت توابع نمائی باشند (و شاید ضرب شده در t). برای مشاهدهٔ این مطلب می‌توان یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم از (۱۲) نسبت به x به‌دست‌آورد بدین‌ترتیب که از (۱۲ الف) مشتق می گیریم و $\dot{y}$ را از (۱۲ ب) و by را از (۱۲ الف) جایگزین می کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\ddot{x}-(a+b)\dot{x}+(ad-bc)x=\circ. \qquad (۱۳)$$



شکل ۷۱. نقطهٔ حلزونی پایدار و جاذب

حال می‌توان در مورد شکل جوابها برحسب ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ زیر :

$$\lambda^{۲}-(a+d)\lambda+ad-bc=\circ,$$

بحث نمود که x از (۱۳) و y از x و (۱۲) به‌دست می‌آید. چنین بحثی نشان خواهد داد که شکلهای نشان داده شده انواع ممکنهٔ نقاط بحرانی (۱۲) را توضیح می‌دهند. (خواننده‌ای که علاقه‌مند است مطلب را بیشتر دنبال کنند می‌تواند آن را به تفصیل در [B۴] ضمیمهٔ ۱ ببینند.)

بی‌مناسبت نیست که یك نوسان کنندهٔ میرای خطی را(وزنهٔ متصل به‌فنربخش۲.۶ را ببینید) با توجه به‌اصطلاحات‌جدید بررسی کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه عبارت‌است از $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\circ$ و یا

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

که در آن $m>0$ ، $c\geqslant 0$ و $k>0$. این‌معادله به‌صورت (۱۳) است و می‌توان آن را به‌شکل دستگاه زیر نوشت

$$\dot{x}=v\,,\qquad \dot{v}=-\frac{c}{m}v-\frac{k}{m}x.$$

اگر $c=0$ (بدون میرایی)، مسیرها دوایری در حول مبدأ هستند که نقطهٔ بحرانی مرکز است. اگر $c>0$ (با میرایی)، مسیرها حلزونیهای حول مبدأ هستندکـه نقطهٔ بحرانی حلزونی پایدار مجانبی است.

بحث ما دربارهٔ دستگاه خطی (۱۲) است اما متذکر می‌شویم کـه در حالت کلی دستگاه غیرخطی (۱) در نزدیکی نقطهٔ بحرانی همان‌رفتار را نشان می‌دهد. به‌طور دقیقتر موضوع را می‌توان به ترتیب زیر بیان نمود. فرض کنید $(0\,,\,0)$ نقطهٔ بحرانی P_0 از (۱) باشد، یعنی

$$F(0\,,\,0)=0\,,\quad G(0\,,\,0)=0.$$

فرض کنید که F و G پیوسته بوده ودرهمسایگی P_0 دارای مشتقات‌جزئی پیوسته باشند. با نوشتن جملات خطی مربوط به F و G به‌طور صریح بنابر (۱) داریم

$$\begin{aligned}\dot{x}&=ax+by+F_1(x\,,\,y)\\ \dot{y}&=cx+dy+G_1(x\,,\,y)\end{aligned}\qquad(۱۴)$$

می‌توان نشان داد که اگر $ad-bc\neq 0$ و P_0 منفرد باشد یعنی قرصی حول P_0 باشد که نقاط بحرانی‌بیشتری از (۱) در آن نباشد درآن‌صورت مسیرهای دستگاه‌خطی (۱۲)، بجز در چند حالت خیلی لازم نیستند، در نزدیکی P_0 تقریبهای مناسبی برای مسیرهای دستگاه غیر خطی (۱) هستند. با مثال زیر مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال ۱. آونگ

شکل ۴۰ بخش ۶.۲ آونگی به‌جرم m و به‌طول l را نشان می‌دهد. مقدار جابجایی از حالت تعادل چنین است $s=l\theta$. بنابراین شتاب $l\ddot{\theta}$ می‌شود. نیروی بـرگشت دهنده عبارت است ازمؤلفهٔ مماسی $mg\sin\theta$ از وزن mg. دراین‌جا از وزن میله و همچنین از میرایی صرفنظر می‌کنیم. بدین‌ترتیب بنابر قانون دوم نیوتن داریم

$$ml\ddot{\theta}+mg\sin\theta=0.$$

با تقسیم این رابطه بر ml و قرار دادن $x=\theta$ و $y=\dot{\theta}$ (بـرای رعایت نمادگذاری قبلی) به‌دست می‌آوریم

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\frac{g}{l}\sin x. \tag{۱۵}$$

این یك دستگاه غیر خطی است که نقطهٔ بحرانی آن در (۰ , ۰) است. جواب کامل یك تابع مقدماتی نیست. دستگاه را به‌صورت (۱۴) می‌نویسیم:

$$\dot{x}=y$$

$$\dot{y}=-\frac{g}{l}x+\frac{g}{l}(y-\sin x).$$

از این‌رو در (۱۴) $a=0$ ، $b=1$ ، $c=-g/l$ ، $d=0$ بوده و بنـابـراین $ad-bc\neq 0$. همچنین شرط مشتق‌پذیری بالا صادق است. پس نقطهٔ بحرانی (۱۵) به همان صورتی است که دستگاه خطی متناظر به‌آن می‌باشد:

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\frac{g}{l}x. \tag{۱۶}$$

یعنی آن نقطه یك مرکز است. این امر قابل فهم است زیرا بـه ازای مقادیر کوچك $|x|$ داریم $\sin x\approx x$ بنابراین درمورد ارتعاشات کوچك (۱۶) تقریب خوبی برای (۱۵) است. اینها تقریباً همساز هستند زیرا (۱۶) ایجاب می‌کند $\ddot{y}+\omega^2 y=0$ که در آن $\omega=\sqrt{g/l}$. یادآور می‌شویم که این امر در مورد ارتعاشات بزرگ صحیح نیست. د آن مورد، چنانچه می‌توان نشان داد، دورهٔ تناوب بستگی به‌جابه‌جایی اولیه دارد.

مسائل بخش ۳.۳

۱. نشان دهید که در (۳) به‌ازای هرمقدار انتخابی برای A و B یك شعاع پیدامی‌شود که به‌سمت بیرون مبدأ امیداد دارد (بنابراین این یك نقطهٔ بحرانی ناپایدار است).

۲. (۴) را حل کنید و تحقیق کنید که (۰ , ۰) یك گرهٔ سرهٔ پایدار است.

۳. (۵) را حل کنید. مسیرها چه منحنیهایی هستند؟ امتداد مسیرها در مبدأ کدامند؟

۴. (۶) را حل کنید. مسیرها چه منحنیهایی هستند؟

۵. فرض کنید t در (۶) معرف زمان باشد. $\tau=-t$ را به عنوان متغیر مستقل جدیدی بـه کار ببرید و دستگاه را حل نمایید و با جواب (۵) مقایسه کنید. این تبدیل در مکانیك چه مفهومی دارد؟

۶. جواب (۷) را استنتاج کنید.

۷. (۸) را حل کنید.

۸. (۹) را حل کنید و نشان دهید که مسیرهای منحنی شاخه‌هایی از هذلولی هستند.

۹. (۱۰) را حل کنید.

۱۰. (۱۳) را از (۱۲) به‌دست بیاورید.

۴

حل معادلات دیفرانسیل به‌کمك سری توانی. توابع متعامد

درفصل ۲ دیدیم که معادلات دیفرانسیل همگن بسا ضرایب ثابت را می‌توان با روشهای جبری حل نمود وجوابها توابعی مقدماتی هستند که باآنها درحساب دیفرانسیل وانتگرال آشنا شده‌ایم. لکن هرگاه ضرایب چنین معادلاتی ثابت نبوده و به x بستگی داشته باشند آنگاه وضع پیچیده‌ترمی‌شود و جوابها ممکن‌است توابعی‌غیرمقدماتی باشند. معادلهٔ بسل، معادلهٔ لژاندر و معادلهٔ فوق هندسی از این نوع می‌باشند. چون این معادلات و معادلات دیگرو جوابهای‌آنهانقش‌مهمی درریاضیات مهندسی‌ایفا می‌کنند، هم‌اکنون‌به‌بررسی‌روشی برای حل چنین معادلاتی می‌پردازیم. جوابهای حاصل ازاین روش به‌صورت سری‌توانی خواهند بود. بدینجهت این‌روش را روش سری توانی می‌نامند. همچنین بـرخی خواص اساسی جوابها را بررسی خواهیم‌کرد. این‌موضوع به‌دانشجو کمك می‌کند که با «توابع فوق‌متعالی» وبرخی‌رویه‌های متعارف که درارتباط باتوابع‌خاص به‌کارمی‌روند، خصوصاً برای بـرقراری خـواص توابع و روابط بینشان کـه برخی از آنها در محاسبات عددی اساسی‌اند، آشنا شود.

سه بخش آخر (بخشهای ۷.۴ تا ۹.۴) اختصاص دارد به تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر، توابع بسل ودیگرمجموعه جوابهای مسائل بامقدار مرزی که به مسائل‌اشتورم ــ لیوویل معروف‌اند.

پیشنیاز این فصل: فصل ۲.

بخشهایی را که برای دورهٔ فشرده‌تر می‌توان حذف‌کرد: ۲.۴، ۶.۴، ۹.۴.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت B.
جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۴ روش سری توانی

حال به‌بررسی حل معادلات دیفرانسیل با روشی موسوم به روش سری توانی که جوابهای آن به‌صورت سری‌توانی‌است می‌پردازیم. روش‌مزبوررویهٔ متعارف کارآمدی در ارتباط بامعادلات دیفرانسیل خطی باضرایب متغیراست.

نخست یادآور می‌شویم که **سری‌توانی**[1] (برحسب توانهای $x-a$) عبارت است ازیك سری نامتناهی به‌صورت

$$(۱)\quad \sum_{m=0}^{\infty} c^m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots ,$$

که درآن ثابتهای c_0، c_1، ... را **ضرایب** سری وثابت a را **مرکز** نامند و x یك متغیر است.

خصوصاً اگر $a=0$، یك سری توانی برحسب توانهای x به‌دست می‌آید:

$$(۲)\quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots .$$

دراین بخش تمام متغیرها و ثابتها حقیقی فرض می‌شوند.
مثالهای مشهور سریهای توانی سریهای مك‌لورن هستند:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x|<1 \text{، سری هندسی})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots ,$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots .$$

---

۱. اصطلاح «سری‌توانی» به‌تنهایی‌معمولا به‌سری‌ای به‌صورت(۱) اطلاق می‌شود وشامل سریهایی با توانهای منفی به صورت $c_0 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \ldots$ یا سری‌ای شامل توانهای کسری x نیست. توجه کنید که در (۱) می‌نویسیم $(x-a)^0 = 1$، حتی درصورتی که $x=a$.

ایدهٔ اساسی روش سری توانی برای حل معادلات دیفرانسیل بسیارساده وطبیعی است. ما می‌خواهیم روش عملی دراین مورد را شرح دهیم و با ارائهٔ مثالهای ساده آن را روشن کنیم، توجیه ریاضی این روش را به بخش بعد موکول می کنیم.

درموردیك معادلهٔ دیفرانسیل معروض، نخست همهٔ توابع موجود درمعادله رابه‌صورت سریهای توانی برحسب توانهای x (یابرحسب توانهای $x-a$ ، هر گاه جوابها به‌صورت سری توانی برحسب توانهای $x-a$ خواسته‌شوند) نمایش می‌دهیم. دربسیاری ازموارد عملی توابع مزبور چندجمله‌ای هستند و درچنین حالتی لازم نیست درمرحلهٔ نخست کاری انجام‌دهیم . پس ازآن جوابی به‌صورت سری توانی ، مثلا

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \tag{۳}$$

فرض می کنیم، و این سری و سریهایی که از مشتقگیری جمله به جملهٔ آن به دست می‌آیند یعنی

(الف) $$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots=\sum_{m=1}^{\infty}mc_mx^{m-1}$$

(۴)

(ب) $$y''=2c_2+3\times2c_3x+4\times3c_4x^2+\dots=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}$$

و غیره را در معادلـه جایگزین می‌نماییم. آنگاه جملات همتوان x را گردآوری می کنیم ومجموع ضرایب هریك ازتوانهای موجود x، یعنی، جملات ثابت، جملات شامل x ، جملات شامل x^2 وغیره، رابه‌ترتیب مساوی صفرقرارمی‌دهیم. ازاین عملیات روابطی به‌دست می‌آید که باتوجه به‌آنها می‌توانیم ضرایب مجهول در (۳) را متوالیاً معین کنیم.

حال روش مزبور را با ارائهٔ چند معادلهٔ ساده، که آنها رامی‌توان به‌روشهای مقدماتی نیزحل نمود، روشن می‌سازیم.

مثال ۱

معادلهٔ زیرا حل کنید

$$y'-y=0.$$

درمرحلهٔ اول سریهای (۳) و (۴ الف) را درمعادله جایگزین می کنیم:

$$(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots)-(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)=0$$

آنگاه با گردآوری جملات همتوان x به‌دست می‌آوریم:

$$(c_1-c_0)+(2c_2-c_1)x+(3c_3-c_2)x^2+\dots=0.$$

بامساوی صفرقراردادن ضریب هریك ازتوانهای x داریم

$$c_1-c_0=0,\qquad 2c_2-c_1=0,\qquad 3c_3-c_2=0;\dots.$$

با حل این معادلات می‌توان c_1 ، c_2 ، ... رابرحسب c_0، که دلخواه است، بیان نمود:

$$c_1=c_0,\qquad c_2=\frac{c_1}{2}=\frac{c_0}{2!},\qquad c_3=\frac{c_2}{3}=\frac{c_0}{3!},\dots.$$

باقراردادن این مقادیردرسری (۳) نتیجه می‌شود:

$$y=c_0+c_0x+\frac{c_0}{2!}x^2+\frac{c_0}{3!}x^3+\dots,$$

وبدین طریق ملاحظه می کنیم که جواب عمومی آشنای زیررا به دست آورده‌ایم

$$y=c_0\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)=c_0e^x.$$

البته ، هر گاه معادلهٔ داده شده را به صورت $y=y'$ بنویسیم و مانند قبل سریهای (۳) و (۴ الف) را درآن قرار دهیم بدست می‌آوریم

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots$$
$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$

دراین صورت لازم است که داشته باشیم

$$c_1=c_0,\qquad 2c_2=c_1,\qquad 3c_3=c_2,\dots.$$

وغیره که همان است که قبلا به‌دست آوردیم.

مثال ۲

معادلهٔ زیررا حل کنید

$$y''+y=0.$$

باجایگزینی سریهای (۳) و (۴ ب) درمعادله به‌دست می‌آوریم:

$$(2c_2+3\times 2c_3x+4\times 3c_4x^2+\dots)+(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)=0.$$

با گردآوری همتوانهای x درمی‌یابیم که

$$(2c_2+c_0)+(3\times 2c_3+c_1)x+(4\times 3c_4+c_2)x^2+\dots=0.$$

با برابرصفرقراردادن ضریب هرتوان x داریم

ضریب x^0 $\qquad 2c_2+c_0=0$

ضریب x^1 $\qquad 3\times 2c_3+c_1=0$

ضریب x^2 $\qquad 4\times 3c_4+c_2=0$

وغیره. با حل این معادلات مشاهده می‌کنیم که c_2، c_4، ... را برحسب c_0، و c_3، c_5، ... را می‌توان برحسب c_1 بیان نمود

$$c_2=-\frac{c_0}{2!},\qquad c_3=-\frac{c_1}{3!},\qquad c_4=-\frac{c_2}{4\times 3}=\frac{c_0}{4!},\dots;$$

c_0 , c_1 دلخواه هستند. بااین مقادیرسری (۳) چنین می‌شود

$$y=c_0+c_1x-\frac{c_0}{2!}x^2-\frac{c_1}{3!}x^3+\frac{c_0}{4!}x^4+\frac{c_1}{5!}x^5+\dots$$

این سری را می‌توان به‌صورت زیرنوشت :

$$y=c_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\dots\right)+c_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\dots\right)$$

ودرنتیجه جواب عمومی آشنای زیرنمایان می‌شود

$$y=c_0\cos x+c_1\sin x.$$

مثال ۳

معادلهٔ زیررا حل کنید

$$(x+1)\,y'-(x+2)\,y=0.$$

با قرار دادن سریهای (۳) و (۴ الف) درمعادله، به‌دست می‌آوریم

$$(x+1)(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots)-(x+2)(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots)=0.$$

از ضرب کردن جملات معادله درهم نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}
&c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+4c_4x^4+\dots+\qquad sc_sx^s+\dots\\
&+c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\dots+(s+1)\,c_{s+1}x^s+\dots\\
&-c_0x-c_1x^2-c_2x^3-c_3x^4-\dots-c_{s-1}\qquad x^s-\dots\\
&-2c_0-2c_1x-2c_2x^2-2c_3x^3-2c_4x^4-\dots\qquad -2c_sx^s-\dots=0.
\end{aligned}$$

چون این تساوی باید نسبت به x یك اتحاد باشد بنابراین لازم است که مجموع ضرایب هرتوان x صفر باشد؛ بنابراین داریم

$$(\text{الف})\quad c_1 - 2c_0 = 0 \qquad (\text{ب})\quad 2c_2 - c_1 - c_0 = 0 \text{، و همین‌طور} \qquad (5)$$

ودرحالت کلی

$$sc_s + (s+1)c_{s+1} - c_{s-1} - 2c_s = 0\,. \qquad (6)$$

با حل (۵ الف) نسبت به c_1 وحل (۶) نسبت به c_{s+1} داریم

$$(\text{الف})\quad c_1 = 2c_0$$

$$(\text{ب})\quad c_{s+1} = \frac{1}{s+1}[c_{s-1} + (2-s)c_s] \qquad s = 1, 2, \cdots \qquad (7)$$

فرمول (۷ ب) را یك **رابطهٔ بازگشتی** یا یك **فرمول بازگشتی** می‌نامند. حال با توجه به‌این‌روابط می‌توان c_2 ، c_3 ، ... رامتوالیاً معین کرد. اگر مایل‌باشیم می‌توانیم‌محاسبات مربوط به (۷ ب) را به‌صورت جدولی به‌شرح زیر تنظیم کنیم:

s	c_{s-1}	$(2-s)c_s$	مجموع	$s+1$	$c_{s+1} = \frac{\text{مجموع}}{s+1}$	c_{s+1} برحسب c_0
						$c_1 = 2c_0$
۱	c_0	c_1	$c_0 + c_1$	۲	$\frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{2}$	$c_2 = \frac{3}{2}c_0$
۲	c_1	0	c_1	۳	$\frac{c_1}{3}$	$c_3 = \frac{2}{3}c_0$
۳	c_2	$-c_3$	$c_2 - c_3$	۴	$\frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{4}$	$c_4 = \frac{5}{24}c_0$
.	..	..	...	..	...	...

با توجه به‌این مقادیر، سری (۳) چنین می‌شود:

$$y=c_0\left(1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\dots\right)$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند جملاتی که به‌طور صریح در سری فوق نوشته شده چند جملهٔ اول بسط مك‌لورن سری

$$y=c_0(1+x)e^x,$$

است واین‌همان جواب عمومی معادلهٔ داده شده است که با تفکیك متغیرهاحاصل می‌شود.

مسائل بخش ۱۰۳

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش سری توانی حل کنید.

۱. $y'=3y$ ۲. $y'+2y=0$ ۳. $y'=ky$

۴. $y'=2xy$ ۵. $(1-x)y'=y$ ۶. $y'=xy$

۷. $(1-x)y'=y$ ۸. $(1-x^2)y'=y$ ۹. $y''=y$

۱۰. $y''+9y=0$ ۱۱. $y''=4y$ ۱۲. $y''=y'$

(مسائل بیشتری از این نوع درانتهای بخش بعد آمده است.)

۲۰۴ مبنای نظری روش سری توانی

دیدیم که روش سری توانی، جوابهای معادلات دیفرانسیل را بــه صورت سری توانی به‌دست می‌دهد. فرض می‌کنیم y، جواب یك معادلهٔ مفروض، به‌صورت یك سری‌توانی با ضرایب مجهول باشد، و با قرار دادن این سری و سریهای مربوط به مشتقات y در معادلهٔ مزبور ضرایب مجهول را متوالیاً معین می‌کنیم.

فایدهٔ عملی این روش وقتی آشکار می‌شود که به‌خاطر داشته باشیم سری توانی را برای محاسبهٔ مقادیر عددی جوابها می‌توان به کار برد. به علاوه، چنانچه در بحث آینده خواهیم دید بسیاری از خواص کلی‌جوابها را می‌توان از سری توانی آنهابه‌دست‌آورد.

روش سری‌توانی شامل اعمال گوناگونی روی سریها، از قبیل مشتقگیری‌ازسریها، جمع، و ضرب سریها است. بنابراین برای توجیه این روش لازم است که به بررسی مبانی نظری‌این اعمال بپردازیم. بخش حاضر اختصاص به‌این بررسی دارد. بحث‌مربوطه متضمن مفاهیم و مطالبی است کــه دانشجو ممکن است بــا برخی از آنها قبلا در حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی آشنا شده باشد و همین‌طور مطالب دیگری که در دوره‌های مقدماتی مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. [اثباتهای مربوطه وجزئیات بیشتر را (که دراین

فصل نیامده است) دربخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ می‌توان یافت.]

سری توانی سریی نامتناهی به‌صورت

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots, \qquad (1)$$

است و مانند بخش قبل فرض می‌کنیم کـه متغیر x، مـرکز a و ضرایب c_0، c_1، ... حقیقی‌اند.

عبارت

$$s_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \qquad (2)$$

(n عدد صحیح و مثبت) **مجموع جزئی** n ام سری (۱) نـامیده می‌شود. واضح‌است که اگرجملات s_n را از (۱) حذف کنیم، عبارت باقیمانده چنین است:

$$R_n(x) = c_{n+1}(x)(x-a)^{n+1} + c_{n+2}(x-a)^{n+2} + \cdots \qquad (3)$$

این عبارت را **باقیماندهٔ** (۱) بعداز جملهٔ $c_n(x-a)^n$ می‌نامند.

مثلاً، درمورد سری هندسی

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

داریم

$$s_1 = 1 + x, \qquad R_1 = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots,$$

$$s_2 = 1 + x + x^2, \qquad R_2 = x^3 + x^4 + x^5 + \cdots,$$

والی آخر.

بدین طریق دنبالهٔ مجموعهای جزئی $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، ... را به (۱) مربوط کرده‌ایم. ممکن است به‌ازای مقداری از x مانند x_0 این دنباله همگرا باشد، مثلا

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0).$$

در این صورت می‌گویند سری (۱) در $x = x_0$ **همگراست**؛ عدد $s(x_0)$ را **مقدار** یا مجموع (۱) در x_0 می‌نامند ومی‌نویسند

$$s(x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x_0-a)^m.$$

هر گاه دنبالهٔ مزبوردر $x = x_0$ واگرا باشدآنگاه گویند سری(۱) در $x = x_0$ **واگراست**.

یـادآوری می‌کنیم کـه می‌گویند دنبالهٔ s_1، s_2، ... بـه عدد s می‌گراید یا

همگراست باحد s، هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت مفروض ϵ (هرقدر کوچك باشد مهم‌نیست فقط‌کافی است‌که صفر نباشد) عددی مانند N بتوان یافت به‌طوری‌که

$$\text{به‌ازای هر}\quad n>N \qquad |s_n-s|<\epsilon \quad (۴)$$

مفهوم هندسی (۴) این است‌که s_n به ازای $n>N$ بین‌عدد $s-\epsilon$ و $s+\epsilon$ قرار دارد (شکل ۷۲). البته درحالت‌کلی N بستگی به‌انتخاب ϵ دارد.

در مورد آنچه که مربوط به بحث ماست، $s=s_n+R_n$ یا $R_n=s-s_n$. پس در (۴)

$$|s_n-s|=|R_n|$$

وهمگرایی در $x=x_\circ$ به‌این مفهوم است‌که با انتخاب n به قدرکافی بزرگ می‌توانیم هرقدر بخواهیم $|R_n(x_\circ)|$ راکوچك‌کنیم. به عبارت دیگر وقتی دنباله همگرا باشد، $s_n(x_\circ)$ تقریبی برای $s(x_\circ)$ است و با انتخاب n به‌قدر کافی بزرگ، $|R_n(x_\circ)|$، یعنی خطای تقریب را می‌توان از هرعدد مثبت از پیش تعیین شدهٔ ϵ کوچکتر ساخت.

هرگاه در(۱)، $x=x_\circ=a$ انتخاب شود، سری به‌تك جملهٔ $c_\circ$ تبدیل می‌شود زیرا سایرجملات صفرمی‌شوند. این امر نشان می‌دهدکه سری (۱) در $x=a$ همگراست. در بعضی‌حالات ممکن است این تنها مقدار x باشدکه به‌ازای‌آن (۱) همگراست. هرگاه مقادیر دیگری از x باشندکه به‌ازای آنها این سری همگرا باشد، این مقادیر تشکیل یك فاصله، **فاصلهٔ همگرایی**، می‌دهند که نقطهٔ $x=a$ وسط آن است. این فاصله می‌تواند یك فاصلهٔ متناهی باشد (شکل ۷۳) . در این صورت سری بـه ازای همهٔ x های واقع در داخل فاصله، یعنی به‌ازای همهٔ x هایی‌که درشرط

$$|x-a|<R \quad (۵)$$

صدق می‌کنند همگرا وبه‌ازای تمام x هایی‌که در $|x-a|>R$ صدق می‌کنند واگرا است. این فاصله همچنین می‌تواند نامتناهی باشد یعنی سری ممکن است به ازای جمیع مقادیر x همگرا باشد.

کمیت R را درشکل ۷۳ **شعاع همگرایی** (۱) می‌نامند؛ این عدد عبارت است از فاصلهٔهر نقطهٔ انتهایی فاصلهٔ همگرایی از مرکز a. هرگاه سری به ازای هر x همگرا باشد آنگاه $R=\infty$ و ($1/R=0$).

با استفاده از ضرایب سری، شعاع همگرایی را می‌توان با هریك از فرمولهای‌زیر معین کرد

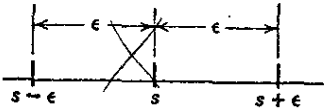
$$(\text{الف})\quad \frac{1}{R}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|c_m|} \qquad (\text{ب})\quad \frac{1}{R}=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| \quad (۶)$$

مشروط برآنکه این حدها موجود باشند. (اثبات این مطلب دربخش ۱۰۱۶ آمده است.)

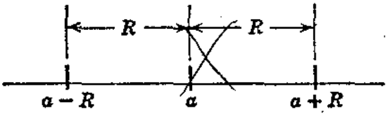
به‌ازای x هایی‌که (۱) را همگرا می‌کنند، سری دارای مقدار معینی مانند $s(x)$ است‌که به x بستگی دارد؛ هر‌گاه R ، شعاع همگرایی (۱)، صفر نباشد می‌نویسیم

$$s(x)=\sum_{m=۰}^{\infty}c_m(x-a)^m \qquad (|x-a|<R)$$

و گوییم سری (۱) تابع $s(x)$ را درفاصلهٔ همگرایی نمایش می‌دهد.



شکل ۷۲. همگرایی دنباله



شکل ۷۳. فاصلهٔ همگرایی (۵) مربوط به سری توانی با مرکز a

حال به‌بررسی سه‌مثال نوعی‌می‌پردازیم؛ این مثالها سه‌حالت ممکن، یعنی‌حالتهایی راکه درآنها شعاع‌همگرایی R ، مثبت ومتناهی، نامتناهی، ویا صفراست تشریح می‌کنند.

مثال ۱. سری هندسی

درمورد سری هندسی داریم

$$\frac{۱}{x-۱}=\sum_{m=۰}^{\infty}x^m=۱+x+x^۲+\cdots \qquad (|x|<۱)\cdot$$

درواقع، به‌ازای هر m ، $c_m=۱$ ، واز (۶) به‌دست می‌آوریم $R=۱$ ، یعنی این سری هندسی در صورتی‌که $|x|<۱$ همگراست و نمایش‌دهندهٔ $۱/(x-۱)$ است.

مثال ۲

درمورد سری

$$e^x=\sum_{m=۰}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots$$

داریم $c_m=۱/m!$. از این‌رو بنابر (۶ ب)،

$$\frac{c_{m+1}}{c_m}=\frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}}=\frac{1}{m+1}\to 0 \qquad \text{هرگاه } m\to\infty$$

یعنی $R=\infty$ ؛ سری به‌ازای هر x ی همگراست.

مثال ۳

درمورد سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!\,x^m = 1+x+2x^2+6x^3+\cdots$$

داریم $c_m=m!$ وبنابر (۶ ب)،

$$\frac{c_{m+1}}{c_m}=\frac{(m+1)!}{m!}=m+1\to\infty \qquad \text{هرگاه } m\to\infty$$

بنابراین $R=0$ وسری فقط درمرکز $x=0$ همگراست. چنین سریهایی بی‌فایده‌اند.

اعمال روی سریهای توانی

حال به‌بررسی اعمال‌روی سریهای توانی، که درارتباط با روش‌سری توانی به‌کارمی‌روند، می‌پردازیم. سه عمل زیر با توجه درهر حالت تشریح شده اعمال مجازی هستند. همچنین شرطی برای صفر شدن تمام ضرایب می‌آوریم؛ این شرط از ابزارهای اساسی‌روش‌سری توانی است.

مشتقگیری جمله به جمله

از یك سری توانی می‌توان جمله به‌جمله مشتق‌گرفت. به‌بیان دقیقتر: هرگاه

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\,(x-a)^m$$

بـه ازای $|x-a|<R$، که درآن $R>0$، همگرا باشد، آنگاه سری حاصل از مشتقگیری جمله به جملهٔ این سری نیز به ازای همان x ها همگراست و مشتق y، یعنی y'، را نمایش می‌دهد بنابراین

$$y'(x)=\sum_{m=1}^{\infty} m\,c_m\,(x-a)^{m-1}.$$

(اثبات دربخش ۲.۱۶ قضایای ۳ و ۵.)

جمع جمله به جمله

دو سری توانی را می‌توان جمله به‌جمله جمع‌کرد. به‌بیان دقیقتر: هرگاه سریهای

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m \quad و \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-a)^m \qquad (۷)$$

دارای شعاعهای همگرایی مثبت باشند و مجموع آنها $f(x)$ و $g(x)$ باشدآنگاه سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} (b_m + c_m)(x-a)^m$$

به‌ازای هر x که متعلق به داخل فاصلهٔ همگرایی هردو سری مزبور باشد همگراست و $f(x)+g(x)$ را نمایش می‌دهد (اثبات در بخش ۱۰۱۶).

ضرب جمله به جمله

دوسری توانی را می‌توان جمله به‌جمله در هم ضرب‌کرد. به‌بیان دقیقتر: فرض می کنیم که سریهای (۷) دارای شعاعهای‌همگرایی مثبت باشند و $f(x)$ و $g(x)$ مجموع آنها باشد. آنگاه سری حاصل از ضرب هر جملهٔ سری اول در هر جمله از سری دوم وفاکتور گیری از توانهای یکسان $(x-a)$، یعنی

$$b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)(x-a) + \cdots =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \cdots + b_nc_0)(x-a)^n$$

به‌ازای هر x متعلق به‌داخل فاصلهٔ همگرایی هردوسری مزبور همگراست و $f(x)\,g(x)$ را نمایش می‌دهد. (اثبات در بخش ۱۰۱۶ قضیهٔ ۳.)

صفرشدن تمام ضرایب

هرگاه یك سری توانی دارای شعاع همگرایی مثبت باشد و مجموع آن در سرتاسر فاصلهٔ همگراییش متحد با صفر باشدآنگاه همهٔ ضرایب سری برابر صفرند. (اثبات دربخش ۲۰۱۶ قضیهٔ ۲.)

این‌خواص سریهای‌توانی مبنای نظری روش سری‌توانی‌را تشکیل می‌دهند. سؤالی که باقی می‌ماند این است که آیا یك معادلهٔ دیفرانسیل مفروض اصلا دارای جوابهایی

هست که قابل نمایش به صورت سری توانی باشند. با استفاده از مفهوم زیر می‌توانیم به این سؤال پاسخ دهیم.

تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=a$ **تحلیلی** گوییم هرگاه بتوان آن را به‌صورت یك سری توانی برحسب توانهای $x-a$ و شعاع همگرایی $R>0$ نمایش داد.

با استفاده از این مفهوم می‌توان معیاری اساسی را ازآنچه مورد نظر است به‌شرح زیر فرموله کرد.

قضیهٔ ۱ (وجود جوابهایی که به‌صورت سری توانی هستند)

هرگاه توابع f ، g و r در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x) \tag{۸}$$

در $x=a$ تحلیلی باشندآنگاه هرجواب $y(x)$ از (۸) در $x=a$ تحلیلی است وبنابراین آن را می‌توان به‌صورت یك سری‌توانی برحسب توانهای $x-a$ وشعاع‌همگرایی $R>0$ نمایش داد.[۱]

اثبات این قضیه نیاز به‌روشهای پیشرفتهٔ آنالیز مختلط دارد و علاقه‌مندان می‌توانند به‌مرجع [ب۱۱] ضمیمهٔ ۱ مراجعه کنند. هنگام‌به‌کاربردن‌این‌قضیه، مهم، این‌است که معادلهٔ خطی را به‌صورت (۸) بنویسیم طوری که ضریب y'' برابر ۱ باشد.

مسائل بخش ۲۰۴

شعاع همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

۱. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{3^m}$ ۲. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{m!}$ ۳. $\sum_{m=0}^{\infty}x^{2m}$

۴. $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{3m}$ ۵. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$ ۶. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

۷. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}$ ۸. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}$ ۹. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)m!}$

---

۱. R لااقل برابرفاصلهٔ $x=a$ ازنزدیکترین نقطه‌ای (نقاطی) به $x=a$ است که درآن نقطه (نقاط) یکی از توابع f ، g ، r بــه مثابهٔ توابعی از متغیر مختلط ، درآن نقطهٔ تحلیلی نباشند. (توجه‌کنیدکــه آن نقطه ممکن است روی محور x هــا نباشد بلکه نقطه‌ای در صفحه مختلط باشد.)

۱۰. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(4m)!}{(m!)^4}x^m$

۱۱. $\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m(m-1)}{3^m}x^m$

۱۲. $\sum_{=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{k^m}x^{2m}$

۱۳. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^m(x-1)^m$

۱۴. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}(x-3)^{2m}$

۱۵. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{3^m}(x-2)^m$

۱۶. **(انتقال شاخص جمعبندی)** گاهی اوقات درروش سری توانی انتقالهای سادهٔ شاخصهای جمعبندی مفید واقع می‌شوند. برای تأیید این موضوع نشان دهید که

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_m x^{m-2}=\sum_{p=1}^{\infty}(p+1)pc_{p+1}x^{p-1}$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)c_{s+2}x^s$$

چه رابطه‌ای بین m ، p و s برقرار است؟

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش سری توانی حل کنید.

۱۷. $xy'-(x+2)y=-2x^2-2x$

۱۸. $xy'=(x+1)y$

۱۹. $x(x+1)y'-(2x+1)y=0$

۲۰. $xy'-3y=3$

۲۱. $y''-3y'+2y=0$

۲۲. $y''-y=x$

۲۳. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

۲۴. $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$

۲۵. $y''-xy'+y=0$

۲۶. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$

۲۷. نشان دهید که معادلهٔ $y'=(y/x)+1$ را نمی‌توان نسبت به y به‌صورت سری توانی‌ای برحسب x حل کرد. این معادله را نسبت به y به صورت سری‌توانی‌ای برحسب $x-1$ حل کنید.

(راهنمایی. $t=x-1$ را بـه عنوان یك متغیر مستقل جدید انتخاب کنید و معادلهٔ حاصل را نسبت به y به‌صورت سری توانی‌ای برحسب t حل کنید.) نتیجه را با جواب حاصل از روش مقدماتی متناسبی با این مسئله مقایسه کنید.

درهریك ازمعادلات زیر y را به‌صورت سری توانی‌ای برحسب $x-1$ به‌دست‌آورید:

۲۸. $y'=2y$ **۲۹.** $y''-y=0$ **۳۰.** $xy'+y=0$

۳.۴ معادلهٔ لژاندر. چندجمله‌ایهای لژاندر

معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر[1]

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

دربسیاری مسائل فیزیکی، به‌ویژه در مسائل با مقدار مرزی مربوط به‌کره مطرح می‌شود. پارامتر n در(۱) عدد حقیقی مفروضی‌است. هرجواب (۱) را یك **تابع لژاندر** می‌نامند.

با تقسیم (۱) بر x^2-1، صورت استاندارد (۸)، بخش ۲.۴، به دست می‌آید و چنانچه می‌بینیم ضرایب معادلهٔ حاصل در $x=0$ تحلیلی هستند؛ بنابراین می‌توانیم روش سری توانی را به‌کار بندیم. با قرار دادن

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m \tag{2}$$

ومشتقات آن در (۱) ونشان دادن ثابت $n(n+1)$ با k به‌دست می‌آوریم

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty}mc_m x^{m-1}+k\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m=0.$$

با نوشتن عبارت اول به‌صورت دو سری مجزا داریم

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_m x^m \\ -2\sum_{m=1}^{\infty}mc_m x^m+k\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m=0, \tag{1*}$$

این تساوی را چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&2\times1c_2+3\times2c_3x+4\times3c_4x^2+\cdots+(s+2)(s+1)c_{s+2}x^s+\cdots\\
&\qquad\qquad -2\times1c_2x^2-\cdots \qquad -s(s-1)c_sx^s-\cdots\\
&\quad -2\times1c_1x-2\times2c_2x^2-\cdots \qquad -2sc_sx^s-\cdots\\
&+kc_0 \quad +kc_1x \quad +kc_2x^2+\cdots \qquad +kc_sx^s+\cdots=0.
\end{aligned}$$

---

۱. آدرین ماری لژاندر (Adrien Marie Legendre) ، ۱۷۵۲-۱۸۳۳، ریاضیدان فرانسوی‌که سهم به‌سزایی‌درپیشبرد نظریهٔ اعداد وتوابع بیضوی داشته است.

هرگـاه (۲) جواب (۱) باشد آنگاه تساوی فوق باید یك اتحاد نسبت به x باشد و از اینجا لازم می‌آید که مجموع ضرایب هرتوانی از x برابر صفر باشد؛ بدین ترتیب بـا یادآوری اینکه $k=n(n+1)$ ، داریم

$$\text{(۳ الف)} \quad \begin{aligned} &\text{ضریب } x^0 && 2c_2+n(n+1)c_0=0, \\ &\text{ضریب } x^1 && 6c_3+[-2+n(n+1)]c_1=0, \end{aligned}$$

ودرحالت کلی به‌ازای $s=2, 3, \ldots$ داریم

$$\text{(۳ ب)} \qquad (s+2)(s+1)c_{s+2}+[-s(s-1)-2s+n(n+1)]c_s=0.$$

عبارت داخل کروشه $[\ldots]$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(n-s)(n+s+1).$$

بنابراین از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\text{(۴)} \qquad c_{s+2}=-\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}c_s \qquad (s=0, 1, \ldots).$$

این فرمول را **رابطهٔ بازگشتی** یا **فرمول بازگشتی** می‌نامند. این رابطه هریك ازضرایب سری (۲) را برحسب دومین ضریب قبل‌از آن به‌دست می‌دهد، جز ضرایب c_0 و c_1 که ثابتهای دلخواهی هستند. متوالیاً به‌ترتیب پیدا می‌کنیم

$$c_2=-\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$

$$c_4=-\frac{(n-2)(n+3)}{4\times 3}c_2 =\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$

$$c_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$

$$c_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{5\times 4}c_3 =\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

وغیره. با جایگزین کردن این مقادیر به‌جای ضرایب (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\text{(۵)} \qquad y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x)$$

که در آن

$$\text{(۶)} \qquad y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-+\cdots$$

و

$$(۷)\qquad y_۲(x)= x-\frac{(n-۱)(n+۲)}{۳!}x^۳+\frac{(n-۳)(n-۱)(n+۲)(n+۴)}{۵!}x^۵-+\cdots$$

این سریها به‌ازای $|x|<۱$ همگرا هستند. $y_۱$ و $y_۲$ جوابهای مستقل خطی هستندچرا که (۶) فقط شامل توانهای زوج x است در حالی که (۷) فقط شامل توانهای فرد x است‌وبنابراین‌نسبت $y_۱/y_۲$ یك‌عددثابت نیست. ازاین‌رو(۵) درفاصلهٔ $-۱<x<۱$ جواب عمومی معادلهٔ (۱) است.

چند جمله‌ایهای لژاندر

در بسیاری‌کاربردها در معادلهٔ لژاندر پارامتر n یك عدد صحیح غیر منفی است. در این صورت هنگامی‌که $s=n$، یعنی s یك عدد صحیح غیرمنفی‌باشد، طرف راست (۴) برابر صفراست وبنابراین $c_{n+۲}=۰$ ، $c_{n+۴}=۰$ ، $c_{n+۶}=۰$ ، ... از این‌رو هر گاه n زوج باشد، $y_۱(x)$ به‌یك چندجمله‌ای درجهٔ n تبدیل می‌شود. هر گاه n فرد باشد، همین‌مطلب درمورد $y_۲(x)$ صادق است. این چندجمله‌ایها، که در اعدادی ثابت ضرب شده‌اند، **چندجمله‌ای‌های لژاندر** نام دارند. چون در عمل این چندجمله‌ایها ازاهمیت بسیاری برخوردارند، با تفصیل بیشتری به‌بررسی آنها می‌پردازیم. بدین‌منظور (۴) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۸)\qquad c_s=-\frac{(s+۲)(s+۱)}{(n-s)(n+s+۱)}c_{s+۲}\qquad (s\leqslant n-۲)$$

حال می‌توان تمام ضرایب غیر صفر را برحسب c_n، ضریب بزرگترین توان x در چندجمله‌ای، نوشت. آن‌وقت ضریب c_n دلخواه خواهد بود. وقتی $n=۰$، مرسوم است که $c_n=۱$ انتخاب شود و

$$(۹)\qquad c_n=\frac{(۲n!)}{۲^n(n!)^۲}=\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots(۲n-۱)}{n!},\quad n=۱,۲,\cdots,$$

دلیل انتخاب چنین c_nای آن است که با این انتخاب تمام چندجمله‌ایها به‌ازای $x=۱$ دارای مقدار ۱ خواهند شد؛ این‌موضوع از فرمول (۱۴) مسئلهٔ ۸ نتیجه می‌شود. آنگاه از (۸) و (۹) به‌دست می‌آوریم

$$(۹^*)\qquad \begin{aligned} c_{n-۲}&=-\frac{n(n-۱)}{۲(۲n-۱)}c_n=-\frac{n(n-۱)(۲n)!}{۲(۲n-۱)۲^n(n!)^۲}\\ &=-\frac{n(n-۱)۲n(۲n-۱)(۲n-۲)!}{۲(۲n-۱)۲^n n(n-۱)!\,n(n-۱)(n-۲)!},\end{aligned}$$

یعنی

$$c_{n-۲}=-\frac{(۲n-۲)!}{۲^{n}(n-۱)!(n-۲)!}\cdot$$

به‌همین ترتیب

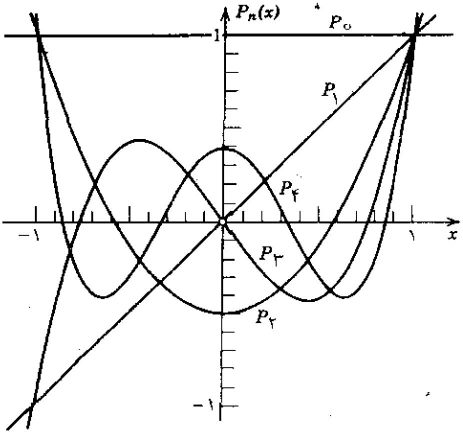
$$c_{n-۴}=-\frac{(n-۲)(n-۳)}{۴(۲n-۳)}c_{n-۲}=\frac{(۲n-۴)!}{۲^{n}۲!(n-۲)!(n-۴)!}$$

و غیره، درحالت کلی وقتی که $n-۲m\geqslant ۰$، داریم

$$c_{n-۲m}=(-۱)^{m}\frac{(۲n-۲m)!}{۲^{n}m!(n-m)!(n-۲m)!}\cdot \qquad (۱۰)$$

جواب‌حاصل ازمعادلهٔ لژاندر را **چندجمله‌ای لژاندر** درجهٔ n می‌نامند وآن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهند؛ از (۱۰) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}p_{n}(x)&=\sum_{m=۰}^{M}(-۱)^{m}\frac{(۲n-۲m)!}{۲^{n}m!(n-m)!(n-۲m)!}x^{n-۲m}\\&=\frac{(۲n)!}{۲^{n}(n!)^{۲}}x^{n}-\frac{(۲n-۲)!}{۲^{n}\times ۱!(n-۱)!(n-۲)!}x^{n-۲}+-\cdots,\end{aligned}\qquad (۱۱)$$



شکل ۷۴. چندجمله‌ایهای لژاندر

که در آن M برابر $\frac{n}{۲}$ یا $\frac{n-۱}{۲}$ است، بسته به اینکه کدام یک عدد صحیح باشد. خصوصاً (شکل ۷۴)،

$$P_۰(x)=۱\,, \qquad P_۱(x)=x\,,$$

$$P_۲(x)=\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)\,, \qquad P_۳(x)=\frac{۱}{۲}(۵x^۳-۳x)\,, \tag{۱۱'}$$

$$P_۴(x)=\frac{۱}{۸}(۳۵x^۴-۳۰x^۲+۳)\,,$$

$$P_۵(x)=\frac{۱}{۸}(۶۳x^۵-۷۰x^۳+۱۵x),$$

و غیره.

اصطلاح «تعامد» چند جمله‌ایهای لژاندر در بخش ۹.۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مسائل بخش ۳.۴

۱. ($'$۱۱)را از (۱۱) نتیجه بگیرید. $P_۶(x)$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۲. چند جمله‌ایهای $P_۰$، . . . ، $P_۵$ را که در ($'$۱۱) داده‌شده‌اند درمعادلهٔ لژاندر قرار دهید و ثابت کنید که این چندجمله‌ایها در معادلهٔ (۱) صدق می کنند.

۳. نشان‌دهید که هر گاه دراولین جمعبندی(۱*) فرض کنیم $s=m-۲$ ودرجمعبندیهای دیگر (۱*) قرار دهیم $m=s$ ، تا اینکه به‌دست آید

$$\sum_{s=۰}^{\infty}\{(s+۲)(s+۱)c_{s+۲}-[s(s-۱)-۲s+k]c_s\}x^s=۰\,.$$

در آن‌صورت می‌توانیم با سرعت بیشتری (۳) را از(۱*) نتیجه بگیریم.

۴. نشان دهید بـه‌ازای هر n که به‌ازای آن سریهای (۶) یا (۷) تبدیل به چندجمله‌ای نمی‌شوند، شعاع همگرایی این‌سریها ۱ خواهد بود.

۵. نشان دهید معادله‌ای که در مسئلهٔ ۲۳، بخش ۲.۴ آمده است، معادلهٔ لژاندر خاصی است وجواب عمومی آن را با توجه به (۵) این بخش به‌دست بیاورید.

۶. با به‌کاربردن قضیهٔ دوجمله‌ای درمورد $(x^۲-۱)^n$ ، و n بار مشتقگیری جمله به‌جمله از نتیجه و مقایسه با (۱۱) ثابت کنید

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad \text{(فرمول ردریگس*)} \tag{12}$$

۷. با استفاده از (۱۲) و با n بار انتگرالگیری جزء به‌جزء نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1} \qquad (n=0,1,\dots). \tag{13}$$

۸. **(تابع مولد)** نشان دهید که

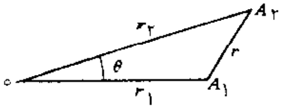
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n. \tag{14}$$

راهنمایی. از بسط دوجمله‌ای $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ آغاز کنید، قرار دهید $v=2xu-u^2$. هر یك از عواملی را که شامل $2xu-u^2$ هستند به‌توان رسانید، از u^n فاکتور بگیرید، وثابت کنید که مجموع این جملات برابر $P_n(x)u^n$ است.
تابع سمت چپ (۱۴) را تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر نامند.

۹. فرض کنید A_1 و A_2 دو نقطه در فضا باشند (شکل ۷۵، $r_2>0$). با استفاده از (۱۴) نشان دهید که

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=$$
$$\frac{1}{r_2}\left[P_0+P_1(\cos\theta)\frac{r_1}{r_2}+P_2(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2+\cdots\right].$$

این فرمول درنظریهٔ پتانسیل کاربردهایی دارد.



شکل ۷۵. مسئلهٔ ۹

۱۰. **(توابع وابستهٔ لژاندر)** معادلهٔ

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

* Rodrigues

را درنظر بگیرید. با قراردادن $y(x)=(1-x^2)^{m/2}u(x)$ نشان دهید که u در معادلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+[n(n+1)-m(m+1)]u=0.$$

با m بار مشتقگیری از (۱) شروع کنید و نشان دهید که جوابی ازمعادلهٔ بالا عبارت است از

$$u=\frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

$y(x)$ نظیراین جواب با $P_n^m(x)$ نشان داده می‌شود وتابع وابستهٔ لژاندر نام‌دارد. بنا براین

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

این تابع درفیزیك به‌ویژه درفیزیك‌کوانتومی نقش مهمی ایفا می‌کند.

۴۰۴ روش توسعه یافتهٔ سری توانی. معادلهٔ شاخصی

تعدادی از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، که در بسیاری ازکاربردها اهمیت زیادی دارند، دارای ضرایبی هستند که در نقطهٔ $x=0$ تحلیلی نیستند (تعریف در بخش ۲۰۴) ولی در عین‌حال طوری هستند که قضیهٔ زیر را می‌توان درموردشان به‌کار برد.

قضیهٔ ۱

هرمعادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت

$$y''+\frac{a(x)}{x}y'+\frac{b(x)}{x^2}y=0, \qquad (1)$$

که درآن توابع $a(x)$ و $b(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند حداقل دارای یك جواب است که می‌توان آن را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m=x^r(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \qquad (c_0\neq 0) \qquad (2)$$

در اینجا نمای r می‌تواند هرعددی (حقیقی یا مختلط) باشد (این عدد طوری انتخاب می‌شود که $c_0\neq 0$).[1]

---

۱. دراین قضیه به‌جای متغیرx می‌توان $x-a$ را،که درآن a عددی دلخواه است، قرارداد.

نکته اینجاست که در (۲) یك سری توانی داریم که در توانی از x، که نمای r آن بـه اعداد صحیح غیرمنفی محدود نشده ، ضرب می‌شود. (اگر چنین محدودیتی قائل می‌شدیم کل عبارت (۲) ، طبق تعریف، یك سری توانی می‌شد؛ پانوشت ۱ بخش ۱.۴ را ببینید.)

اثبات این قضیه نیاز به‌روشهای پیشرفتهٔ آنالیز مختلط دارد، چنین اثباتی در مرجع [B۱۱]، ضمیمهٔ ۱، یافت‌می‌شود. روش‌ذیر برای‌حل (۱) را **روش فروبنیوس** [1] می‌نامند.

برای حل (۱)، آن را به‌شکل مناسب‌تری می‌نویسیم :

$$x^{2}y''+xa(x)\,y'+b(x)\,y=0. \tag{1'}$$

نخست $a(x)$ و $b(x)$ را به‌سری توانی بسط می‌دهیم :

$$a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\qquad b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots.$$

سپس با مشتقگیری جمله به‌جمله از (۲) پیدا می کنیم

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)\,c_m x^{m+r-1}=x^{r-1}[r\,c_0+(r+1)\,c_1x+\cdots]$$

$$y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)\,c_m x^{m+r-2}$$
$$=x^{r-2}[r(r-1)\,c_0+(r+1)\,rc_1x+\cdots].$$

با قرار دادن همهٔ این سریها در (۱′) به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$x^{r}[r(r-1)c_0+\cdots]+(a_0+a_1x+\cdots)\,x^{r}(rc_0+\cdots)$$
$$+(b_0+b_1x+\cdots)\,x^{r}(c_0+c_1x+\cdots)=0.$$

حال، مانند قبل، مجموع ضرایب هر یك از توانهای x را مساوی صفر می گیریم. بدین ترتیب ، دستگاه معادلاتی برحسب ضرایب مجهول c_m حاصل می‌شود. کوچکترین توان عبارت است از x^r ومعادلهٔ نظیر آن چنین است :

$$[r(r-1)+a_0r+b_0]\,c_0=0.$$

چون بنا به‌فرض $c_0\neq 0$، به‌دست می‌آوریم

$$r^{2}+(a_0-1)r+b_0=0. \tag{3}$$

---

۱. گئورگ فروبنیوس (Georg Frobenius) ، ۱۸۴۹ـ۱۹۱۷ ، ریاضیدان آلمانی است که درنظریهٔ ماتریسها وگروهها نیز سهم بسزایی دارد.

این معادلهٔ درجه‌دوم مهم‌را **معادلهٔ شاخصی** معادلهٔدیفرانسیل(۱) می‌نامند. چنانکه خواهیم دیداین‌روش پایه‌ای‌برای‌جوابها به‌دست می‌دهد؛ یکی‌ازجوابهاهمواره به‌شکل(۲) است، ولی برای شکل سایر جوابها، بسته به‌ریشه‌های معادلهٔ شاخصی، سه‌حالت ممکن است:

حالت ۱. ریشه‌ها متمایزند وتفاضل‌آنهاعددی صحیح (... ,۳ ,۲ ,۱)[1] نیست.

حالت ۲. ریشهٔ مضاعف داریم.

حالت ۳. ریشه‌ها متمایزند و تفاضل آنها عددی صحیح است.

هریك از این‌حالات را به‌طور جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

حالت۱. تفاضل ریشه‌های متمایزمعادلهٔ شاخصی عددی صحیح نیست. این ساده‌ترین حالت است. فرض‌کنید r_1 و r_2 ریشه‌های (۳) باشند، هرگاه دردستگاه معادلات مذکور $r=r_1$ قرار دهیم ومانند قبل متوالیاً ضرایب c_1 ، c_2 ، ... را معین کنیم آنگاه جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_1(x)=x^{r_1}(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots). \qquad (۴)$$

می‌توان نشان داد (ر. ك. مرجع [B ۱۱])که دراین حالت معادلهٔ دیفرانسیل جواب مستقل دیگری، مانند $y_2(x)$ ، داردکه به‌همان شکل است:

$$y_2(x)=x^{r_2}(c_0{}^*+c_1{}^*x+c_2{}^*x^2+\cdots), \qquad (۵)$$

این‌جواب را می‌توان با قراردادن $r=r_2$ در دستگاه معادلات و تعیین پی‌درپی ضرایب $c_0{}^*$ ، $c_1{}^*$ ، ... به‌دست آورد. استقلال خطی y_1 و y_2 از آنجا نتیجه می‌شود که نسبت y_1/y_2 ثابت نیست چراکه r_1-r_2 عدد صحیحی نیست. ازاین‌رو y_1 و y_2 درفاصلهٔ همگرایی‌دوسری پایه‌ای برای (۱) تشکیل می‌دهند.

مثال ۱. نمونه‌ای برای حالت ۱

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را درنظر می گیریم:

$$x^2y''+\left(x^2+\frac{۵}{۳۶}\right)y=۰.$$

با جایگزین کردن (۲) دراین معادله به‌دست می‌آوریم

---

۱. توجه‌کنیدکه این‌حالت ریشه‌های مزدوج مختلط r_1 و $r_2=\bar{r}_1$ را شامل می‌شود، زیرا

$$r_1-r_2=r_1-\bar{r}_1=2i\,\mathrm{Im}\,r_1\neq\pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

$$(۶)\ \sum_{m=\circ}^{\infty}(m+r)(m+r-۱)c_m x^{m+r}+\sum_{m=\circ}^{\infty}c_m x^{m+r+۲}+\frac{۵}{۳۶}\sum_{m=\circ}^{\infty}c_m x^{m+r}=\circ.$$

از مساوی صفر قراردادن ضرایب x^r معادلهٔ شاخصی به‌دست می‌آید،

$$r(r-۱)+\frac{۵}{۳۶}=\circ$$

ریشه‌های این‌معادله عبارتند از $r_۱=۵/۶$ و $r_۲=۱/۶$. با مساوی قرار دادن مجموع ضرایب x^{r+s} در (۶) داریم .

$$(۷)\quad \text{(الف)}\ \left((r+۱)r+\frac{۵}{۳۶}\right)c_۱=\circ \qquad (s=۱),$$

$$\text{(ب)}\ (s+r)(s+r-۱)c_s+c_{s-۲}+\frac{۵}{۳۶}c_s=\circ \quad (s=۲,۳,\dots),$$

نخست جواب $y_۱(x)$ را که با $r_۱=۵/۶$ متناظراست تعیین می کنیم. به‌ازای این مقدار r، معادلهٔ (۷الف) نتیجه می‌دهد $c_۱=\circ$. معادلهٔ (۷ ب) را می‌توان چنین نوشت:

$$(۸)\qquad s\left(s+\frac{۲}{۳}\right)c_s+c_{s-۲}=\circ .$$

از $c_۱=\circ$ متوالیاً نتیجه می‌شود که $c_۳=\circ$ ، $c_۵=\circ$ ، . . . ، هر گاه در (۸) بگذاریم $s=۲p$ ، به‌دست می‌آوریم

$$c_{۲p}=-\frac{۳}{۴}\times\frac{c_{۲p-۲}}{p(۳p+۱)} \qquad (p=۱,۲,\dots).$$

به کمك این دستور، ضرایب را به‌دست می‌آوریم:

$$c_۲=-\frac{۳}{۴}\times\frac{c_\circ}{۴}$$

$$c_۴=-\frac{۳}{۴}\times\frac{c_۲}{۲\times۷}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲\frac{c_\circ}{۲!\times۴\times۷}$$

$$c_۶=-\frac{۳}{۴}\times\frac{c_۴}{۳\times۱\circ}=-\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳\frac{c_\circ}{۳!\times۴\times۷\times۱\circ}$$

بدین‌ترتیب جواب زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= c_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+5/6}}{p! \times 1 \times 4 \cdots (3p+1)} \\
&= c_0 x^{5/6}\left(1 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{896}x^4 - + \cdots\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

جواب دیگر متناظر با ریشهٔ $r_2 = 1/6$ یعنی $y_2(x)$ را می‌توان با روشی مشابه به‌دست آورد. اگر ضرایب این جواب را با c_0^*، c_1^*، ...، نشان دهیم به‌جای (۷) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad \left((r_2+1)\,r_2 + \frac{5}{36}\right)c_1^* = 0 \\
&\text{(ب)} \quad (s+r_2)(s+r_2-1)\,c_s^* + c^*_{s-2} + \frac{5}{36}c^*_s = 0 \quad (s = 2, 3, \ldots).
\end{aligned} \tag{10}
$$

با توجه به (۱۰ الف) می‌بینیم که $c_1^* = 0$، و (۱۰ ب) را می‌توان چنین نوشت:

$$
s\left(s - \frac{2}{3}\right)c_s^* + c^*_{s-2} = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots). \tag{11}
$$

نظر به اینکه $c_1^* = 0$ متوالیاً نتیجه می‌شود که $c_3^* = 0$، $c_5^* = 0$، ... هرگاه در (۱۱) قرار دهیم $s = 2p$، به‌دست می‌آوریم

$$
c_{2p}^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c^*_{2p-2}}{p(3p-1)} \qquad (p = 1, 2, \ldots).
$$

از این فرمول داریم

$$
c_2^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_0^*}{2}
$$

$$
c_4^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_2^*}{2 \times 5} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{c_0^*}{2! \times 2 \times 5}
$$

و جواب متناظر عبارت است از

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= c_0^* + c_0^* \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+1/6}}{p! \times 2 \times 5 \times \cdots \times (3p-1)} \\
&= c_0^*\, x^{1/6}\left(1 - \frac{3}{8}x^2 + - \cdots\right).
\end{aligned} \tag{12}
$$

سریهای (۹) و (۱۲) به‌ازای تمام مقادیر x همگرا و y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. در نتیجه این توابع به‌ازای تمام مقادیر x پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند. (در بخش بعدی‌خواهیم‌دید که این معادله رابطهٔ نزدیکی بامعادلهٔ بسل با پارامتر $\nu = ۱/۳$، دارد.)

▲

حالت ۲. معادلهٔ شاخصی ریشهٔ مضاعف دارد. معادلهٔ شاخصی (۳) دارای ریشهٔ مضاعف r است اگر و تنها اگر $(a_0 - ۱)^۲ - ۴b = ۰$، و درنتیجه $r = (۱ - a_0)/۲$. اولین جواب معادله را می‌توان مانند قبل، به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$y_1(x) = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) \quad \left(r = \frac{1 - a_0}{2}\right) \tag{۱۳}$$

برای یافتن جواب دیگر، ازروش تغییر پارامترها استفاده می کنیم، یعنی ثابت c درجواب cy_1 را با تابعی مانند $u(x)$، که باید تعیین شود، عوض می کنیم به‌طوری که

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x) \tag{۱۴}$$

جواب معادلهٔ (۱) باشد. با قراردادن (۱۴) و مشتقات

$$y_2' = u'y_1 + uy_1', \qquad y''_2 = u''y_1 + 2u'y'_1 + uy''_1$$

درمعادلهٔ دیفرانسیل ('۱) به دست می‌آوریم

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + xa(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0.$$

چون y_1 جوابی از معادلهٔ ('۱) است، مجموع جملاتی‌که شامل u هستند برابر صفر است، ومعادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 y_1 u'' + 2x^2 y_1' u' + xay_1 u' = 0.$$

با تقسیم این معادله بر $x^2 y_1$ و قراردادن سری توانی به‌جای a به‌دست می‌آوریم

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a_0}{x} + \cdots\right) u' = 0.$$

در اینجا و در زیر نقطه‌ها نشان دهندهٔ جملاتی است که یا ثابتند و یا شامل توانهای مثبت x اند. حال از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x^{r-1}[rc_0 + (r+1)c_1 x + \cdots]}{x^r[c_0 + c_1 x + \cdots]}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{rc_0 + (r+1)c_1 x + \cdots}{c_0 + c_1 x + \cdots}\right) = \frac{r}{x} + \cdots$$

از این رو معادلهٔ آخر را می‌توان چنین نوشت:

$$u''+\left(\frac{2r+a_0}{x}+\cdots\right)u'=0. \qquad (15)$$

چون $r=(1-a_0)/2$ ، بنابراین جملهٔ $(2r+a_0)/x$ برابر $1/x$ است و بدین ترتیب با تقسیم (۱۵) بر u' داریم

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}+\cdots$$

با انتگرالگیری به‌دست می‌آوریم

$$\ln u'=-\ln x+\cdots \quad \text{یا} \quad u'=\frac{1}{x}e^{(\cdots)}.$$

با بسط تابع نمایی برحسب توانهای x وانتگرالگیری مجدد می‌بینیم که عبارتی که برای u به‌دست می‌آید به‌صورت زیر است:

$$u=\ln x+k_1x+k_2x^2+\cdots$$

با قرار دادن این u در (۱۴) نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

شکل جوابها درحالتی‌که معادلهٔ شاخصی ریشهٔ مضاعف دارد. هرگاه معادلهٔ شاخصی (۳) دارای ریشهٔ مضاعف r باشد ، آنگاه جوابهای مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌شکل (۱۳) هستند و

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^r\sum_{m=1}^{\infty}A_mx^m. \qquad (16)$$

ساده‌ترین مثال این حالت معادلهٔ کشی (بخش ۷.۲) در حالت بحرانی است (مثال ۵ همین بخش را نیز ملاحظه کنید).

مثال ۲. نمونه‌ای برای حالت ۲

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0. \qquad (17)$$

با نوشتن این معادله به صورت استاندارد (۱) می‌بینیم که این معادله درمفروضات قضیهٔ ۱ صدق می‌کند. با قرار دادن (۲) ومشتقات آن در (۱۷) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r-1}\\&+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r}=0.\end{aligned} \qquad (18)$$

کوچکترین توان موجود دراین معادله برابر x^{r-1} است؛ باصفر گرفتن مجموع ضرایب این توان داریم

$$[-r(r-1)-r]c_0=0 \quad \text{یا} \quad r^2=0 .$$

پس معادلهٔ شاخصی دارای ریشهٔ مضاعف $r=0$ است. این مقدار را در (۱۸) قرار می‌دهیم ومجموع ضرایب x^s را برابر صفر می گیریم، ومی‌یابیم

$$s(s-1)c_s-(s+1)sc_{s+1}+3sc_s-(s+1)c_{s+1}+c_s=0$$

یا $c_{s+1}=c_s$. از این‌رو $c_0=c_1=c_2=\ldots$ ، و با انتخاب $c_0=1$ جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty} x^m=\frac{1}{1-x}.$$

برای یافتن جواب دوم ، $y_2=uy_1$ و مشتقات‌آن را در معادلهٔ (۱۷) قرار می‌دهیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$x(x-1)(u''y_1+2u'y'+uy'')+(3x-1)(u'y_1+uy_1')+uy_1=0.$$

چون y_1 جوابی از (۱۷) است، معادلهٔ بالا چنین می‌شود:

$$x(x-1)(u''y_1+2u'y_1')+(3x-1)u'y_1=0$$

با قراردادن عبارات مربوط به y_1 و y_1' دراین معادله وساده‌کردن‌آن، معادلهٔ‌دیفرانسیل زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$xu''+u'=0 \quad \text{یا} \quad \frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}.$$

با دوبار انتگرالگیری، سرانجام به‌دست می‌آوریم $u=\ln x$ وجواب دوم به‌ازای همهٔ مقادیر مثبت x عبارت است از

$$y_2=uy_1=\frac{\ln x}{1-x}. \qquad ▲$$

حالت ۳. تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عددی صحیح است. هرگاه تفاضل ریشه‌های r_1 و r_2 معادلهٔ شاخصی عددی صحیح باشد، مثلا $r_1=r$ و $r_2=r-p$ و* p عددی صحیح و مثبت باشد ، آنگاه همواره می‌توان یکی از جوابها را ، یعنی جواب زیر راکه متناظر با ریشهٔ r_1 است، مانند قبل تعیین کرد:

$$y_1(x)=x^{r_1}(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots)$$

ولی برای ریشهٔ دوم ممکن است اشکالاتی بروز کند وامکان تعیین جواب $y_۲$ با روشی که در حالت ۱ بـه‌کار برده‌ایم نباشد (ر. ك. مثال ۳ همین بخش). برای تعیین $y_۲$ می‌توانیم مانندحالت ۲ عمل کنیم. مراحل اول تا رسیدن به‌معادلهٔ (۱۵) عیناً همان است. $۲r+a_۰$ را در(۱۵) تعیین می‌کنیم. از جبر مقدماتی می‌دانیم که ضریب $a_۰-۱$ در (۳) برابر $-(r_۱+r_۲)$ است. درمورد حاضر، $r_۱=r$، $r_۲=r-p$ وبنابراین $a_۰-۱=p-۲r$. پس در (۱۵) داریم $۲r+a_۰=p+۱$. بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\frac{u''}{u'}=-\left(\frac{p+۱}{x}+\cdots\right).$$

مراحل بعدی مانند حالت ۲ است. با انتگرالگیری درمی‌یابیم که

$$u'=x^{-(p+۱)}e^{(\cdots)} \quad \text{یا} \quad \ln u'=-(p+۱)\ln x+\cdots$$

که‌نقطه‌ها به‌جای سریهایی ازتوانهای نامنفی x نشسته‌اند. مانندگذشته با بسط‌تابع‌نمایی سریی به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$u'=\frac{۱}{x^{p+۱}}+\frac{k_۱}{x^p}+\cdots+\frac{k_p}{x}+k_{p+۱}+k_{p+۲}x+\cdots.$$

با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u=-\frac{۱}{px^p}-\cdots+k_p\ln x+k_{p+۱}x+\cdots$$

با ضرب این عبارت درسری

$$y_۱=x^{r_۱}(c_۰+c_۱x+\cdots)$$

وبا توجه به‌اینکه $r_۱-p=r_۲$، ملاحظه می‌کنیم $y_۲=uy_۱$ به‌شکل زیر است

$$y_۲(x)=k_p y_۱(x)\ln x+x^{r_۲}\sum_{m=۰}^{\infty}c_m x^m \qquad (x>۰). \tag{۱۹}$$

نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد.

شکل جوابها وقتی‌که تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عددی صحیح باشد. هرگاه تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخصی (۳) عددی صحیح باشد، آنگاه متناظر با ریشه‌ای که قسمت حقیقی آن بزرگتر است (مثلا $r_۱$) جوابی از (۱) به‌شکل (۴) وجود دارد ومتناظر با ریشهٔ دیگر ($r_۲$) جوابی به شکل (۱۹). این جوابها پایه‌ای برای (۱) تشکیل می‌دهند.

در حالی که وقتی معادلهٔ (۳) دارای ریشهٔ مضاعف باشد جواب دوم همواره شامل یك جملهٔ لگاریتمی است ، درحالت حاضرممکن است ضریب k_p در (۱۹) صفر باشد و جواب جملهٔ لگاریتمی نداشته باشد (ر. ك. مثال ۴).[1]

مثال ۳. نمونه‌ای برای حالت ۳

معادلهٔ زیر را درنظر می گیریم :

$$(x^2-1)x^2y''-(x^2+1)xy'+(x^2+1)y=0.$$

با قرار دادن (۲) ومشتقات آن دراین معادلهٔ دیفرانسیل ابتدا داریم

$$(x^2-1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r}-(x^2+1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r}$$
$$+(x^2+1)\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r}=0.$$

پس‌از انجام دادن ضربها وساده‌کردن عبارات به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2c_mx^{m+r+2}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r+1)(m+r-1)c_mx^{m+r}=0 \quad (20)$$

با صفر گرفتن ضریب x^r ملاحظه می کنیم که معادلهٔ شاخصی چنین است :

$$(r+1)(r-1)=0.$$

تفاضل ریشه‌های $r_1=1$ و $r_2=-1$ عددی صحیح است . با صفر گرفتن ضریب x^{r+1} در (۲۰) داریم

$$-(r+2)rc_1=0.$$

به‌ازای $r=r_1$ وهمین‌طور $r=r_2$ از این معادله $c_1=0$ حاصل می‌شود. باصفر گرفتن مجموع ضرایب x^{s+r+2} در (۲۰) داریم

$$(s+r-1)^2c_s=(s+r+3)(s+r+1)c_{s+2}\quad(s=0,1,\cdots). \quad (21)$$

با قرار دادن $r=r_1=1$ دراین معادله وحل آن نسبت به c_{s+2} مشاهده می کنیم که

---

۱. نظریهٔ عمومی همگرایی چنین سریهایی دراینجا ارائه نخواهد شد ولی در هرمورد خاص می‌توان همگرایی را به‌طریق معمول آزمود.

$$c_{s+2}=\frac{s^2}{(s+4)(s+2)}c_s \qquad (s=0, 1, \ldots).$$

از آنجا که $c_1=0$، نتیجه می‌شود $c_3=0$، $c_5=0$ و الی آخر. به‌ازای $s=0$ به دست می‌آوریم $c_2=0$ و از اینجا و با فرض $s=2, 4, \ldots$ داریم $c_4=0$، $c_6=0$ وغیره. پس جواب متناظر با ریشهٔ بزرگتر $r_1=1$ عبارت است از

$$y_1=c_0x.$$

حال جواب دیگر را تعیین می کنیم. هر گاه ریشهٔ کوچکتر $r=r_2=-1$ را در (۲۱) قراردهیم، نتیجه می گیریم

$$(s-2)^2c_s=(s+2)sc_{s+2} \qquad (s=0, 1, \ldots).$$

به‌ازای $s=0$ این معادله به‌صورت $4c_0=0$ درمی‌آید که $c_0=0$ را نتیجه می‌دهد. این نتیجه با فرض اولیهٔ $c_0\neq 0$ متناقض است. بدین ترتیب معلوم می‌شود که معادلهٔ مزبورجواب مستقل دوم $y_2(x)$ به‌شکل (۲)، که متناظر با ریشهٔ کوچکتر r_2 باشد، ندارد. با توجه به (۱۹) می‌بینیم که $y_2(x)$ باید به‌شکل زیر باشد:

$$y_2(x)=kx\ln x+\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m.$$

با قرار دادن این تابع ومشتقاتش درمعادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم

$$(x^2-1)x^2\left(\frac{k}{x}+\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)(m-2)c_mx^{m-3}\right)-(x^2+1)x\left(k\ln x\right.$$

$$\left.+k+\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)c_mx^{m-2}\right)+(x^2+1)\left(kx\ln x+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m-1}\right)=0.$$

جملات لگاریتمی حذف می‌شوند وبعداز ساده کردن نتیجه می گیریم

$$-2kx+\sum_{m=0}^{\infty}(m-2)^2c_mx^{m+1}-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-2)c_mx^{m-1}=0.$$

با صفر گرفتن مجموع ضرایب x^s به‌دست می‌آوریم

$$c_1=0\ (s=0)\text{،}\quad -2k+4c_0=0\ (s=1)$$

$$(s-3)^2C_{s-1}-(s^2-1)C_{s+1}=0 \qquad (s=2, 3, \ldots).$$

با حل این معادله نسبت به C_{s+1} داریم

$$C_{s+1}=\frac{(s-3)^2}{s^2-1}C_{s-1} \qquad (s=2,3,\cdots)$$

چون $C_1=0$، معلوم می‌شود که $C_3=0$، $C_5=0$ و الی‌آخر. $s=3$ نتیجه می‌دهد که $C_4=0$، از این‌رو $C_6=0$، $C_8=0$، و غیره، $k=2C_0$ و C_2 دلخواه باقی می‌مانند. درنتیجه

$$y_2(x)=2C_0\, x\ln x+\frac{1}{x}(C_0+C_2x^2).$$

چون جملهٔ آخر برابر C_2y_1/c_0 است، می‌توانیم فرض کنیم $C_2=0$. به‌ازای $C_0=\frac{1}{2}$ داریم

$$y_2(x)=x\ln x+\frac{1}{2x}.$$

در حالات ۲ و ۳گاهی ساده‌تر آن‌است‌که جواب مستقل دوم‌را باروش تغییر پارامترها به‌دست آوریم.

حال این مطلب را در مورد معادلهٔ تحت بررسی روشن می‌سازیم. چون x جوابی از معادله است، می‌توانیم قرار دهیم

$$y_2(x)=xu(x).$$

با قرار دادن این‌تابع در معادله، پس از ساده کردن، داریم

$$(x^3-x)u''+(x^2-3)u'=0.$$

با استفاده ازکسرهای جزئی به‌دست می‌آوریم

$$\frac{u''}{u'}=\frac{3-x^2}{x^3-3}=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

با انتگرالگیری از طرفین داریم

$$\ln u'=-3\ln x+\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln\frac{x^2-1}{x^3}.$$

پس از اثردادن تابع نمایی برروی این معادله وانتگرالگیری مجدد به‌دست می‌آوریم

$$u=\ln x+\frac{1}{2x^2}.$$

و این همان عبارت قبلی است، یعنی داریم

$$y_2(x)=xu(x)=x\ln x+\frac{1}{2x}.$$

مثال ۴. حالت ۳، جواب دوم بدون جملهٔ لگاریتمی

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم :

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

با قراردادن (۲) و مشتقاتش در این معادله به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+r)(m+r-1)+(m+r)-\frac{1}{4}\right]c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}=0.$$

با صفر گرفتن ضریب x^r ، معادلهٔ شاخصی زیر حاصل می‌شود

$$r^2=\frac{1}{4}\quad \text{یا}\quad r(r-1)+r-\frac{1}{4}=0$$

تفاضل ریشه‌های $r_1=1/2$ و $r_2=-1/2$ عددی‌صحیح است. با صفر گرفتن مجموع ضرایب x^{s+r} به‌دست می‌آوریم

$$\left[(r+1)r+(r+1)-\frac{1}{4}\right]c_1=0 \qquad (s=1) \qquad \text{(الف)}$$

(۲۲)

$$\left[(s+r)(s+r-1)+s+r-\frac{1}{4}\right]c_s+c_{s-2}=0 \quad (s=2,3,\cdots) \quad \text{(ب)}$$

به ازای $r=r_1=1/2$ معادلهٔ (۲۲ الف) نتیجه می‌دهد $c_1=0$ ، و (۲۲ ب) چنین می‌شود :

$$(s+1)sc_s+c_{s-2}=0. \qquad (23)$$

ازاین تساوی و $c_1=0$ به‌دست می‌آوریم $c_3=0$ ، $c_5=0$ وغیره. با حل (۲۳) نسبت به c_s و قراردادن $s=2p$ نتیجه می گیریم

$$c_{2p}=-\frac{c_{2p-2}}{2p(2p+1)} \qquad (p=1,2,\cdots)$$

ازاین‌رو ضرایب غیرصفر عبارتند از

$$c_2=-\frac{c_0}{3!} \text{ ، } c_4=-\frac{c_2}{4\times5}=\frac{c_0}{5!} \text{ ، } c_6=-\frac{c_0}{7!} \text{ ، وغیره،}$$

ودرنتیجه جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_1(x)=c_0x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}=c_0\,x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=c_0\frac{\sin x}{\sqrt{x}}. \qquad (24)$$

با توجه به (۱۹) مشاهده می‌کنیم که جواب مستقل دوم به‌صورت زیر است:

$$y_2(x)=k\,y_1(x)\ln x+x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m.$$

هرگاه این‌جواب ومشتقاتش را درمعادلهٔ دیفرانسیل قرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم‌سه‌عبارتی که شامل $\ln x$ و ky_1 و $-ky_1$ هستند حذف می‌شوند. سپس با ساده‌کردن معادلهٔ باقی‌مانده به‌دست می‌آوریم

$$2kxy_1'+\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)c_m x^{m-1/2}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+3/2}=0.$$

باتوجه به (۲۴) درمی‌یابیم $2kxy'=-kc_0x^{1/2}+\ldots$. چون جملهٔ دیگری که شامل $x^{1/2}$ باشد وجود ندارد و $c_0\neq 0$، باید داشته باشیم $k=0$. مجموع ضرایب $x^{s-1/2}$ عبارت است از

$$s(s-1)C_s+C_{s-2} \qquad (s=2,3,\cdots).$$

با صفر گرفتن این عبارت وحل آن نسبت به C_s داریم

$$C_s=-\frac{C_{s-2}}{s(s-1)} \qquad (s=2,3,\cdots).$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$C_2=-\frac{C_0}{2!} \text{ ، } C_4=-\frac{C_2}{4\times3}=\frac{C_0}{4!} \text{ ، } C_6=-\frac{C_0}{6!} \text{ ، وغیره،}$$

$$C_3=-\frac{C_1}{3!} \text{ ، } C_5=-\frac{C_3}{5\times4}=\frac{C_1}{5!} \text{ ، } C_6=-\frac{C_1}{7!} \text{ ، وغیره،}$$

می‌توانیم C_1 را برابر صفر بگیریم، زیرا توانهای فرد C_1y_1/c_0 را به‌بار می‌آورند، دراین صورت

$$y_2(x)=C_0x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}=C_0\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,. \qquad (25)$$

$y_1(x)$ و $y_2(x)$ به‌ازای هر $x\neq 0$ پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند.

مثال ۵. معادلهٔ کشی

در بخش ۷.۲ دیده‌ایم که معادلهٔ کشی

$$x^2y''+a_0xy'+b_0y=0 \qquad (a_0 \text{ ، } b_0 \text{ ثابت}) \qquad (26)$$

را می‌توان با قرار دادن $y=x^r$ در (۲۶)، حل کرد. با این‌کار، معادلهٔ کمکی زیرحاصل می‌شود:

$$r^2+(a_0-1)r+b_0=0\,.$$

بدیهی است کـه این معادلهٔ شاخصی است. هرگاه $r_1\neq r_2$، آنگاه $y_1=x^{r_1}$ و $y_2=x^{r_2}$ پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند؛ این نظیر حالتهای ۱ و ۳ است. هرگاه $r_1=r_2=r$ آنگاه جوابهای

$$y_1=x^r\,, \qquad y_2=y_1\ln x=x^r\ln x$$

که از قرار دادن (۱۶) در (۲۶) به‌دست می‌آیند، وبا نتیجهٔ حاصل از بخش ۷.۲موافقت دارند، به‌ازای هر x مثبت پایه‌ای برای جوابهاتشکیل می‌دهند.

مسائل بخش ۴.۴

پایه‌ای برای جوابهای هریك از معادلات دیفرانسیل زیر بیابید. سعی کنید سریهایی راکه با به‌کار بردن روش فروبنیوس به دست می‌آورید برحسب توابع شناخته شده بنویسید.

۱. $x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=0$

۲. $2x(1-x)y''+(1+x)y'-y=0$

۳. $y''+xy'+(1-2x^{-2})y=0$

۴. $xy''+2y'+4xy=0$

۵. $xy''+3y'+4x^3y=0$

۶. $xy''-y=0$

۷. $x^2y''-5xy'+9y=0$

۸. $xy''+2y'+xy=0$

۹. $xy''+y'-xy=0$

۱۰. $(x-1)xy''+(4x-2)y'+2y=0$

۱۱. $x^2y''+xy'-4y=0$

۱۲. $2x^2y''-xy'-2y=0$

۱۳. $x^2y''+6xy'+(6-4x^2)y=0$

۱۴. $x^2y''-2y=0$

۱۵. $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$

۱۶. $xy''+(2-2x)y'+(x-2)y=0$

۱۷. (**معادلهٔ فوق هندسی گاوس**[1]) معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \tag{۲۷}$$

(که درآن a ، b ، c ثابتند) به معادلهٔ فوق هندسی گاوس معروف است. نشان دهید که معادلهٔ شاخصی متناظر با این معادله دارای ریشه‌های $r_1=0$ و $r_2=1-c$ است. ثابت کنید که روش فروبنیوس به ازای $r_1=0$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} y_1(x)=1+\frac{ab}{1!c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 \\ +\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots \\ (c\neq 0,-1,-2,\cdots). \end{aligned} \tag{۲۸}$$

این سری را **سری فوق هندسی** می‌نامند. معمولا $y_1(x)$ ، مجموع این سری را با $F(a,b,c;x)$ نشان می‌دهند و آن را **تابع فوق هندسی** می‌نامند.

۱۸. ثابت کنید که سری (۲۸) به‌ازای $|x|<1$ همگرا است.

۱۹. نشان دهید وقتی که $a=b=c=1$ ، سری (۲۸) به‌سری هندسی تبدیل می‌شود.

۲۰. به‌ازای چه مقادیری از a و b ، (۲۸) به‌یك چند جمله‌ای تبدیل می‌شود؟

۲۱. نشان دهید که جواب زیر متناظر با $r_2=1-c$ درمسئلهٔ ۱۷ است:

---

۱. کارل فریدریش گاوس (Carl Friedrich Gauss) ، ۱۸۵۵–۱۷۷۷ ، ریاضیدان بزرگ آلمانی است که کارهای او درجبر، نظریهٔ اعداد، معادلات دیفرانسیل، هندسهٔ دیفرانسیل هندسهٔ نااقلیدسی، آنالیز مختلط، آنالیز عددی و مکانیك نظری از اهمیت اساسی برخوردار است. اوهمچنین راه را برای استفادهٔ عمومی وسیستماتیك اعداد مختلط هموار کرد.

$$y_2(x)=x^{1-c}\Big(1+\frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2+\cdots\Big) \quad (29)$$

$$(c\neq 2, 3, 4, \ldots).$$

۲۲. نشان دهید که درمسئلهٔ ۲۱ داریم

$$y_2(x)=x^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c\ ;\ x).$$

۲۳. نشان دهید که هرگاه $c\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ، آنگاه توابع (۲۸) و (۲۹) پایه‌ای برای جوابهای (۲۷) تشکیل می‌دهند.

۲۴. نشان دهید که

$$\frac{dF(a, b, c; x)}{dx}=\frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1; x),$$

$$\frac{d^2F(a, b, c; x)}{dx^2}=\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}F(a+2, b+2, c+2; x),$$

وغیره.

بسیاری از توابع مقدماتی حالت خاصی از $F(a, b, c; x)$ هستند. ثابت کنید

۲۵. $\frac{1}{1-x}=F(1, 1, 1; x)=F(1, b, b; x)=F(a, 1, a; x)$

۲۶. $(1+x)^n=F(-n, b, b; -x),\ (1-x)^n=1-nxF(1-n, 1, 2; x)$

۲۷. $\arctan x=xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right), \arcsin x=xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right)$

۲۸. $\ln(1+x)=xF(1, 1, 2; -x), \ln\frac{1+x}{1-x}=2xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right)$

۲۹. معادلهٔ دیفرانسیل زیر را درنظر می گیریم

$$(t^2+At+B)\ddot{y}+(Ct+D)\dot{y}+Ky=0 \quad (30)$$

که درآن A ، B ، C ، D ، K ثابت‌اند و t^2+At+B دارای دو صفر متمایز t_1 و t_2 است. نشان دهید که با معرفی متغیر مستقل جدید $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ ، معادلهٔ (۳۰)

به معادلهٔ فوق هندسی تبدیل می‌شود کـه در آن (t_2-t_1) $Ct_1+D=-c$ ، $C=a+b+1$ ، $K=ab$.

معادلات زیر را برحسب توابع فوق هندسی حل کنید.

۳۰. $2x(1-x)y''+(1-5x)y'-y=0$

۳۱. $2x(1-x)y''-(1+5x)y'-y=0$

۳۲. $5x(1-x)y''+(4-x)y'+y=0$

۳۳. $4(t^2-3t+2)\ddot{y}-2\dot{y}+y=0$

۳۴. $3t(1+t)\ddot{y}+t\dot{y}-y=0$

۳۵. $2(t^2-5t+6)\ddot{y}+(2t-3)\dot{y}-8y=0$

۵.۴ معادلهٔ بسل. توابع بسل نوع اول

یکی ازمعادلات دیفرانسیل بسیارمهم درریاضیات‌کاربردی **معادلهٔ دیفرانسیل بسل**[1] است.

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{1}$$

که در آن پارامتر ν عددی مفروض است. فرض می‌کنیم که ν حقیقی وغیر منفی باشد. این معادله ازنوعی است که درقضیهٔ ۱ بخش ۴.۴ مشخص شد وبنا براین جوابی به‌صورت زیر دارد:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \qquad (c_0\neq 0). \tag{2}$$

با قرار دادن این عبارت ومشتقات آن درمعادلهٔ بسل داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0.$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب x^{s+r} پیدا می‌کنیم

---

۱. فریدریش ویلهم بسل (Friedrich Wilhelm Bessel) ، ۱۷۸۴–۱۸۴۶ ، منجم وریاضیدان آلمانی.

$$r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0 = 0 \qquad (s=0) \quad \text{(الف)}$$

$$(3) \qquad (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \qquad (s=1) \quad \text{(ب)}$$

$$(s+r)(s+r-1)c_s + (s+r)c_s + C_{s-2} - \nu^2 c_s = 0 \quad \text{(پ)}$$
$$(s = 2, 3, \ldots)$$

از (۳ الف) معادلهٔ شاخصی زیر به‌دست می‌آید:

$$(4) \qquad (r+\nu)(r-\nu) = 0 \,.$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از $r_1 = \nu\ (\geqslant 0)$ و $r_2 = -\nu$.

ابتداجواب متناظر با ریشهٔ r_1 را تعیین می‌کنیم. به‌ازای این مقدار r معادلهٔ(۳ب) نتیجه می‌دهد $c_1 = 0$. معادلهٔ (۳ پ) را می‌توان چنین نوشت:

$$(s+r+\nu)(s+r-\nu)c_s + c_{s-2} = 0 \,,$$

و به‌ازای $r=\nu$ این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(5) \qquad (s+2\nu)sc_s + c_{s-2} = 0 \,.$$

چون $c_1 = 0$ و $\nu \geqslant 0$ متوالیاً نتیجه می‌شود $c_3 = 0$، $c_5 = 0$، ...، هرگاه در (۵) بگذاریم $s = 2m$، به‌دست می‌آوریم

$$(6) \qquad c_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(\nu+m)} c_{2m-2} \,, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

وضرایب c_2، c_4، ... را می‌توان متوالیاً تعیین کرد.
c_0 دلخواه است. مرسوم است که فرض کنند

$$(7) \qquad c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

که $\Gamma(\nu+1)$ **تابع گاما** است. بعضی از فرمولهای اساسی مربوط به‌این تابع مهم در ضمیمهٔ ۳ گنجانده شده است. برای آنچه‌که فعلا مورد نظر ما است کافی است بدانیم که تابع $\Gamma(\alpha)$ با انتگرال

$$(8) \qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha > 0).$$

تعریف می‌شود. با انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌دست می‌آوریم

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt = -e^{-t} t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

عبارت اول سمت راست صفر است و انتگرال سمت راست برابر $\Gamma(\alpha)$ است. بدین ترتیب رابطهٔ اساسی زیر نتیجه می‌شود:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha). \tag{۹}$$

نظر به اینکه

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1,$$

از (۹) نتیجه می گیریم که

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1!,\qquad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!,\ \dots$$

ودرحالت کلی

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (k=0,1,\dots). \tag{۱۰}$$

این دستور نشان می‌دهد که تابع گاما را می‌توان تعمیمی از تابع فاکتوریل که در حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی با آن آشنا شده‌ایم دانست.

به‌مسئلهٔ خودمان برمی گردیم و با توجه به (۶)، (۷) و (۹) می‌نویسیم

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(\nu+1)}=-\frac{1}{2^{2+\nu}\times 1!\,\Gamma(\nu+2)}$$

$$c_4=-\frac{c_2}{2^2\times 2(\nu+2)}=\frac{1}{2^{4+\nu}\times 2!\,\Gamma(\nu+3)}$$

والی آخر؛ درحالت کلی

$$c_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!\,\Gamma(\nu+m+1)}. \tag{۱۱}$$

با قرار دادن این ضرایب در (۲) وبه‌یاد آوردن اینکه $c_1=0$ ، $c_3=0$ ، ... جوابی خصوصی از معادلهٔ بسل را که با $J_\nu(x)$ نشان داده می‌شود به‌دست می‌آوریم:

$$J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\,\Gamma(\nu+m+1)}. \tag{۱۲}$$

این جواب (۱) به **تابع بسل نوع اول** مرتبهٔ ν معروف است. آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری (۱۲) به‌ازای هر x همگراست.

مقادیر صحیح ν را اغلب با n نمایش می‌دهند. بنابراین به‌ازای $n\geqslant 0$ داریم

$$J_n(x)=x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}m!\,(n+m)!}. \tag{۱۳}$$

با قرار دادن $-\nu$ به‌جای ν در (۱۲) داریم

$$J_{-\nu}(x)=x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu}m!\,\Gamma(m-\nu+1)}. \qquad (14)$$

چون معادلهٔ بسل شامل ν^2 است، توابع J_ν و $J_{-\nu}$، جوابهای معادله به ازای یك ν هستند. هر گاه ν عددی صحیح نباشد، این جوابها مستقل خطی هستند، زیرا اولین جملهٔ (۱۲) و اولین جملهٔ (۱۴) به ترتیب مضارب غیر صفر و متناهی x^ν و $x^{-\nu}$ هستند. از اینجا قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی)

هرگاه ν عددی صحیح نباشد، جواب عمومی معادلهٔ بسل به‌ازای $x\neq 0$ عبارت است از

$$y(x)=a_1J_\nu(x)+a_2J_{-\nu}(x). \qquad (15)$$

ولی اگر ν عددی صحیح باشد، آنوقت (۱۵) جواب عمومی نیست. این‌موضوع از قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲ (وابستگی خطی)

به‌ازای عدد صحیح $\nu=n$ توابع بسل $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابستهٔ خطی هستند، زیرا

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x) \qquad (n=1,2,\cdots). \qquad (16)$$

اثبات. از (۱۴) استفاده می‌کنیم وفرض کنیم که ν به‌سمت عدد صحیح مثبتی مانند n میل کند دراین‌صورت توابع گامایی که درضرایب n جملهٔ اول وجوددارند نامتناهی‌می‌شوند (ر.ك. شکل ۴۰۵ ضمیمهٔ ۳)، ضرایب صفر می‌شوند، و جمعبندی از $m=n$ شروع می‌شود. چون در این حالت $\Gamma(m-n+1)=(m-n)!$ [ر. ك. (۱۰)]، به دست می‌آوریم

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n}m!(m-n)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!\,s!}$$

که درآن $m=n+s$ و $s=m-n$. با توجه به (۱۳) ملاحظه می‌کنیم که سری‌آخر نمایش $(-1)^nJ_n(x)$ است، وبه‌این ترتیب اثبات قضیه به‌انجام می‌رسد. ▲

جواب عمومی معادلهٔ بسل به ازای عدد صحیح $\nu=n$ را دربخش بعدی به دست می‌آوریم. مقادیر عددی J_0 و J_1 درضمیمهٔ ۴ آمده‌اند.

مسائل بخش ۵۰۴

۱. نشان دهید که سری موجود در (۱۲) به‌ازای هر x همگراست.

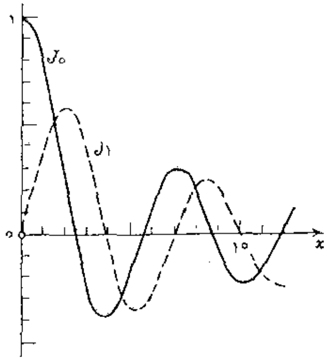
۲. نشان دهید که $J_n(x)$ به‌ازای مقادیر زوج n تابعی زوج است و به‌ازای مقادیر فرد n تابعی فرد.

۳. نشان دهید که (ر. ك. شکل ۷۶)

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+-\cdots \qquad (17)$$

و

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\times 1!\times 2!}+\frac{x^5}{2^5\times 2!\times 3!}-\frac{x^7}{2^7\times 3!\times 4!}+-\cdots \qquad (18)$$



شکل ۷۶. توابع بسل نوع اول

۴. نشان دهید که به‌ازای مقادیر کوچك $|x|$ داریم $J_0(x)\approx 1-0{,}25x^2$. با استفاده از این فرمول مقدار $J_0(x)$ را به‌ازای $x=0{,}1\,,\,0{,}2\,,\,\ldots\,,\,1$ محاسبه کنید و از طریق مقایسهٔ آن با جدول A۲ از ضمیمهٔ ۴ خطای نسبی را تعیین کنید.

۵. چندجمله از (۱۷) برای محاسبهٔ $J_0(1)$، با خطایی کمتر از یك واحد دررقم پنجم اعشار، لازم است؟ برای محاسبهٔ $\ln 2$ با همین دقت چند جمله از سری مکلورن $\ln(1+x)$ لازم است؟

۶. به‌ازای x های بزرگ می‌توان نشان داد که

$$J_{2n}(x) \approx (-1)^n(\pi x)^{-1/2}(\cos x+\sin x) \qquad (19)$$
$$J_{2n+1}(x) \approx (-1)^{n+1}(\pi x)^{-1/2}(\cos x-\sin x)\,.$$

با استفاده از (۱۹)، نمودار $J_0(x)$ را بــه‌ازای x های بزرگ رسم کنید، مقادیر تقریبی اولین پنج صفر مثبت $J_0(x)$ را محاسبه کنید و آنها را بــا مقــادیر دقیقتر ۲٫۴۰۵، ۵٫۵۲۰، ۸٫۶۵۴، ۱۱٫۷۹۲، ۱۴٫۹۳۱ مقایسه کنید.

روابط بین توابع بسل. توابع بسل درکاربردهای مهندسی اهمیت دارند. مثالی دربخش ۱۰.۱۱ ارائه خواهد شد. هنگام به‌کار بردن این‌توابع لازم است بدانیم که این توابع در روابط مختلفی صدق می‌کنند. مرجع [B۱۸] کتابی استاندارد درمورد توابع بسل است ومرجع [A۵] از ضمیمهٔ ۱ فرمولهای بسیارزیادی را شامل می‌شود. بعضی روابط مهم درمسائل زیر آمده‌اند. فرمولهای (۲۲) و (۲۳) برای محاسبهٔ جداول مفیدند.

۷. با استفاده از (۱۲) و (۹) نشان دهید که

$$[x^{\nu}J_{\nu}(x)]' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,. \qquad (20)$$

با استفاده از (۱۲) نشان دهید که

$$[x^{-\nu}J_{\nu}(x)]' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,. \qquad (21)$$

۸. از (۲۰) و (۲۱) **رابطهٔ بازگشتی**

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x) \qquad (22)$$

را به‌دست آورید.

۹. از (۲۰) و (۲۱) **رابطهٔ بازگشتی** زیر را نتیجه بگیرید:

$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x)\,. \qquad (23)$$

۱۰. از (۲۰) و (۲۱) معادلهٔ بسل (۱) را به‌دست آورید.

۱۱. با استفاده از (۲۰) و (۲۱) و قضیهٔ رل، نشان دهیدکــه بین دو صفر متوالی $J_0(x)$ درست یك صفر $J_1(x)$ قرار دارد.

۱۲. نشان‌دهید که بین هردوصفرمثبت‌متوالی $J_n(x)$ درست یك صفر $J_{n+1}(x)$ قراردارد.

۱۳. بــا استفاده از جدول A۲ از ضمیمهٔ ۴ و رابطهٔ بازگشتی (۲۲)، مقدار $J_2(x)$ را به‌ازای مقادیر $x = 0\,,\ 0.1\,,\ 0.2\,,\ \ldots\,,\ 1$ محاسبه کنید.

انتگرالهایی راکه شامل توابع بسل هستند اغلب می‌توان با استفاده از روابط (۲۰) تا

(۲۳) محاسبه و یا حداقل ساده کرد. نشان دهید که

۱۴. $$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}J_{\nu}(x)+c$$

۱۵. $$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}J_{\nu}(x)+c$$

۱۶. $$\int J_{\nu+1}(x)\,dx=\int J_{\nu-1}(x)\,dx-2J_{\nu}(x)$$

با استفاده از فرمولهای مسائل ۱۴ تا ۱۶، درصورت لزوم با انتگرالگیری جزءبه‌جزء، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱۷. $\int J_{3}(x)\,dx$ **۱۸.** $\int J_{5}(x)\,dx$

۱۹. $\int x^{-2}J_{4}(x)\,dx$ **۲۰.** $\int x^{3}J_{0}(x)\,dx$

(در سایر موارد ممکن است محاسبات به‌انتگرال $J_0(x)$ منجر شوند، که به‌صورت متناهی‌قابل‌محاسبه نیست، اما به‌صورت جدول‌درآمده‌است: ر. ك. [مرجع B۱۸] ضمیمهٔ ۱.)

توابع مقدماتی. به ازای مقادیر معینی از ν می‌توان تابع بسل J_ν را برحسب کسینوس و سینوس بیان کرد:

۲۱. با استفاده از (۱۲) و رابطهٔ $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$، نشان دهید که

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,,\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,. \qquad (۲۴)$$

۲۲. با استفاده از (۲۲) و (۲۴)، نشان دهید که

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),\quad J_{-3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x}+\sin x\right).$$

۲۳. از (۲۲) و (۲۴) نتیجه بگیرید که توابع بسل $J_\nu(x)$ ازمرتبهٔ $\nu=\pm 1/2,\ \pm 3/2,\ \pm 5/2,\ \ldots$، توابع مقدماتی هستند.

۲۴. **(حذف مشتق اول)** معادلهٔ دیفرانسیل زیر را درنظر بگیرید:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = ٠ .$$

با قرار دادن $y(x) = u(x)v(x)$ مقدار v را طوری تعیین کنید که معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم حاصل شامل u' نباشد.

۲۵. نشان دهید که در مورد معادلهٔ بسل، در مسئلهٔ ۲۴ باید قرار دهیم $y = ux^{-۱/۲}$ و در این‌صورت نتیجه خواهیم گرفت

$$x^۲u'' + \left(x^۲ + \frac{۱}{۴} - \nu^۲ \right) u = ٠ . \qquad (۲۵)$$

بااستفاده ازاین‌نتیجه، جواب عمومی‌معادلهٔ‌دیفرانسیل(۱) رابه‌ازای $\nu = ۱/۲$ بیابید.

۶.۴ توابع بسل نوع دوم

به‌ازای‌عددصحیح $\nu = n$ توابع بسل $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابستهٔ خطی‌هستند (بخش ۵.۴)، پس پایه‌ای برای جوابها تشکیل نمی‌دهند. حال جواب مستقل دومی به‌دست می‌آوریم؛ از حالت $n = ٠$ آغاز می‌کنیم. دراین‌حالت معادلهٔ بسل را می‌توان چنین‌نوشت:

$$xy'' + y' + xy = ٠ , \qquad (۱)$$

معادلهٔ شاخصی دارای ریشهٔ مضاعف $r = ٠$ است و باتوجه به (۱۶) بخش ۴.۴ ملاحظه می‌کنیم که جواب مطلوب باید به‌شکل زیر باشد:

$$y_۲(x) = J_٠(x) \ln x + \sum_{m=۱}^{\infty} A_m x^m . \qquad (۲)$$

$y_۲$ و مشتقات آن یعنی

$$y_۲' = J_٠' \ln x + \frac{J_٠}{x} + \sum_{m=۱}^{\infty} mA_m x^{m-۱}$$

$$y_۲'' = J_٠'' \ln x + \frac{۲J_٠'}{x} - \frac{J_٠}{x^۲} + \sum_{m=۱}^{\infty} m(m-۱) A_m x^{m-۲}$$

را در(۱) قرارمی‌دهیم. بدین‌ترتیب جملات لگاریتمی حذف می‌شوند چراکه $J_٠$ جوابی از معادلهٔ (۱) است، همین‌طور دو جملهٔ دیگری کـه شامل $J_٠$ هستند حذف می‌شوند و به‌دست می‌آوریم

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0 .$$

از (۱۲) بخش ۵.۴ سری توانی J_0' به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m\, x^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!\,(m-1)!} .$$

با جایگزین کردن این سری داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!\,(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0 .$$

نخست نشان می‌دهیم که A_m های با اندیس فرد صفرند. ضریب x^0 برابر A_1 است و بنابراین $A_1 = 0$. با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب x^{2s} داریم

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0 , \qquad s = 1 , 2 , \ldots .$$

بنابراین چون $A_1 = 0$، متوالیاً به دست می‌آوریم $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، ... حال مجموع ضرایب x^{2s+1} را مساوی صفر قرار می‌دهیم. به‌ازای $s = 0$ نتیجه می‌شود

$$-1 + 4A_2 = 0 \quad \text{یا} \quad A_2 = 1/4 .$$

به‌ازای سایر مقادیر s به‌دست می‌آوریم

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!\,s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0 \qquad (s = 1 , 2 , \ldots) .$$

از این رابطه به‌ازای $s = 1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \quad \text{یا} \quad A_4 = -\frac{3}{128}$$

ودرحالت کلی

$$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \quad m = 1 , 2 , \ldots . \tag{۳}$$

با استفاده از نماد خلاصهٔ

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \tag{۴}$$

وبا قرار دادن (۳) و $A_1 = A_3 = \ldots = 0$ در (۲)، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \tag{۵}$$
$$= J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + - \ldots$$

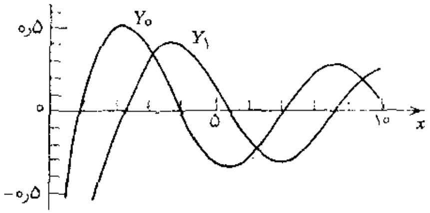
چون توابع J_0 و y_2 مستقل‌خطی هستند، پایه‌ای برای (۱) تشکیل می‌دهند. البته هرگاه به جای y_2 جواب خصوصی مستقلی به صورت $a(y_2 + bJ_0)$، که در آن a , $b(\neq 0)$ ثابتند، را قرار دهیم پایهٔ دیگری به دست می‌آید. مرسوم است که $a = 2/\pi$ و $b = \gamma - \ln 2$ انتخاب کنند که $\gamma = 0.57721566490\ldots$ به ثابت **اویلر** معروف است و به‌صورت حد

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s$$

وقتی که s به‌سمت بینهایت میل کند تعریف می‌شود. جواب خصوصی استانداردی که به‌این ترتیب حاصل می‌شود به **تابع بسل نوع دوم** مرتبهٔ صفر (شکل ۷۷) یا **تابع نویمان** مرتبهٔ صفر معروف است و آن را با $Y_0(x)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right], \tag{۶}$$

که درآن h_m توسط (۴) تعریف شده است.



شکل۷۷. توابع بسل نوع دوم

(جدول کوچکی متناظر با این شکل درضمیمهٔ ۴ گنجانده شده است.)

هرگاه $\nu = n = 1, 2, \ldots$ ، جواب دوم را می‌توان بـا عملیات مشابهی ،

با شروع از تابع (۱۹) بخش ۴.۴ به دست آورد. در این موارد نیز جوابها شامل یك جملهٔ لگاریتمی هستند.

وضع هنوز کاملا رضایت‌بخش نیست، زیرا جواب‌دوم، بسته به‌اینکه مرتبهٔ ν عددی صحیح باشد یا نه ، به‌صورتهای متفاوتی تعریف شده است. برای یکنواخت کردن شکل روابط وجداول عددی بهتر است شکلی از جواب دوم را بپذیریم که به‌ازای تمام مقادیر مرتبه برقرار باشد. بدین جهت جواب دوم استاندارد $Y_\nu(x)$ را معرفی می‌کنیم که به ازای جمیع مقادیر ν با فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos \nu\pi-J_{-\nu}(x)\right] \qquad \text{(الف)}$$

(۷)

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) \qquad \text{(ب)}$$

این تابع معروف به **تابع بسل نوع دوم** مرتبهٔ ν یا **تابع نویمان**[1] مرتبهٔ ν است.

به ازای مرتبهٔ غیر صحیح ν ، بدیهی است که تابع $Y_\nu(x)$ جوابی از معادلهٔ بسل است زیرا $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ جوابهای معادله هستند. از طرفی چون به ازای νهایی J_ν و $J_{-\nu}$ استقلال خطی دارند و Y_ν شامل $J_{-\nu}$ است، توابع J_ν و Y_ν نیزمستقل خطی هستند. بـه علاوه می‌توان نشان داد که حد (۷ ب) موجود است و Y_n جوابی از معادلهٔ بسل به ازای مرتبهٔ صحیح است ؛ به‌مرجع [B۱۸] ضمیمهٔ ۱ مراجعه شود. خواهیم دید کـه بسط سری $Y_n(x)$ شامل یك جملهٔ لگاریتمی است. از این‌رو $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ بسل هستند. بسط سری $Y_n(x)$ را می‌توان با قرار دادن سریهای (۱۲) و (۱۴)، بخش ۵.۴، به‌جای $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ در (۷ الف) ومیل دادن ν به سمت n ، به دست آورد ؛ جزئیات را می‌توانید در مرجع [B۱۸] ملاحظه کنید ؛ نتیجه عبارت است از

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!\,(m+n)!}x^{2m}$$

(۸)

$$-\frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}$$

که درآن $x>0$ ، و، $n=0, 1, \ldots$ ، و

---

[1] ۱. کارل نویمان (Carl Neumann) ، ۱۹۲۵–۱۸۳۲ ، ریاضیدان وفیزیکدان آلمانی، گاهی جوابهای $Y_\nu(x)$ را با $N_\nu(x)$ نمایش می‌دهند؛ درمرجع [B۱۸] از این توابع بـا عنوان توابع وبر (Weber) نام برده شده است . ثابت اویلر در (۶) را اغلب با C یا $\ln\gamma$ (به جای γ) نمایش می‌دهند.

$$h_{\circ}=\circ\,, \qquad h_s=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{s} \qquad (s=۱\,,۲\,,\cdots)\,,$$

هنگامی که $n=\circ$ دومین جمعبندی در (۸) برابر صفر می‌شود. به‌ازای $n=\circ$، نمایش (۸) به‌شکل (۶) در می‌آید. به‌علاوه می‌توان نشان داد که

$$Y_{-n}(x)=(-۱)^n Y_n(x)\,.$$

نتیجهٔ فوق را می‌توان به‌شرح زیر فرمولبندی کرد.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی)

جواب عمومی معادلهٔ بسل به‌ازای هرمقدار ν عبارت است از

$$y(x)=C_۱ J_\nu(x)+C_۲ Y_\nu(x)\,. \qquad (۹)$$

درپایان متذکرمی‌شویم که جوابهایی ازمعادلهٔ بسل، که به‌ازای مقادیرحقیقی x مختلط هستند، درعمل مورد احتیاج هستند. بدین جهت جوابهای

$$\begin{aligned} H_\nu^{(۱)}(x)&=J_\nu(x)+iY_\nu(x)\\ H_\nu^{(۲)}(x)&=J_\nu(x)-iY_\nu(x) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

مکرر به‌کارمی‌روند وبرای آنها جداولی نیز تنظیم شده است (ر.ك. مرجع[A۶] ضمیمهٔ ۱). این توابع مستقل خطی **توابع بسل نوع سوم** مرتبهٔ ν یا **توابع هانکل**[۱] اول و دوم مرتبهٔ ν نامیده می‌شوند.

مسائل بخش ۶.۴

۱. نشان دهید که به‌ازای مقادیر کوچك $x>\circ$ داریم $Y_{\circ}(x)\approx ۲\pi^{-۱}(\ln x/۲+\gamma)$. با استفاده از این فرمول، مقدار تقریبی کوچکترین صفر مثبت $Y_{\circ}(x)$ را محاسبه و آن را با مقدار دقیقتر ۹ر۰ مقایسه کنید.

۲. می‌توان نشان داد که به‌ازای x های بزرگ،

$$Y_n(x)\approx\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{۱}{۲}n\pi-\frac{۱}{۴}\pi\right)\,. \qquad (۱۱)$$

با استفاده از (۱۱) و جدول A۲ ضمیمهٔ ۴ نمودارهای $Y_{\circ}(x)$ و $Y_۱(x)$ را

---

۱. هرمان هانکل (Hermann Hankel) ، ۱۸۷۳–۱۸۳۹، ریاضیدان آلمانی.

به‌ازای $0 < x \leqslant 15$ رسم کنید. با استفاده از (۱۱)، مقادیر تقریبی اولین سه صفر مثبت $Y_0(x)$ را محاسبه کنید و این مقادیر را با مقادیر دقیقتر ۰٫۸۹، ۳٫۹۶ و ۷٫۰۹ مقایسه کنید.

معادلات دیفرانسیل قابل تحویل به‌معادلهٔ بسل. معادلات دیفرانسیل مختلفی وجوددارند که می‌توان آنها را به‌معادلهٔ بسل تبدیل کرد. برای روشن شدن این مطلب، با استفاده از جایگذاریهای ذکر شده، جواب عمومی معادلات داده شده را برحسب توابع بسل بیابید.

۳. $x^2y''+xy'+(x^2-4)\,y=0$

۴. $xy''+y'+xy=0$

۵. $xy''+y'+\frac{1}{4}y=0 \quad (\sqrt{x}=z)$

۶. $4x^2y''+4xy'+(x-n^2)\,y=0 \quad (\sqrt{x}=z)$

۷. $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-n^2)\,y=0 \quad (\lambda x=z)$

۸. $x^2y''+xy'+4(x^4-n^2)\,y=0 \quad (x^2=z)$

۹. $xy''-y'+xy=0 \quad (y=xu)$

۱۰. $xy''+(1+2n)\,y'+xy=0 \quad (y=x^{-n}u)$

۱۱. $x^2y''+(1-2n)\,xy'+n^2(x^{2n}+1-n^2)\,y=0 \quad (y=x^nu\,,\ x^n=z)$

۱۲. $x^2y''+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y=0 \quad (y=u\sqrt{x})$

۱۳. $y''+xy=0 \quad (y=u\sqrt{x}\ ,\ \frac{2}{3}x^{3/2}=z)$

نشان دهید که توابع داده شده جوابهای معادلات دیفرانسیل متناظر هستند.

۱۴. $y''+k^2xy=0\ ,\ y=\sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2kx^{3/2}}{3}\right)\ ,\ y=\sqrt{x}Y_{1/3}(2kx^{3/2}/3)$

۱۵. $y''+k^2x^2y=0\ ,\ y=\sqrt{x}J_{1/4}\left(\frac{kx^2}{2}\right)\ ,\ y=\sqrt{x}Y_{1/4}\left(\frac{kx^2}{2}\right)$

۱۶. $y''+k^2x^4y=0\ ,\ y=\sqrt{x}J_{1/6}\left(\frac{kx^3}{3}\right)\ ,\ y=\sqrt{x}Y_{1/6}\left(\frac{kx^3}{3}\right)$

۱۷. **(توابع بسل پیراسته)** تابع $I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)$، $i=\sqrt{-1}$ را تابع بسل‌پیراستهٔ نوع اول مرتبهٔ ν می‌خوانند. نشان دهید که $I_\nu(x)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)\,y=0 \qquad (12)$$

است ونمایشی به‌صورت زیر دارد:

$$I_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\,. \qquad (13)$$

۱۸. نشان دهید که $I_\nu(x)$ به‌ازای هرمقدارحقیقی x (وهرمقدارحقیقی ν) حقیقی است و به ازای هرمقدارحقیقی x که مخالف صفر باشد داریم $I_\nu(x)\neq 0$ و $I_{-n}(x)=I_n(x)$ که n عددی صحیح است.

۱۹. **(توابع بسل پیراسته)** نشان دهید که جواب دیگری از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲) که اصطلاحاً تابع‌بسل پیراستهٔ نوع سوم و گاهی(نوع دوم)نامیده می‌شودبه‌شکل زیراست:

$$k_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\right]. \qquad (14)$$

۲۰. نشان دهید که توابع هانکل (۱۰) به ازای هر ν پایه‌ای برای جوابهای معادلهٔ بسل تشکیل می‌دهند.

۷.۴ مجموعه‌های متعامد توابع

چندجمله‌ایهای لژاندر (بخش۳.۴) وتوابع بسل ازخاصیتی موسوم به **تعامد** برخوردارند که این خاصیت در ریاضیات مهندسی اهمیتی عمومی دارد. در بخش حاضر مفاهیم و نمادهای مربوط به‌این خاصیت را معرفی می‌کنیم. دربخش ۸.۴ به‌بررسی مسائل بامقدار مرزی («مسائل‌استورم-لیوویل») که جوابهای آنهامجموعه‌های متعامدی ازتوابع‌راتشکیل می‌دهند می‌پردازیم ودربخش ۹.۴ نتایج بخش ۸.۴ را در مورد چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل به‌کار خواهیم برد. این برنامهٔ‌کار ما دربقیهٔ این فصل است.

بنابراین نخست تعامد توابع را تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g_m(x)$ و $g_n(x)$ دو تابع با مقادیر حقیقی باشند که برفاصله‌ای مانند $a\leqslant x\leqslant b$ تعریف شده‌اند وطوری هستند که انتگرال حاصل‌ضرب $g_m(x)\,g_n(x)$ دراین فاصله موجود است. این انتگرال را با $(g_m$ و $g_n)$ نمایش می‌دهیم. این نمادی است متعارف و ساده که بسیارمورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین

$$(g_m\,,\,g_n)=\int_a^b g_m(x)\,g_n(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

توابع g_m و g_n را در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ **متعامد** گویند هرگاه انتگرال (۱) برابر صفر باشند، یعنی

$$(g_m , g_n)=\int_a^b g_m(x)\, g_n(x)\, dx=0 \qquad (m \neq n) \cdot \tag{۲}$$

مجموعه‌ای از توابع با مقدار حقیقی $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، ... را **مجموعه‌ای متعامد** از توابع بر فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ نامند هرگاه این توابع بر فاصلهٔ مزبور تعریف شده و همهٔ انتگرالهای (g_m , g_n) به‌ازای هر زوج متمایز از این مجموعه توابع، موجود و برابر صفر باشد.

ریشهٔ دوم نامنفی $(g_m ، g_m)$ را **نرم** $g_m(x)$ می‌نامند و عموماً با $\|g_m\|$ نشان می‌دهند؛ بنابراین

$$\|g_m\|=\sqrt{(g_m , g_m)}=\sqrt{\int_a^b g_m^2(x)\, dx} \cdot \tag{۳}$$

در آنچه مطرح می‌شود همواره فرض بر این‌است که

فرض کلی

همهٔ توابع مورد بحث کراندارند و طوری هستند که همهٔ انتگرالها موجودند ونرمی مخالف صفر دارند.

بدیهی است که مجموعهٔ متعامدی مانند g_1 ، g_2 ، ... که بر فاصله‌ای مانند $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف شده است واعضای آن نرمی برابر ۱ دارند در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(g_m , g_n)=\int_a^b g_m(x)\, g_n(x)\, dx=\begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} m=1 , 2 , \cdots \\ n=1 , 2 , \cdots \end{pmatrix} \tag{۴}$$

چنین مجموعه‌ای را **یك مجموعهٔ متعامدیکه** از توابع در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ می‌نامند.

واضح است که دریك مجموعه از توابع متعامد می‌توان از تقسیم هرتابع برنرمش به‌یك مجموعهٔ متعامدیکه در فاصلهٔ مورد نظر رسید.

مثال ۱

توابع $g_m(x)=\sin mx$ که در آن $m=1 , 2 , \ldots$ بر فاصلهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند، زیرا [د. ك. (۱۱) ضمیمهٔ ۳]

$$(g_m, g_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$$

(۵) $$=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx-\frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx=۰ \qquad (m\neq n).$$

نرم $\|g_m\|$ برابر $\sqrt{\pi}$ است، زیرا

$$\|g_m\|^۲=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^۲ mx\,dx=\pi \qquad (m=۱, ۲, \ldots).$$

از این‌رو مجموعهٔ متعامدیکه متناظر با توابع متعامد فوق عبارت است از

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin ۲x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin ۳x}{\sqrt{\pi}},\ldots$$

مثال ۲

توابع

$$۱,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos ۲x,\quad \sin ۲x,\quad \ldots$$

برفاصلهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ مجموعه‌ای‌متعامدتشکیل‌می‌دهند. این مطلب ازرابطه‌ای مشابه با (۵) در مورد توابع کسینوسی، ورابطهٔ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx-\frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx=۰$$

به‌ازای جمیع مقادیر $m, n=۰, ۱, \ldots$ نتیجه می‌شود. مجموعهٔ متعامد یکهٔ متناظر عبارت است از

$$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos ۲x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin ۲x}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots$$ ▲

به کمك مجموعه‌های متعامد می‌توان انواع مهمی از بسط سریها را با روشی نسبتاً ساده به‌دست آورد. درواقع، فرض می‌کنیم $g_۱(x)$، $g_۲(x)$، ... مجموعه‌ای متعامد از توابع برفاصله‌ای مانند $a\leqslant x\leqslant b$ باشد وفرض می‌کنیم که $f(x)$ تابع‌مفروضی باشدکه بتوان آن را برحسب g_i ها به‌صورت سری همگرای

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n g_n(x)=c_1 g_1(x)+c_2 g_2(x)+\cdots \qquad (6)$$

نمایش داد. این‌سری را **سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ** $f(x)$ می‌نامند و ضرایب آن، یعنی c_1، c_2، ... را **ثابتهای فوریهٔ** $f(x)$ نسبت به‌مجموعهٔ متعامد مزبور از توابع می‌گویند.

با توجه به‌خاصیت تعامد، این ثابتها را می‌توان با روشی بسیار ساده تعیین کرد. در حقیقت بـا ضرب طرفین (۶) در $g_m(x)$ (بـا m مشخص) و انتگرالگیری روی فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ و با فرض اینکه انتگرالگیری جمله‌به‌جمله مجاز باشد[1]، داریم

$$(f,\ g_m)=\int_a^b f g_m\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,(g_n,\ g_m)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_a^b g_n g_m\,dx.$$

انتگرالی کـه در آن $n=m$، برابر بـا $(g_m,\ g_m)=\|g_m\|^2$ است، حال آنکه سایر انتگرالهای سمت راست تساوی، به‌دلیل تعامد توابع، برابر صفرند. از این‌رو

$$(f,\ g_m)=c_m\|g_m\|^2, \qquad (7')$$

و فرمول مطلوب برای ثابتهای فوریه عبارت است از

$$c_m=\frac{(f,\ g_m)}{\|g_m\|^2}=\frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b f(x)g_m(x)\,dx \quad (m=1,\ 2,\ \cdots). \qquad (7)$$

مثال ۳. سری فوریه

درمورد مجموعهٔ متعامد مثال ۲، نمایش (۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (8)$$

و (۷) چنین می‌شود:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (9)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

---

۱. این عمل، مثلاً درمورد همگرایی‌یکنواخت (ر.ک. قضیهٔ ۳ بخش۶.۱۶) قابل توجیه است.

اگر سری مذکور در (۸) همگرا و نمایش‌دهندهٔ $f(x)$ باشد آن را **سری فوریهٔ** $f(x)$ نامند. ضرایب این سری را **ضرایب فوریهٔ** $f(x)$ و فرمولهای (۹) را **فرمولهای اویلر** مربوط به این‌ضرایب می‌نامند. نظر به اینکه سریهای فوریه در ریاضیات مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارند، تمامی یك فصل (فصل ۱۰) را بـه‌این سریها اختصاص داده‌ایم و برخی کاربردهای اساسی آنها را درارتباط با معادلات با مشتقی جزئی در فصل ۱۱ آورده‌ایم.

بـرخی مجموعه‌های مهم از توابع حقیقی g_1 ، g_2 ، ... کـه درکاربردها ظاهر می‌شوندمتعامدنیستند ولی‌دارای‌این‌خاصیت هستندکه‌به‌ازای بعضی‌ازتوابع نامنفی $p(x)$،

$$\int_a^b p(x)g_m(x)g_n(x)\,dx=0 \qquad m\neq n. \tag{۱۰}$$

چنین مجموعه‌ای را بر فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ نسبت بـه **تابع وزن** $p(x)$ متعامد گویند.
حال نرم g_m را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|g_m\|=\sqrt{\int_a^b p(x)g_m^2(x)\,dx} \tag{۱۱}$$

و چنانچه نرم هریك از توابع g_m برابر ۱ باشد، مجموعه را بـر آن فاصله نسبت بـه $p(x)$ متعامد یکه گوییم.

اگر فرض کنیم $h_m=\sqrt{p}\,g_m$ ، آنگاه (۱۰) چنین می‌شود:

$$\int_a^b h_m(x)h_n(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n),$$

یعنی، توابع h_m به‌مفهوم عادی کلمه، مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. چند مثال مهم در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می گیرند.

هرگاه $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، ... در فاصله‌ای مانند $a\leqslant x\leqslant b$ نسبت به‌تابع وزن p مجموعه‌ای متعامد باشد و اگر تابع مفروض $f(x)$ را بتوان بـا **سری فوریهٔ تعمیم یافته** [ر. ك. (۶)]

$$f(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+\cdots, \tag{۱۲}$$

نمایش داد، آنگاه می‌توان ثابتهای فوریهٔ c_1 ، c_2 ، ... تابع $f(x)$ نسبت به مجموعهٔ متعامد مزبور را، مانند قبل، تعیین کرد؛ تنها با این‌تفاوت که قبل از انتگرالگیری سری باید در pg_m (به‌جای g_m) ضرب شود. سایر مراحل مانند قبل است و درنتیجه

$$c_m=\frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b p(x)\,f(x)\,g_m(x)\,dx \quad (m=1,2,\cdots), \tag{۱۳}$$

که در آن، نرم با (۱۱) تعریف شده است.

مسائل بخش ۷.۴

در هر یك از تمرینهای زیر نشان دهیدکه مجموعهٔ دادهشده در فاصلهٔ مفروض I متعامد است و مجموعهٔ متعامد یکهٔ متناظر با هر مجموعه را تعیین کنید.

۱. $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \quad I: 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

۲. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \quad I: 0 \leqslant x \leqslant \pi$

۳. $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots, \quad I: -1 \leqslant x \leqslant 1$

۴. $1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, \cdots, \quad I: 0 \leqslant x \leqslant \pi$

۵. $1, \cos \frac{2n\pi}{T} x \, (n=1, 2, \cdots), \quad I: 0 \leqslant x \leqslant T$

۶. $\sin \frac{2n\pi}{T} x \, (n=1, 2, \cdots), \quad I: -\frac{T}{2} \leqslant x \leqslant \frac{T}{2}$

۷. (ر. ك. بخش ۳.۴) $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \quad I: -1 \leqslant x \leqslant 1$

۸. ثابتهای a_0 ، b_0 ، . . . ، c_2 را طوری معین کنیدکه توابع $g_1 = a_0$ ، $g_2 = b_0 + b_1 x$ ، $g_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ بر فاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ مجموعهٔ متعامد یکهای را تشکیل دهند. نتیجه را با نتیجهٔ مسئلهٔ ۷ مقایسه کنید.

۹. نشان دهید که هر گاه توابع $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، . . . برفاصله $a \leqslant x \leqslant b$ مجموعهای متعامد تشکیل دهند ، آنگاه توابع $g_1(ct+k)$ ، $g_2(ct+k)$ ، . . . ، $c > 0$ بر فاصلهٔ $(a-k)/c \leqslant t \leqslant (b-k)/c$ مجموعهای متعامد تشکیل میدهند.

۱۰. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۹ و با استناد به مسئلهٔ ۱، نشان دهید که مجموعهٔ مذکور درمسئلهٔ ۵ دارای خاصیت تعامد است.

۸.۴ مسئلهٔ استورم-لیوویل

درریاضیات مهندسی، مجموعههای مختلف و با اهمیتی از توابع متعامد مطرح میشوند که درفاصلهٔ مفروض $a \leqslant x \leqslant b$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]\, y = 0 \qquad (1)$$

هستند ودرشرایط زیر صدق میکنند :

$$k_1 y(a)+k_2 y'(a)=0 \quad \text{(الف)} \quad (k_1 \text{ و } k_2 \text{ هردو با هم صفر نیستند})$$
$$l_1 y(b)+l_2 y'(b)=0 \quad \text{(ب)} \quad (l_1 \text{ و } l_2 \text{ هردو با هم صفر نیستند}) \qquad (۲)$$

دراینجا λ یك پارامتر است و k_1 ، k_2 ، l_1 ، l_2 ثابتهای حقیقی داده شده‌ای هستند.

درارتباط با (۱) و (۲) اصطلاحات زیر را به‌کار می‌برند: معادلهٔ (۱) را **معادلهٔ استورم-لیوویل**[1] می‌نامند. چنانچه خواهیم دید معادلات بسل، لژاندر و چند معادلهٔ دیگر را می‌توان به‌شکل (۱) نوشت. شرایط (۲) را **شرایط مرزی** می‌نامند چراکه این‌شرایط به‌نقاط انتهایی فاصله (نقاط مرزی) $x=a$ و $x=b$ مربوط می‌شوند. یك‌معادلهٔ‌دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی را **مسئلهٔ با مقدار مرزی** می‌نامند. مسئلهٔ با مقدار مرزی (۱) و (۲)، مذکور دربالا، به **مسئلهٔ استورم-لیوویل** موسوم است.

از (۱) و (۲) مستقیماً نتیجه می گیریم که به‌ازای هر عدد λ، مسئله دارای جواب بدیهی $y\equiv 0$ است، یعنی به‌ازای‌هر x درفاصلهٔ مزبور $y(x)=0$. جوابهای $y\equiv 0$ -درصورت وجود- توابع مشخصه یا **توابع ویژهٔ** مسئله نامیده می‌شوند، و مقادیری از λ که به‌ازای آنها چنین جوابهایی وجود دارند مقادیر مشخصه یا **مقادیر ویژهٔ** مسئله نامیده می‌شوند.

مثال ۱

مقادیر ویژهٔ توابع ویژهٔ مسئلهٔ استورم- لیوویل زیر را بیابید:

$$\text{(الف)} \quad y''+\lambda y=0 \qquad \text{(ب)} \quad y(0)=0\,,\ y(\pi)=0 \qquad (۳)$$

به‌ازای مقدار منفی $\lambda=-\nu^2$ جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1 e^{\nu x}+c_2 e^{-\nu x}.$$

از (۳ب) به‌دست می‌آوریم $c_1=c_2=0$ و $y\equiv 0$ که تابع ویژه نیست. به‌ازای $\lambda=0$ وضعیت به‌همین‌منوال‌است. به‌ازای‌مقدارمثبت $\lambda=\nu^2$ جواب‌عمومی‌معادله عبارت است از

$$y(x)=A\cos \nu x+\mathrm{B}\sin \nu x.$$

با توجه به‌اولین شرط مرزی به‌دست می‌آوریم $y(0)=A=0$. دومین شرط مرزی نتیجه می‌دهد

---

[1] ۱. ژاك‌شارل فرانسوا استورم (Jacques Charles Francois Sturm)، ۱۸۵۵-۱۷۰۳، ریاضیدان سویسی. ژوزف لیوویل (Joseph Liouville)، ۱۸۸۲-۱۸۰۹، ریاضیدان فرانسوی، که به‌خاطر کارهای تحقیقاتی مهمش در آنالیز مختلط مشهور است.

$$y(\pi)=B\sin\nu\pi=0 \quad \text{یا} \quad \nu=0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \ldots$$

به‌ازای $\nu=0$ داریم $y\equiv 0$. به ازای $\lambda=\nu^2=1\,,\,4\,,\,16\,,\,\ldots$، با فرض $B=1$، به‌دست می‌آوریم

$$\nu=1\,,\,2\,,\,\cdots \qquad y(x)=\sin\nu x$$

ازاین‌رو مقادیر ویژهٔ مسئله عبارتند از $\lambda=\nu^2$ که در آن $\nu=1\,,\,2\,,\,\ldots$، توابع ویژه متناظر عبارتند از $y(x)=\sin\nu x$ که در آن $\nu=1\,,\,2\,,\,\ldots$. ▲

می‌توان نشان داد که اگر شرایط کلیتری روی توابع p، q، و r در (۱) گذاشته شود معادلهٔ استورم-لیوویل (۱) و (۲) دارای تعدادی نامتناهی مقدار ویژه خواهد شد؛ نظریهٔ نسبتاً پیچیدهٔ مربوطه را در مرجع [B11] ضمیمهٔ ۱ می‌توان یافت.

به‌علاوه توابع مسئلهٔ استورم-لیوویل دارای خاصیت تعامد زیر است.

قضیهٔ ۱ (تعامدتوابع ویژه)

فرض می‌کنیم توابع p، q، r و r' که درمعادلهٔاستورم-لیوویل (۱) واردشده‌اند، برفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته ودارای مقدارحقیقی باشند. فرض‌می‌کنیم $y_m(x)$ و $y_n(x)$ توابع ویژه‌ای از مسئلهٔ استورم-لیوویل (۱) و (۲) باشند که به‌ترتیب با مقادیر ویژهٔ متمایز λ_m و λ_n متناظر هستند، در این‌صورت y_m و y_n درفاصلهٔ مزبور نسبت به‌تابع وزن p متعامدند.

هرگاه $r(a)=0$، آنگاه (۲ الف) را می‌توان از صورت مسئله حذف کرد. هرگاه $r(b)=0$، آنگاه (۲ ب) را می‌توان حذف کرد. هرگاه $r(a)=r(b)$، آنگاه به‌جای شرط (۲) می‌توان شرط زیر را گذاشت:

$$y(a)=y(b)\,, \qquad y'(a)=y'(b)\,. \tag{۴}$$

اثبات. بنا به‌فرض، y_m در معادلهٔ

$$(ry_m')'+(q+\lambda_m p)\,y_m=0\,,$$

صدق می‌کند و y_n در

$$(ry_n')'(q+\lambda_n p)\,y_n=0\,.$$

با ضرب معادلهٔ اول در y_n و ضرب معادلهٔ دوم در $-y_m$ و جمع کردن حاصل‌ضربها به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}(\lambda_m-\lambda_n)\,Py_my_n&=y_m(ry_n')'-y_n(ry_m')'\\&=[(ry_n')\,y_m-(ry_m')\,y_n]'\end{aligned}$$

درستی تساوی آخر را به‌سادگی می‌توان با مشتقگیری از آخرین عبارت تحقیق کرد. این عبارت پیوسته است، چراکه بنا به‌فرض r و r' پیوسته‌اند و y_m و y_n جوابهای معادلهٔ (۱) هستند. بنابراین با انتگرالگیری نسبت به x از a تا b به‌دست می‌آوریم

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b p y_m y_n\,dx=\Big[r\,(y_n' y_m-y_m' y_n)\Big]_a^b. \qquad (۵)$$

عبارت طرف راست برابر است با

$$\begin{aligned} &r(b)\,[y_n'(b)\,y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)]\\ &-r(a)\,[y_n'(a)\,y_m(a)-y_m'(a)y_n(a)]. \end{aligned} \qquad (۶)$$

حالت ۱. هرگاه $r(a)=0$ و $r(b)=0$، آنگاه عبارت (۶) برابر صفر است. ازاین‌رو عبارت طرف چپ نیز باید برابر صفر باشد وچون λ_m و λ_n متمایز هستند، بدون استفاده از شرایط مرزی (۲)، تعامد مطلوب را نشان می‌دهیم:

$$\int_a^b p(x)\,y_m(x)\,y_n(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n). \qquad (۷)$$

حالت ۲. فرض کنیم $r(b)=0$ ولی $r(a)\neq 0$ آنگاه سطر اول (۶) صفراست. عبارت باقیماندهٔ (۶) را در نظر می گیریم. با توجه به (۲ الف) داریم

$$k_1 y_n(a)+k_2 y_n'(a)=0\,,$$
$$k_1 y_m(a)+k_2 y_m'(a)=0\,.$$

فرض کنیم $k_2\neq 0$. آنگاه با ضرب معادلهٔ اول در $y_m(a)$ و ضرب معادلهٔ دوم در $-y_n(a)$ و جمع کردن حاصل‌ضربها داریم

$$k_2\,[y_n'(a)\,y_m(a)-y_m'(a)\,y_n(a)]=0\,.$$

چون $k_2\neq 0$، عبارت داخل کروشه باید صفرباشد. این‌عبارت با دومین‌سطر (۶) متحد است. ازاین‌رو (۶) برابر صفر است و از (۵) تساوی (۷) را به‌دست می‌آوریم. هرگاه $k_2=0$، آنگاه بنابه‌فرض $k_1\neq 0$، و بیان اثبات مثل بالا است.

حالت ۳. هرگاه $r(a)=0$ ولی $r(b)\neq 0$، اثبات شبیه حالت۲ است با این تفاوت که در اینجا به‌جای شرط (۲ الف) شرط (۲ ب) را داریم.

حالت ۴. هرگاه $r(a)\neq 0$ و $r(b)\neq 0$ آنگاه باید هردوشرط مرزی (۲) را به‌کاربریم و مانند حالتهای ۲ و ۳ عمل کنیم.

حالت ۵. هرگاه $r(a)=r(b)$. آنگاه (۶) به‌صورت‌زیر در می‌آید:

$$r(b)\,[y_n'(b)y_m(b)-y_m'(b)y_n(b)-y_n'(a)\,y_m(a)+y_m'(a)\,y_n(a)].$$

مانند قبل می‌توانیم از (۲) استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که عبارت داخل کروشه برابر صفر است. مع‌هذا، به‌آسانی دیده می‌شود که می‌توان این نتیجه را از (۴) نیز به‌دست

آورد، بنابراین، می‌توان (۲) را با (۴) تعویض کرد. پس، مانند قبل، (۷) از (۵) نتیجه می‌شود. دراینجا اثبات قضیهٔ ۱ به‌اتمام می‌رسد.

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل مثال ۱ به‌صورت (۱) است که درآن $r=۱$ ، $q=۰$ و $p=۱$. از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که برفاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant \pi$ توابع ویژه متعامد هستند.

مثال ۳. سری فوریه

می‌توان نشان داد که توابع

$$۱\,,\ \cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos ۲x\,,\ \sin ۲x\,,\ \cdots$$

که درسری فوریهٔ مثال ۳ ، بخش ۷.۴، آمده‌اند، توابع ویژهٔ مسئلهٔ استورم ـ لیوویل زیر هستند:

$$y''+\lambda y=۰\,,\ \ y(\pi)=y(-\pi)\,,\ \ y'(\pi)=y'(-\pi)\,.$$

ازاین‌رو با توجه به‌قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که این توابع بر فاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. توجه کنید که شرایط مرزی این مسئله به‌صورت (۴) هستند.

دربخش بعد مثالهای بیشتری ارائه خواهد شد. ▲

سری‌فوریهٔ تعمیم یافته‌ای (ر. ك. بخش۷.۴) را که درآن‌مجموعهٔ متعامدمجموعه‌ای از توابع ویژه است، **بسط تابع ویژه‌ای** می‌نامند.

مقادیر ویژهٔ مسائل استورم ـ لیوویل دارای خاصیت جالب زیر هستند.

قضیهٔ ۲ (مقادیر ویژهٔ حقیقی)

چنانچه مسئلهٔ استورم ـ لیوویل (۱) ، (۲) در شرایطی‌که درقضیهٔ ۱ بیان شد صدق‌کند و p در تمام فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ مثبت باشد (یا همه‌جای آن فاصله منفی باشد) آنگاه مقادیرویژهٔ مسئله همگی حقیقی هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم $\lambda=\alpha+i\beta$ یکی از مقادیر ویژهٔ مسئله باشد وفرض می‌کنیم

$$y(x)=u(x)+iv(x)$$

تابع ویژهٔ متناظر با λ باشد؛ دراینجا α ، β ، u و v حقیقی هستند. با قرار دادن‌این‌مقدار درمعادلهٔ (۱) داریم

$$(ru'+irv)'+(q+\alpha p+i\beta P)(u+iv)=۰\,.$$

این معادلهٔ مختلط با دومعادلهٔ زیر که مربوط به‌قسمتهای حقیقی وموهومی معادلهٔ فوق‌هستند، معادل است :

$$(r u')' + (q + \alpha p) u - \beta p v = 0 ,$$
$$(r v')' + (q + \alpha p) v + \beta p u = 0 .$$

با ضرب معادله اول در v ومعادله دوم در $-u$ و جمع کردن آنها به‌دست می‌آوریم

$$-\beta (u^2 + v^2)\, p = u (r v')' - v (r u')'$$
$$= [\,(r v') u - (r u') v\,]' .$$

با انتگرالگیری نسبت به x از a تا b به‌دست می‌آید

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)\, p\, dx = \Big[\, r (u v' - u' v) \,\Big]_a^b .$$

از شرایط مرزی نتیجه می‌شود که عبارت سمت راست صفراست؛ این موضوع راباروشی شبیه به‌آنچه دراثبات قضیهٔ ۱ مورد استفاده قرارگرفت می‌توان نشان داد. چون y یکی از توابع ویژه است؛ $u^2 + v^2 \not\equiv 0$. چون y و p پیوسته هستند و به‌ازای همهٔ x ها بین a و b داریم $p > 0$ (یا $p < 0$)، بنابراین انتگرال سمت چپ صفر نیست. پس $\beta = 0$، یعنی $\lambda = \alpha$ حقیقی است واثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

قضیهٔ ۲. با مثالهای ۲ و ۳ تشریح شده مثالهای بیشتر در بخش بعد و در مجموعه مسائل مربوطه آمده است.

مسائل بخش ۸.۴

۱. قضیهٔ ۱ را برای مسئلهٔ خاص استورم ـ لیوویل مثال ۱ ثابت کنید.

۲. اثبات قضیهٔ ۱ را درحالات ۳ و ۴ به‌تفصیل ارائه کنید.

۳. نشان دهید که هرگاه $y = y_0$ تابع ویژه‌ای از (۱) ، (۲) که متناظر با مقدارویژه‌ای مانند $\lambda = \lambda_0$ است باشد ، آنگاه $y = \alpha y_0$ ($\alpha \neq 0$ دلخواه) تابع ویژه‌ای از (۱) ، (۲) که متناظر با λ_0 است می‌باشد. (توجه کنید که این خاصیت را می‌توان برای به‌دست‌آوردن توابع ویژه‌ای که نرمشان ۱ است به‌کار برد.)

مقادیر ویژه وتوابع ویژهٔ هریك از مسائل استورم ـ لیوویل زیر را پیدا کنید.

۴. $y'' + \lambda y = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y(l) = 0$

۵. $y''+\lambda y=0 \ , \ y(0)=0 \ , \ y'(l)=0$

۶. $y''+\lambda y=0 \ , \ y'(0)=0 \ , \ y(l)=0$

۷. $y''+\lambda y=0 \ , \ y'(0)=0 \ , \ y'(l)=0$

۸. $y''+\lambda y=0 \ , \ y(0)=y(2\pi) \ , \ y'(0)=y'(2\pi)$

۹. $(xy')'+\lambda x^{-1}y=0 \ , \ y(1)=0 \ , \ y(e)=0$

۱۰. $(xy')'+\lambda x^{-1}y=0 \ , \ y(1)=0 \ , \ y'(e)=0$

۱۱. $(e^{2x}y')'+e^{2x}(\lambda+1)y=0 \ , \ y(0)=0 \ , \ y(\pi)=0$

۱۲. $(x^{-1}y')'+(\lambda+1)x^{-3}y=0 \ , \ y(1)=0 \ , \ y(e)=0$

۱۳. نشان دهید که مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ استورم ـ لیوویل $y''+\lambda y=0$ ، $y(0)=0$ ، $y(1)+y'(1)=0$ جوابهای معادلهٔ $\sin k+k\cos k=0$ هستند که در آن $k=\sqrt{\lambda}$. این معادله چند جواب مثبت دارد؟

مسئلهٔ استورم ـ لیوویلی بیابید که مقادیر ویژهٔ آن عبارت باشند از

۱۴. $1 \ , \ \cos\frac{2n\pi}{T}x \ , \ \sin\frac{2n\pi}{T}x \ , \ (n=1,2,\dots)$

۱۵. $1 \ , \ \cos x \ , \ \cos 2x \ , \ \cos 3x \ , \ \dots$

۹.۴ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل

مثال ۱. چندجمله‌ایهای لژاندر

معادلهٔ لژاندر (۱) بخش ۳.۴ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0, \qquad \lambda=n(n+1).$$

بنابراین معادلهٔ لژاندر یك معادلهٔ استورم ـ لیوویل (۱)، بخش ۸.۴ است که در آن $r=1-x^2$ ، $q=0$ و $p=1$. از آنجا که وقتی $x=\pm 1$ داریم $r=0$ ، برای تشکیل مسئلهٔ استورم ـ لیوویل برفاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ به‌هیچ‌شرط مرزی احتیاج نداریم. می‌دانیم که به‌ازای $n=0, 1, \dots$ ، چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ جواب مسئله هستند. پس چندجمله‌ایهای لژاندر توابع ویژهٔ مسئله هستند، واز قضیهٔ ۱ بخش ۸.۴ نتیجه‌می‌شود که این توابع برآن فاصله متعامدند، یعنی

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{۱}$$

نرم عبارت است از (ر. ک. مسئلهٔ ۷ بخش ۳.۴)

$$\|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \qquad m = 0, 1, \cdots \tag{۲}$$

مثال ۲. توابع بسل.

تعامد توابع بسل J_n درکاربردهای مهندسی، مثلا درارتباط با ارتعاشات غشاهای مستدیر (که دربخش ۱۰.۱۱ بررسی می‌شوند)، بسیار مهم است. $J_n(s)$ درمعادلهٔ بسل (بخش ۵.۴)

$$s^2\ddot{J} + s\dot{J}_n + (s^2 - n^2)\,J_n = 0$$

صدق می‌کند؛ دراین‌معادله نقطه‌های‌روی حروف مشتق نسبت به s رانشان می‌دهند. فرض می‌کنیم که n عددی صحیح وغیرمنفی است. باقراردادن $s = \lambda x$ که درآن λ عددی ثابت ومخالف صفراست، داریم $dx/ds = 1/\lambda$ وبا توجه به‌قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\dot{J}_n = J'_n/\lambda\,, \quad \ddot{J}_n = J''_n/\lambda^2\,,$$

که پریمها مشتق نسبت به x را نشان می‌دهند. با جایگذاری به‌دست می‌آوریم

$$x^2 J''_n(\lambda x) + x\,J'_n(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2)\,J_n(\lambda x) = 0\,.$$

پس‌از تقسیم‌کردن بر x ، این معادله را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$[x\,J'_n(\lambda x)\,]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0\,. \tag{۳}$$

مشاهده می‌کنیم که به‌ازای هر n مشخص ، این معادله یك معادلهٔ استورم ـ لیوویل (۱) ، بخش ۸.۴، است که درآن به‌جای λ پارامتر λ^2 گذاشته شده است و

$$p(x) = x\,, \qquad q(x) = -n^2/x\,, \qquad r(x) = x\,.$$

چون در $x = 0$ داریم $r(x) = 0$ ، از قضیهٔ ۱ بخش قبل نتیجه می‌شود که آن دسته از جوابهای معادلهٔ (۳) برفاصلهٔ مفروض $0 \leqslant x \leqslant R$ که درشرط مرزی

$$J_n(\lambda R) = 0 \tag{۴}$$

صدق می‌کنند، برفاصلهٔ مزبور نسبت به‌تابع وزن $p(x) = x$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. (توجه کنید که به‌ازای $n \neq 0$ تابع q در $x = 0$ ناپیوسته است، ولی این امر

اثری دراثبات قضیه ندارد.) می‌توان نشان داد (ر. ك. [B۱۸]) که $J_n(s)$ دارای تعدادی نامتناهی صفر حقیقی است؛ فرض کنیم $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \cdots$ نشان دهندهٔ صفرهای مثبت $J_n(s)$ هستند. آنگاه (۴) به‌ازای

$$(m=1,2,\cdots) \qquad \lambda R = \alpha_{mn} \quad \text{یا} \quad \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \quad (5)$$

برقرار است واز اینجا، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱ (تعامد توابع بسل)

به‌ازای هرمقدار(مشخص $n = 0, 1, \cdots$ توابع‌بسل $J_n(\lambda_{1n}x)$، $J_n(\lambda_{2n}x)$، $J_n(\lambda_{3n}x)$، $\cdots$، با λ_{mn} داده شده در (۵) برفاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant R$ نسبت به‌تابع وزنی $p(x) = x$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند، یعنی

$$\int_0^R x\, J_n(\lambda_{mn} x)\, J_n(\lambda_{kn} x)\, dx = 0\,, \qquad (k \neq m). \quad (6)$$

بدین ترتیب تعدادی نامتناهی مجموعهٔ متعامد به دست آورده‌ایم که هر یك ازآنها متناظر با یکی از مقادیر مشخص n است.

چون $p(x) = x$، با توجه به‌فرمولهای (۱۱) تا (۱۳) بخش ۷.۴ ملاحظه‌می‌کنیم که اگر تابع مفروض $f(x)$ دارای یك بسط تابع ویژه‌ای برحسب یکی ازمجموعه‌های متعامد مزبورباشد، این بسط عبارت است از

$$f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n} x) + c_2 J_n(\lambda_{2n} x) + \cdots. \quad (7)$$

که **سری فوریه‌ـبسل** نامیده می‌شود. ثابت خواهیم کرد

$$\|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}\, x)\, dx = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R)\,, \quad (8)$$

که در آن $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/R$. بنا به (۱۳) بخش ۷.۴، از این فرمول نتیجه می‌شود که ثابتهای فوریهٔ c_m دربسط (۷) عبارتند از

$$c_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x)\, J_n(\lambda_{mn} x)\, dx\,, \qquad m = 1, 2, \cdots. \quad (9)$$

اکنون به‌اثبات (۸) می‌پردازیم. با ضرب کردن (۳) در $2xJ_n'(\lambda x)$ به‌معادله‌ای می‌رسیم که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\{[x J_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' = 0.$$

با انتگرالگیری نسبت به x از ۰ تا R داریم

$$[xJ_n'(\lambda x)]^2\Big|_0^R = -\int_0^R (\lambda^2x^2-n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}'dx. \tag{10}$$

با توجه به (۲۱) درمسئلهٔ ۷ بخش ۵.۴ و با نوشتن s و n به‌جای x و ν و استفاده از نقطه، برای نشان دادن مشتق نسبت به s، داریم

$$-ns^{-n-1}J_n(s)+s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s).$$

با ضرب طرفین در s^{n+1} وقرار دادن $s=\lambda x$، به‌دست می‌آوریم

$$\lambda x J_n'(\lambda x)\frac{1}{\lambda} = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x),$$

که درآن پریم نمایش مشتق نسبت به x است. بنابراین سمت چپ (۱۰) برابر است با

$$\left[[nJ_n(\lambda x)-\lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2\right]_{x=0}^R$$

هرگاه $\lambda=\lambda_{mn}$، آنگاه $J_n(\lambda R)=0$ وچون $J_n(0)=0 (n=1, 2, \dots)$، عبارت فوق چنین می‌شود:

$$\lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R). \tag{11}$$

با انتگرالگیری به‌روش جزء به‌جزء، طرف راست (۱۰) چنین می‌شود

$$-\left[(\lambda^2x^2-n^2)J_n^2(\lambda x)\right]_0^R + 2\lambda^2\int_0^R xJ_n^2(\lambda x)\,dx.$$

وقتی $\lambda=\lambda_{mn}$، عبارت اول در $x=R$ برابر صفر است. این عبارت در $x=0$ نیز صفر است، زیرا وقتی $n=x=0$، داریم $\lambda^2x^2-n^2=0$ و وقتی $x=0$ و $n=1, 2, \dots$، داریم $J_n(\lambda x)=0$. با توجه به‌این مطلب وعبارت (۱۱)، به‌راحتی (۸) را به‌دست می‌آوریم وبدین ترتیب اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

مسائل بخش ۹.۴

چندجمله‌ایهای لژاندر

چندجمله‌ایهای زیر را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر نمایش دهید.

۱. $1, x, x^2, x^3, x^4$

۲. $3x^2+x$

۳. $5x^3-3x^2-x-1$

۴. $35x^4+15x^3-30x^2-15x+3$

درهریك از مسائل زیر، چندجملهٔ اول بسط $f(x)$ را برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر به‌دست بیاورید ونمودار سه مجموع جزئی اول را رسم کنید.

۵. $f(x)=\begin{cases} 0 & -1<x<0 \\ x & 0<x<1 \end{cases}$ **۶.** $f(x)=\begin{cases} 0 & -1<x<0 \\ 1 & 0<x<1 \end{cases}$

۷. $f(x)=|x| \quad -1<x<1$

۸. نشان دهید که توابع $P_n(\cos\theta)$، $n=0, 1, \ldots$، برفاصلهٔ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ نسبت به‌تابع وزن $\sin\theta$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

چند جمله‌ایهای هرمیت[1]

توابع

$$He_0=1\,,\ \ He_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})\,,\quad n=1, 2, \ldots$$

را چندجمله‌ایهای هرمیت می‌نامند.

تبصره. برای نشان دادن توابع خاص نمادهای گوناگونی به‌کار می‌رود، چندجمله‌ایهای هرمیت را نیز گاهی به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$H_0^*=1\,,\quad H_n^*(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\,.$$

این تعریف با تعریف ما، که درکاربردها بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، تفاوت دارد.

۹. نشان دهید که

$$He_1(x)=x\,,\ He_2(x)=x^2-1\,,\ He_3(x)=x^3-3x\,,$$
$$He_4(x)=x^4-6x^2+3\,.$$

۱۰. نشان دهید که چندجمله‌ایهای هرمیت با ضرایب سری مکلورن

$$e^{tx-t^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\,t^n$$

با فرمول $He_n(x)=n!\,a_n(x)$ رابطه دارند. راهنمایی. توجه کنید که

---

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite)، ۱۸۲۲–۱۹۰۱، ریاضیدان فرانسوی که به‌خاطر کارهایش درجبر ونظریهٔ اعداد مشهور است.

$tx-t^{2}/2=x^{2}/2-(x-t)^{2}/2$. (تابع نمایی سمت چپ را تابع مولد He_n می‌نامند.)

۱۱. نشان دهید که چندجمله‌ای‌های هرمیت در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$He_{n+1}(x)=xHe_n(x)-He_n'(x).$$

۱۲. با مشتقگیری نسبت به x از تابع مولدی که در مسئلهٔ ۱۰ آمد نشان دهید که

$$He_n'(x)=nHe_{n-1}(x).$$

با استفاده از این فرمول وفرمولی که درمسئله ۱۱ داشتیم (با گذاشتن $n-1$ به‌جای n)، ثابت کنید که $He_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$y''-xy'+ny=0.$$

۱۳. با استفاده ازمعادله‌ای که درمسئلهٔ ۱۲ داشتیم، نشان دهید که $w=e^{-x^2/4}He_n(x)$ جواب **معادلهٔ وبر**[1]

$$w''+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^{2}\right)w=0 \qquad (n=0,1,\dots).$$

است.

۱۴. نشان دهید که چند جمله‌ایهای هرمیت، نسبت به‌تابع وزن $p(x)=e^{-x^2/2}$ بر محور x ها، $-\infty<x<\infty$، متعامدند. راهنمایی: از فرمولی که در مسئلهٔ ۱۲ داشتیم و از انتگرالگیری به روش جزء‌به‌جزء استفاده کنید.

چند جمله‌ایهای لاگر[2]

توابع

$$L_0=1, \qquad L_n(x)=\frac{e^{x}}{n!}\frac{d^{n}(x^{n}e^{-x})}{dx^{n}}, \qquad n=1,2,\dots$$

را چند جمله‌ایهای لاگر می‌نامند.

---

۱. هاینریش وبر (Heinrich Weber)، ۱۸۴۲-۱۹۱۳، ریاضیدان آلمانی.

۲. ادموند لاگر (Edmond Laguerre)، ۱۸۳۴ ــ ۱۸۸۶، ریاضیدان فرانسوی که تحقیقات او در هندسه ونظریهٔ سریهای نامتناهی است.

۱۵. نشان دهید که

$$L_1(x)=1-x\ ,\ L_2(x)=1-2x-x^2/2\ ,$$
$$L_3(x)=1-3x+3x^2/2-x^3/6\ .$$

۱۶. نشان دهید که

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\binom{n}{m}x^m$$
$$=1-nx+\frac{n(n-1)}{4}x^2-+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

۱۷. $L_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل لاگر $xy''+(1-x)y'+ny=0$ صدق می‌کند درستی این ادعا را به‌ازای $n=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3$ تحقیق کنید.

۱۸. با انتگرالگیری مستقیم تحقیق کنید که $L_2(x)\ ,\ L_1(x)\ ,\ L_0$ روی محور x های مثبت، $0\leqslant x<\infty$ نسبت به‌تابع وزن $p(x)=e^{-x}$ متعامدند.

۱۹. ثابت کنید کــه مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای لاگر روی $0\leqslant x<\infty$ نسبت به‌تابع وزن $P(x)=e^{-x}$ متعامدند. راهنمایی. انتگرال $e^{-x}L_m(x)L_n(x)$ ازصفر تا ∞ را با $m<n$ درنظربگیرید؛ چون بزرگترین توان در L_m برابر x^m است، بنابراین کافی است نشان دهید کــه انتگرال $e^{-x}x^kL_n(x)\ (k<n)$ از صفر تا ∞ برابر صفر است. با چندبار انتگرالگیری با روش جزءبه‌جزء، این‌موضوع را ثابت کنید.

چند جمله‌ایهای چبیشف[1]

توابع

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\ ,\qquad U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$n=0\ ,\ 1\ ,\ \ldots$$

را به ترتیب چند جمله‌ایهای چبیشف نوع اول و دوم می‌نامند.

۲۰. نشان دهید که

$$T_0=1\ ,\quad T_1(x)=x\quad ,\ T_2(x)=2x^2-1\ ,\quad T_3(x)=4x^3-3x\ ,$$

---

۱. پافنوتی چبیشف (Pafnuti chebichee)، ۱۸۲۱-۱۸۹۴، ریاضیدان روس که به خاطر کارهایش در نظریهٔ تقریب و نظریهٔ اعداد معروف است. نام او را به‌صورت (Chebyshev) نیز می‌نویسند.

$$U_0=1\ ,\ \ U_1(x)=2x\ ,\ \ U_2(x)=4x^2-1\ ,\ \ U_3(x)=8x^3-4x\,.$$

۴۱. نشان دهید که $T_n(x)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر است:

$$(1-x^2)T_n''-xT_n'+n^2T_n=0\,.$$

۴۲. نشان دهید که چندجمله‌ایهای چبیشف $T_n(x)$ روی فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ نسبت به‌تابع وزن $p(x)=1/\sqrt{(1-x^2)}$ متعامدند. راهنمایی. برای محاسبهٔ انتگرال فرض کنید $\arccos x=\theta$.

توابع بسل

۴۳. نمودار $J_0(\lambda_{10}x)$ ، $J_0(\lambda_{20}x)$ ، $J_0(\lambda_{30}x)$ و $J_0(\lambda_{40}x)$ را به‌ازای $R=1$ در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ رسم کنید (از جدول A۲ ضمیمهٔ ۴ استفاده کنید).

۴۴. نمودار $J_1(\alpha_{11}x)$ ، $J_1(\alpha_{21}x)$ ، $J_1(\alpha_{31}x)$ و $J_1(\alpha_{41}x)$ را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ رسم کنید. (از جدول A۲ ضمیمهٔ ۴ استفاده کنید.)

هر یك از توابع $f(x)\,(0<x<R)$ زیر را برحسب سری فوریه-بسل

$$f(x)=c_1J_0(\lambda_{10}x)+c_2J_0(\lambda_{20}x)+c_3J_0(\lambda_{30}x)+\cdots$$

بسط دهید و نمودار چند مجموع جزئی اول را رسم کنید.

۴۵. $f(x)=1$ ، راهنمایی. از فرمول (۲۰) بخش ۵.۴ استفاده کنید

۴۶.
$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\dfrac{R}{2}\\[2mm] 0 & \dfrac{R}{2}<x<R\end{cases}$$

۴۷.
$$f(x)=\begin{cases}k & 0<x<a\\ 0 & a<x<R\end{cases}$$

۴۸.
$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\dfrac{R}{2}\\[2mm] k & \dfrac{R}{2}<x<R\end{cases}$$

۴۹. $f(x)=1-x^2\,(R=1)$. راهنمایی. ازفرمول (۲۰) بخش ۵.۴ وانتگرالگیری جزءبه‌جزء استفاده کنید.

۳۰. $f(x) = R^{2} - x^{2}$ ۳۱. $f(x) = x^{2}$ ۳۲. $f(x) = x^{4}$

۳۳. نشان دهید که $(n = 0, 1, \ldots$ و $0 < x < 1)\ f(x) = x^{n}$ را می‌توان با سری فوریه-بسل زیر نمایش داد:

$$x^{n} = \frac{2J_{n}(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n}J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{2J_{n}(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n}J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \cdots$$

۳۴. مانند مسئلهٔ ۳۳ نمایشی برای تابع $(n = 0, 1, \ldots$ و $0 < x < R)\ f(x) = x^{n}$ بیابید.

۳۵. $f(x) = x^{3}\ (0 < x < 2)$ را با سری فوریه-بسلی که شامل J_{3} باشد نمایش دهید.

۵

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس روشی برای حل معادلات دیفرانسیل ومسائل با مقدار مرزی و مقدار اولیهٔ متناظر با آنها است. فرایند حل متشکل از سه مرحلهٔ اصلی است :

مرحلهٔ اول. مسئلهٔ داده شدهٔ «مشکل» را به‌معادله‌ای «ساده» تبدیل می‌کنیم (معادلهٔ کمکی).

مرحلهٔ دوم. معادلهٔ کمکی را با روشهای جبری صرف حل می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم. از روی جواب معادلهٔ کمکی، با تبدیل معکوس، جواب مسئلهٔ داده‌شده را به‌دست می‌آوریم.

بدین‌ترتیب تبدیل‌لاپلاس مسئلهٔ مربوط به‌حل معادلهٔ دیفرانسیل‌را به‌مسئله‌ای جبری تبدیل می‌کند. جداول تبدیل لاپلاس مرحلهٔ سوم را آسانتر می‌کنند ، نقش این جداول شبیه نقش جداول انتگرال در انتگرالگیری است. (این جداول در مرحلهٔ اول نیز مفید واقع می‌شوند.) یکی از این جداول درانتهای همین فصل آمده است.

از روش تبدیل‌لاپلاس درریاضیات مهندسی ، جایی‌که این روش‌کاربردهای متعددی دارد، به‌طور وسیعی استفاده می‌شود. این روش به‌ویژه درمسائلی‌که درآنها نیروی راننده (مکانیکی یا الکتریکی) دارای ناپیوستگیهایی است، مفید واقع می‌شود؛ نمونهٔاین نیروها نیروهایی هستندکه تنها مدت‌کوتاهی عمل می‌کنند یا آنکه دوره‌ای‌هستند ولی صرفاً تابع سینوسی یاکسینوسی نیستند. مزیت دیگر این روش آن است‌که جواب مسائل را مستقیماً به‌دست می‌دهد؛ درواقع، مسائل با مقدار اولیه، بدون اینکه لازم‌باشدابتدا جواب عمومی آنها را به دست آوریم حل می شوند. به همین‌نحو می‌توان معادلات غیر همگن را بدون آنکه لازم باشد نخست معادلهٔ همگن مربوطه حل شود، حل کرد.

دراین فصل تبدیل لاپلاس را از نقطه‌نظر عملی بررسی می کنیم وموارد استفادهٔ آن را به کمك مسائل مهم مهندسی نشان می‌دهیم.
درهمین فصل، کاربرد تبدیل لاپلاس درمعادلات دیفرانسیل معمولی مورد بررسی قرار می گیرد.
معادلات با مشتق جزئی را نیز می‌توان با تبدیل لاپلاس مورد بحث و بررسی قرار داد. مقدمه‌ای دراین زمینه دربخش ۱۳.۱۱، انتهای فصل مربوط به‌معادلات با مشتق جزئی ارائه شده است.

پیشنیاز این فصل: فصل ۲.

مراجع: ضمیمهٔ ۱ قسمت B.

جواب مسائل: ضمیمهٔ۲.

۵.۱ تبدیل لاپلاس. تبدیل معکوس. خطی بودن

فرض می کنیم $f(t)$ تابع مفروضی باشد که به‌ازای همهٔ مقادیر $t \geqslant 0$ تعریف شده‌است. تابع $f(t)$ را در e^{-st} ضرب می کنیم و ازآن نسبت به t، از صفر تا بینهایت، انتگرال می گیریم. آنگاه، اگر انتگرال مزبور وجود داشته باشد تابعی از s خواهد بود، مثلا $F(s)$:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt .$$

تابع $F(s)$ **تبدیل لاپلاس**[1] تابع اصلی $f(t)$ نامیده می‌شود وآن را با $\mathcal{L}(f)$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$F(s)=\mathcal{L}(f)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt . \qquad (۱)$$

عمل فوق‌الذکر، که از $f(t)$ مفروضی $F(s)$ را به‌دست می‌دهد، **عمل تبدیل لاپلاس** نام دارد.

به‌علاوه، تابع اصلی $f(t)$ که در (۱) دیده می‌شود تبدیل معکوس یا **معکوس** $F(s)$ نام دارد وآن را با $\mathcal{L}^{-1}(F)$ نشان می‌دهند؛ یعنی می‌توان نوشت

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F) .$$

---

۱. پیر سیمون لاپلاس (Pierre Simon de Laplace)، ۱۷۴۹–۱۸۲۷، ریاضیدان بزرگ فرانسوی است که اساس نظریهٔ پتانسیل را توسعه داده، سهم به سزایی در پیشبرد مکانیك سماوی ونظریهٔ احتمال دارد

نمادگذاری

توابع اصلی با حروف‌کوچك وتبدیلات آنها با حروف بزرگ متناظر نشان داده می‌شوند، مثلا $F(s)$ نشان دهندۀ تبدیل $f(t)$ و $Y(s)$ نشان‌دهندۀ تبدیل $y(t)$ است.

مثال ۱

فرض می‌کنیم $f(t)=1$ وقتی که $t \geqslant 0$، $F(s)$ را پیدا می‌کنیم. از(۱)، با انتگرالگیری به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(1)=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty ;$$

پس درصورتی که $s>0$، داریم

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}.$$

نمادگذاری‌سمت راست‌رابطۀ اول برای سادگی است، با این‌حال لازم است‌چندکلمه‌ای دربارۀ آن صحبت کنیم. فاصلۀ انتگرالگیری در (۱) نامتناهی است. چنین انتگرالی را انتگرال ناسره می‌نامند؛ بنابر تعریف، این انتگرال باید طبق قاعدۀ زیر محاسبه شود:

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt.$$

پس، معنی نمادگذاری ما چنین است:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}e^0\right]=\frac{1}{s}$$
$$(s>0).$$

سرتاسر این فصل، از این نمادگذاری استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲

فرض می‌کنیم $f(t)=e^{at}$ وقتی $t \geqslant 0$، در اینجا a عددی ثابت است. $\mathcal{L}(f)$ را به‌دست می‌آوریم. مجدداً با توجه به (۱) داریم

$$\mathcal{L}(e^{at})=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty ;$$

از این‌رو درصورتی که $s-a>0$، داریم

$$\mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}\cdot$$ ▲

آیا باید به همین ترتیب جلو برویم و تبدیل لاپلاس توابع را یکی پس از دیگری مستقیماً از روی تعریف به‌دست آوریم؟ جواب این سؤال منفی‌است، به‌این دلیل که تبدیل لاپلاس خواص کلی بسیاری دارد که برای این منظور مفیدند. یك خاصیت بسیار مهم این است که تبدیل لاپلاس، درست مانند اعمال مشتقگیری و انتگرالگیری، عملی خطی است. بدین ترتیب قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۱ (خطی بودن تبدیل لاپلاس)

تبدیل لاپلاس عملی خطی است، یعنی به‌ازای هرتابع $f(t)$ و $g(t)$ که تبدیل لاپلاس آنها موجود باشد و به‌ازای ثابتهای دلخواه a و b داریم

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

اثبات بنابه‌تعریف داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}&=\int_{0}^{\infty}e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,dt\\&=a\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt+b\int_{0}^{\infty}e^{-st}g(t)\,dt\\&=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

▲

مثال ۳

با فرض $f(t)=\cosh at=(e^{at}+e^{-at})/2$ ، $\mathcal{L}(f)$ را بیابید. ازقضیهٔ ۱ و مثال ۲ به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(\cosh at)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at})+\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right);$$

یعنی درصورتی که $s>a(\geqslant 0)$ ، داریم

$$\mathcal{L}(\cosh at)=\frac{s}{s^2-a^2}\cdot$$

از برخی توابع مقدماتی و تبدیلات لاپلاس آنها فهرست کوچکی در جدول ۱.۵ آمده وفهرستی جامعتر دربخش ۸.۵ ارائه‌شده است. همچنین مراجع‌موجود در ضمیمهٔ ۱، قسمت B ، را ببینید.

بادانستن تبدیلات جدول ۱.۵، تقریباً همهٔ تبدیلهای مورد نیاز را می‌توان بااستفاده از قضایای کلی ساده‌ای که در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می گیرند، به‌دست آورد.

فرمولهای ۱، ۲ و ۳ از جدول ۱.۵ حالات خاصی از فرمول ۴ هستند. فرمول ۴ از فرمول ۵ و اینکه $\Gamma(n+1)=n!$، نتیجه می‌شود؛ در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است [ر.ک. (۱۰) بخش ۵.۴]. می‌توان ازتعریف زیر شروع کرده، فرمول ۵ را ثابت کرد

$$\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-st}t^a\,dt\,,$$

جدول ۱۰۵

برخی توابع مقدماتی $f(t)$، و تبدیل لاپلاس آنها $\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$		$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	۶	$1/s$	1	۱
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	۷	$1/s^2$	t	۲
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	۸	$2!/s^3$	t^2	۳
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	۹	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n $(n=1,2,\dots)$	۴
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	۱۰	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	(a مثبت) t^a	۵

با قرار دادن $st=x$ و با استفاده از فرمول (۸) بخش ۵.۴ داریم

$$\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a\frac{dx}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a\,dx=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\qquad s>0\,.$$

فرمول ۶ در مثال ۲ ثابت شد. برای اثبات فرمولهای ۷ و ۸، در فرمول ۶ قرار می‌دهیم $a=i\omega$؛ درنتیجه

$$\mathscr{L}(e^{i\omega t})=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

از طرف دیگر، با توجه به‌قضیهٔ ۱ داریم

$$\mathscr{L}(e^{i\omega t})=\mathscr{L}(\cos\omega t+i\sin\omega t)=\mathscr{L}(\cos\omega t)+i\mathscr{L}(\sin\omega t).$$

از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی این دو معادله، فرمولهای ۷ و ۸ به‌دست می‌آیند. فرمول ۹ در مثال ۳ ثابت شد و فرمول ۱۰ به همان طریق اثبات می‌شود. ▲

به عنوان نتیجهٔ این مقدمه مطلبی دربارهٔ وجود تبدیل لاپلاس بیان می کنیم . این مطلب، تقریباً به‌طور شهودی، به‌شرح زیر است. انتگرال (۱) به‌ازای مقدار مشخصی از s درصورتی موجود است که‌کل انتگرال $e^{-st}f(t)$ وقتی که $t\to\infty$، با سرعت کافی به‌صفر میل کند، مثلاً حداقل مانند تابعی نمایی با نمای منفی. منشأ نامساوی (۲) کــه در قضیهٔ زیر آمده همین موضوع است. لازم نیست $f(t)$ پیوسته باشد واین درعمل اهمیت دارد ، چراکه ورودیهای ناپیوسته (نیروهای راننده) درست همان چیزهایی هستند کـه تبدیل لاپلاس، به‌خصوص درموردآنها مفید واقع می‌شود. کافی است فرض کنیم که $f(t)$ درهر فاصلهٔ متناهی از مجموعهٔ مقادیر $t\geqslant 0$ پیوستهٔ تکه‌ای است.

بنابه‌تعریف، تابع $f(t)$ بــر فاصلهٔ متناهی $a\leqslant t\leqslant b$ **پیوستهٔ تکه‌ای** است هرگاه $f(t)$ بر آن فاصله تعریف شده وچنان باشدکـه بتوان فاصلهٔ مزبور را به‌تعدادی متناهی فاصله‌های جزء تقسیم کرد، به‌طوری‌که درهریك از این‌فواصل جزء $f(t)$ پیوسته بوده وقتی که t ازداخل بــه سمت نقاط انتهایی هریك از فواصل جزء میل می کند دارای حدی متناهی باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که جهشهای متناهی تنها ناپیوستگیهایی هستندکه یك تابع‌پیوستهٔ تکه‌ای می‌تواند داشته‌باشد؛ این‌ناپیوستگیها را ناپیوستگیهای عادی می‌نامند. شکل ۷۸ مثالی را نشان می‌دهد. به‌علاوه، واضح است کــه توابع پیوستهٔ تکه‌ای شامل همه توابع پیوسته نیز هستند.

مسئلهٔ ۲ (قضیهٔ وجود تبدیلات لاپلاس)

فرض‌کنیم $f(t)$ تابعی باشدکه در هر فاصلهٔ متناهی از مجموعهٔ مقادیر $t\geqslant 0$ پیوستهٔ تکه‌ای است و به‌ازای اعداد ثابتی مانند γ و M در نامساوی

$$|f(t)|\leqslant Me^{\gamma t} \qquad \text{به‌ازای هر } t\geqslant 0 \qquad (2)$$

صدق‌کند. آنگاه به‌ازای هر $s>\gamma$ ، تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود است.

اثبات. چون $f(t)$ پیوستهٔ تکه‌ای است، $e^{-st}f(t)$ بر هرفاصلهٔ متناهی از محور t ها انتگرالپذیر است و با توجه به (۲) داریم

$$|\mathcal{L}(f)|=\left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt\leqslant\int_0^\infty e^{-st}Me^{\gamma t}\,dt$$
$$=M\int_0^\infty e^{-(s-\gamma)t}dt=\frac{M}{s-\gamma}\qquad(s>\gamma).$$

بدین‌ترتیب اثبات قضیه به‌اتمام می‌رسد. ▲

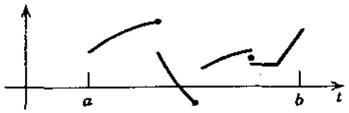
شرطهایی که در قضیهٔ ۲ داشتیم برای اکثر کاربردها کافی هستند و پی‌بردن به‌این‌که تابع مفروضی در نامساوی (۲) صدق می‌کند یا نه، ساده است. مثلا

(۳) $\cosh t<e^t,\quad t^n<n!e^t\quad(n=0,1,\dots)$ به‌ازای هر $t>0$

و هر تابعی که به‌ازای همهٔ مقادیر $t\geqslant 0$ قدرمطلقش کراندار است، مثلا توابع سینوسی یا کسینوسی با متغیر حقیقی، در شرط قضیه صدق می‌کند. مثال تابعی که در رابطهٔ (۲) صدق نمی‌کند، تابع نمایی e^{t^2} است، چراکه هرقدر اعداد M و γ در (۲) بزرگ انتخاب شوند، داریم

$$e^{t^2}>Me^{\gamma t}$$ به‌ازای هر $t>t_0$

در اینجا t_0 عددی است که به‌قدرکافی بزرگ است و به M و γ بستگی دارد.



شکل ۷۸. مثال تابع پیوستهٔ تکه‌ای $f(t)$.
(نقطه‌ها مقادیر تابع‌را درنقاط جهش مشخص می‌کند.)

باید توجه داشت که شرایط قضیهٔ ۲ کافی هستند، نه لازم. مثلا تابع $1/\sqrt{t}$، در $t=0$، نامتناهی است، ولی تبدیل لاپلاس آن موجود است؛ درواقع، از تعریف و $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ [ر.ک. (۳۰) ضمیمهٔ ۳] به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(t^{-1/2})=\int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx=\frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

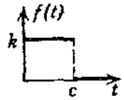
هرگاه تبدیل لاپلاس تابع مفروضی موجود باشد، این تبدیل به‌طور یکتا تعیین می‌شود. برعکس، می‌توان نشان دادکه هرگاه دوتابع (که هر دو بر محور حقیقی مثبت تعریف شده‌اند) دارای تبدیلی یکسان باشند، این‌توابع، برفاصله‌ای باطول مثبت، یکسان هستند و تنها ممکن است در بعضی نقاط منفرد با هم اختلاف داشته باشند (ر.ک. مرجع

[B۱۹] ضمیمهٔ ۱). چون این‌مورد درکاربردها اهمیتی ندارد، می‌توانیم بگوییم که معکوس یك تبدیل مفروض اساساً یکتاست. به‌ویژه، اگر دوتابع پیوسته دارای یك تبدیل باشند، این توابع کاملاً یکسانند. البته، این‌موضوع در عمل اهمیت دارد. چرا؟ (مقدمهٔ این فصل را به‌خاطر بیاورید.)

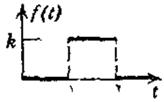
مسائل بخش ۱۰۵

تبدیلهای لاپلاس توابع زیر را که درآنها k ، a ، b ، c ، θ مقادیر ثابتی هستند، بیابید.

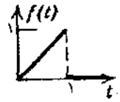
۱.



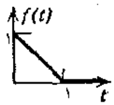
۲.



۳.



۴.



۵. $t+2$ ۶. $at+b$ ۷. $a+bt+ct^2$ ۸. $4t^3+t^2$

۹. $a\cos 2t$ ۱۰. e^{-at+b} ۱۱. $\sin(\omega t+\theta)$ ۱۲. $\cosh^2 3t$

هرگاه $F(s)=\mathcal{L}(f)$ یکی از مقادیر زیر باشد $f(t)$ را بیابید. (در مسئلهٔ ۱۹ ، T مقدار ثابتی است.)

۱۳. $\frac{1}{s^2+9}$ ۱۴. $\frac{3}{s+\pi}$ ۱۵. $\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}$

۱۶. $\frac{2s+1}{s^2+4}$ ۱۷. $\frac{4(s+1)}{s^2-16}$ ۱۸. $\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}$

۱۹. $\frac{2n\pi T}{T^2s^2+(2n\pi)^2}$ ۲۰. $\frac{s}{s^2+n^2\pi^2}$ ۲۱. $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

۲۲. $\frac{3}{s^2+3s}$ ۲۳. $\frac{3}{4}s^{-5/2}$ ۲۴. $s^{-3/2}$

۲۵. جواب مسئلهٔ ۴ را به‌کمك مسائل ۱ و ۳ به‌دست آورید.

۲۶. نامساویهای (۳) را ثابت کنید.

۲۷. فرمول ۱۰ جدول ۱۰۵ را از فرمول ۶ به‌دست آورید.

۲۸. فرمول ۶ جدول ۱۰۵ را از فرمولهای ۹ و ۱۰ به‌دست آورید.

۲۹. با انتگرالگیری جزءبه‌جزء فرمولهای ۷ و ۸ جدول ۱.۵ را به‌دست آورید.

۳۰. با استفاده از $\cosh x = \cos ix$ و $\sinh x = -i \sin ix$ ، $i = \sqrt{-1}$ ، فرمولهای ۹ و ۱۰ جدول ۱.۵ را از فرمولهای ۷ و ۸ به‌دست آورید.

۲.۵ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال

شاید مهمترین خاصیت تبدیل لاپلاس خطی بودن آن باشد (قضیهٔ ۱ بخش قبل). آنچه در درجهٔ دوم اهمیت قراردارد، صرف‌نظر از جزئیات، این است که مشتقگیری ازتابعی مانند $f(t)$ باضرب کردن‌تبدیل $F(s)$ در s متناظر است. بدین‌ترتیب، به‌جای‌انجام‌دادن اعمال حساب دیفرانسیل وانتگرال روی توابع، می‌توانیم اعمال جبری ساده روی تبدیلات آنها انجام دهیم.

به‌علاوه، چون انتگرالگیری عکس مشتقگیری است، انتظارداریم که این‌عمل باتقسیم تبدیل توابع بر s متناظر باشد؛ و درواقع همین طور هم است. بدین‌ترتیب، آنچه دراین بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد به‌شرح زیر است: قضیهٔ ۱ در رابطه بـا مشتقگیری از $f(t)$، قضیهٔ ۲، گسترش قضیهٔ۱ به مشتقات مراتب بالاتر، وقضیهٔ ۳ دربـارهٔ انتگرالگیری‌از $f(t)$. در این بخش، مثالها و همچنین کاربردهای تبدیلات لاپلاس در معادلات دیفرانسیل را گنجانده‌ایم.

قضیهٔ ۱ [مشتقگیری از $f(t)$]

فرض‌کنید $f(t)$ به‌ازای هر $t \geqslant 0$ پیوسته باشد؛ به‌ازای γ و Mی در نامساوی ۲ بخش قبل صدق‌کند؛ ومشتقی مانند $f'(t)$ داشته باشد که بر هرفاصلهٔ متناهیی از مجموعه مقادیر $t \geqslant 0$ پیوستهٔ تکه‌ای است. آنگاه تبدیل لاپلاس $f'(t)$ درصورتی‌که $s > \gamma$، موجود است و

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \qquad (s > \gamma). \tag{1}$$

اثبات. نخست حالتی راکه $f'(t)$ به‌ازای هر $t \geqslant 0$ پیوسته است بررسی می‌کنیم. در این‌حالت بنابه‌تعریف و با انتگرالگیری جزءبه‌جزء داریم

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \Big[e^{-st} f(t) \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

چون f در نـامساوی (۲)، بخش ۱.۵، صدق می‌کند، حاصل اولین جملهٔ عبارت فوق به‌ازای حدبالایی، وقتی که $s > \gamma$، صفر می‌شود و به‌ازای حدپایینی $-f(0)$ــ انتگرال سمت راست $\mathcal{L}(f)$ است و وجود آن به‌ازای $s > \gamma$ نتیجه‌ای از قضیهٔ ۲ بخش ۱.۵ است. بدین‌ترتیب ثابت می‌شود که عبارت طرف راست، وقتی $s > \gamma$، وجود دارد و برابر با $-f(0) + s\mathcal{L}(f)$ است. درنتیجه، وقتی $s > \gamma$، $\mathcal{L}(f')$ وجوددارد و (۱)

برقرار است.

هرگاه $f'(t)$ صرفاً پیوستهٔ تکه‌ای باشد، اثبات به‌همین نحو است؛ جزآنکه در این‌حالت، قلمرو انتگرالگیری درانتگرال اصلی را باید به‌چند قسمت تقسیم کرد به‌طوری که در هرقسمت، f' پیوسته باشد. ▲

تبصره. این‌قضیه را می‌توان به‌توابع تکه‌ای پیوستهٔ $f(t)$ تعمیم داد، اما در چنین‌حالتی به‌جای (۱) به‌فرمول (*۱) که‌در مسئلهٔ ۱۲ انتهای همین بخش، آمده است می‌رسیم.

اگر (۱) را درمورد مشتق مرتبهٔ دوم $f''(t)$ به‌کاربریم، به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0)$$
$$= s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0);$$

یعنی

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0). \tag{۲}$$

و به‌همین نحو،

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0), \tag{۳}$$

الی‌آخر. بدین‌ترتیب با استقرا، قضیهٔ ۱ را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

قضیهٔ ۲. (مشتق مرتبه n)

فرض کنید $f(t)$ و مشتقاتش $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، ... ، $f^{(n-1)}(t)$ به ازای هر $t \geqslant 0$ پیوسته باشد و به‌ازای γ و M ی در نامساوی (۲)، بخش ۱.۵ ، صدق کند و فرض کنید $f^{(n)}(t)$ بر هر فاصلهٔ محدود از مجموعهٔ مقادیر $t \geqslant 0$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد. آنگاه تبدیل لاپلاس $f^{(n)}(t)$ وقتی‌که $s > \gamma$ ، موجود است و ازفرمول زیر تعیین می‌شود :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \tag{۴}$$

مثال ۱

بافرض $f(t) = t^2$ ، $\mathcal{L}(f)$ راپیدا کنید. چون $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ ، $f''(t) = 2$ ، و $\mathcal{L}(2) = 2\mathcal{L}(1) = 2/s$ ، از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f)$$ ، و از آنجا $$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$ ،

که با جدول ۱.۵ مطابقت دارد. این مثال، نوعی است وبیانگرآن‌است‌که در حالت‌کلی، راههای مختلفی برای یافتن تبدیلات توابع مفروض وجود دارد.

مثال ۲

با فرض $f(t)=\sin^2 t$ ، $\mathcal{L}(f)$ را بیابید. داریم $f(0)=0$.

$$f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t$$

و از (۱) داریم

$$\mathcal{L}(\sin 2t)=\frac{2}{s^2+4}=s\mathcal{L}(f) \qquad \text{یا} \qquad \mathcal{L}(\sin^2 t)=\frac{2}{s(s^2+4)}\,.$$

مثال ۳

با فرض $f(t)=t\sin\omega t$ ، $\mathcal{L}(f)$ را پیداکنید. داریم $f(0)=0$ و

$$f'(t)=\sin\omega t+\omega t\cos\omega t\,,\quad f'(0)=0\,,$$

$$f''(t)=2\omega\cos\omega t-\omega^2 t\sin\omega t$$

$$=2\omega\cos\omega t-\omega^2 f(t)\,,$$

بنابراین با توجه به (۲)،

$$\mathcal{L}(f'')=2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t)-\omega^2\mathcal{L}(f)={}^2\mathcal{L}(f)\,.$$

و از اینجا با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس $\cos\omega t$ ، به‌دست می‌آوریم

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f)=2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t)=\frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}\,.$$

و نتیجه عبارت است از

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\,.$$

مثال ۴. یك معادلهٔ دیفرانسیل

مسئلهٔ با مقدار اولیه زیر را حل‌کنید:

$$y''+4y'+3y=0\,,\qquad y(0)=3\,,\qquad y'(0)=1\,.$$

فرض می‌کنیم $Y(s)=\mathcal{L}(y)$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ ، جواب (مجهول) مسئله، باشد. در این‌صورت بنابه‌قضایای ۱ و ۲ و شرایط اولیه، داریم

$$\mathcal{L}(y')=sY-y(0)\qquad\qquad =sY-3\,,$$

$$\mathcal{L}(y'')=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-3s-1\,.$$

اینها را در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده قرار می‌دهیم، ومی‌یابیم

$$s^2Y+4sY+3Y=3s+1+4\times 3 .$$

معادله‌ای‌را که تبدیل $Y(s)$ مربوط به‌تابع مجهول $y(t)$ درآن صدق می‌کند **معادلهٔ کمکی** معادلهٔ دیفرانسیل مورد نظر می‌نامند. در مثال اخیر، معادلهٔ کمکی را می‌توان چنین نوشت:

$$(s+3)(s+1)Y=3s+13 .$$

با حل این معادله نسبت به Y و با استفاده از کسرهای جزئی، به‌دست می‌آوریم

$$Y=\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}=\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1}$$

حال با توجه به‌جدول ۱.۵ مشاهده می‌کنیم که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}$$

با توجه به‌خطی بودن تبدیل لاپلاس (قضیهٔ ۱ بخش ۱.۵) جواب مسئله به صورت زیر در می‌آید

$$y(t)=-2e^{-3t}+5e^{-t}.$$

در این‌روش، فرض براین‌است که جواب مجهول $y(t)$ دارای تبدیلی مانند $Y(s)$ است وقضایای ۱ و۲ را می‌توان به‌کار برد. همین که جواب پیدا می‌شود، نشان می‌دهد که این فرضها درست هستند. از نظر عملی، ساده‌تر وطبیعی‌تر آن است که $y(t)$ و مشتقات آن را در معادلهٔ داده شده وشرایط اولیهٔ مفروض قرار دهیم و ببینیم کــه این جواب در آنها صدق می‌کند یا نه.

روش فوق رامی‌توان به‌این‌صورت خلاصه کرد :

فضای s		فضای t
معادلهٔ کمکی $s^2Y+4sY+3Y=3s+13$	←	مسئلهٔ داده شده $y''+4y'+3y=0$ $y(0)=3$ $y'(0)=1$
↓		
جواب معادلهٔ کمکی $Y=\frac{-2}{s+3}+\frac{5}{s+1}$	→	جواب مسئلهٔ داده شده $y(t)=-2e^{-3t}+5e^{-t}$

آیا این‌روش در مقایسه باروشی که در بخشهای ۲.۲ تا ۴.۲ دیدیم،کارآیی بیشتری دارد؟ در اینجا شرایط اولیه خود به‌خود به حساب آمده‌اند . در مثال بالا کارآیی این روش چندان واضح نیست چراکه مثال‌خیلی ساده است. مع‌هذا این‌مثال، مراحل مختلف روش جدید را نشان می‌دهد. کاربردهایی راکه نشان‌دهندهٔ فواید عمدهٔ این‌روش هستند پس ازآموختن خواص و تکنیکهای دیگری، که باعث قدرتمندی وانعطاف‌پذیری‌تبدیلات لاپلاس می گردند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مبحث را در بخش بعدی تحت عنوان فرایندهای انتقال و تابع پله‌ای واحد آغاز می کنیم. ▲

بخش حاضر را باانتگرالگیری از $f(t)$ ، عکس عمل مشتقگیری، به‌پایان می بریم؛ انتظار داریم که انتگرالگیری، متناظر با تقسیم تبدیل بر s باشد چراکه تقسیم عکس عمل ضرب است.

قضیهٔ ۳ [انتگرالگیری از $f(t)$]

هرگاه $f(t)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد ودر نامساویی به‌شکل(۲)، بخش ۱.۵ صدق‌کند، آنگاه

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0}^{t} f(\tau)\, d\tau\right\}=\frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\} \qquad (s>0\ ,\ s>\gamma)\cdot \tag{۵}$$

اثبات. فرض می کنیم که $f(t)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد و به‌ازای γ و Mی در نامساوی (۲) بخش ۱.۵ صدق کند. واضح است که اگر (۲) به‌ازای یك γی منفی برقرار باشد، به‌ازای مقادیر مثبت γ نیز برقرار است واز این‌رو می‌توانیم فرض‌کنیم که γ مثبت است در این‌صورت انتگرال

$$g(t)=\int_{0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

پیوسته است و با استفاده از (۲)، بخش ۱.۵ به‌دست می‌آوریم

$$|g(t)| \leqslant \int_{0}^{t} |f(\tau)|\, d\tau \leqslant M\int_{0}^{t} e^{\gamma\tau}\, d\tau=\frac{M}{\gamma}\left(e^{\gamma\tau}-1\right) \quad (\gamma>0)\cdot$$

به‌علاوه، $g'(t)=f(t)$ ، جز در نقاطی‌که $f(t)$ در آنها ناپیوسته است. پس $g'(t)$ بر هر فاصلهٔ متناهی پیوستهٔ تکه‌ای است و بنابر قضیهٔ ۱،

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{g'(t)\}=s\mathscr{L}\{g(t)\}-g(0) \qquad (s>\gamma)\cdot$$

بدیهی است که $g(0)=0$ ، و بنابراین

$$\mathscr{L}(g)=\frac{1}{s}\mathscr{L}(f)\cdot$$

بدین‌ترتیب، اثبات قضیه به‌اتمام می‌رسد. ▲

فرمول (۵) همزادِ مفیدی داردکه با نوشتن $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ، تعویض طرفین، و گرفتن تبدیل معکوس از دو طرف، به‌صورت زیر حاصل می‌شود :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,. \qquad (6)$$

مثال ۵

با فرض $\mathcal{L}(f)=1/s^2(s^2+\omega^2)$ ، $f(t)$ را پیداکنید. از جدول ۱.۵ ، بخش ۱.۵ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t\,.$$

از این رابطه و قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,d\tau=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\,.$$

چنانچه یکبار دیگر از قضیهٔ ۳ استفاده کنیم، جواب مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t(1-\cos\omega\tau)\,d\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

مسائل بخش ۲.۵

با استفاده از قضیهٔ ۱ به‌دست بیاورید :

۱. $\mathcal{L}(\cos t)$ را از $\mathcal{L}(\sin t)$ ۲. $\mathcal{L}(\cosh 2t)$ را از $\mathcal{L}(\sinh 2t)$

با استفاده از قضایای ۱ و ۲، نشان دهید که

۳. $\mathcal{L}(t\cos\omega t)=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ ۴. $\mathcal{L}(t\cosh at)=\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

۵. $\mathcal{L}(t\sinh at)=\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$ ۶. $\mathcal{L}(te^{at})=\dfrac{1}{(s-a)^2}$

با استفاده از مثال ۳ و مسئله ۳، نشان دهید که

۷. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$

۸. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$

۹. با توجه به‌فرمول زیر، درستی نتیجهٔ مثال ۵ را تحقیق کنید

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right).$$

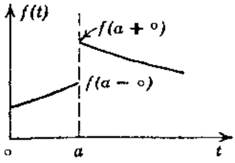
۱۰. $\mathcal{L}(\cos^2 t)$ را پیدا کنید.

(الف) با استفاده از نتیجهٔ مثال ۲؛ (ب) با استفاده از روش به‌کار رفته درمثال۲؛ (ج) با نوشتن $\cos^2 t$ برحسب $\cos 2t$.

۱۱. قضیهٔ ۱ را با ذکر جزئیات اثبات کنید. برای این کار، فرض کنید که $f'(t)$ دارای تعدادی جهش متناهی در t_1، t_2، . . . ، t_m است، و $0<t_1<t_2<\dots<t_m$.

۱۲. (**تعمیم قضیهٔ ۱**) تعمیم زیر از قضیهٔ ۱، از نظر عملی درکاربردها مفید است. نشان دهید که هرگاه $f(t)$ جز در $t=a(>0)$ که درآن دارای یک‌ناپیوستگی معمولی (جهش‌متناهی) است، پیوسته باشد وسایر شرایط، همان شرایط قضیهٔ ۱ باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)-[f(a+0)-f(a-0)]e^{-as}. \qquad (1^*)$$



مسئلهٔ ۱۲

نمودار توابع زیر را رسم کنید، و با استفاده از (۱*)، تبدیل لاپلاس هریک از آنها را بیابید.

۱۳. $f(t)=1$ وقتی $1<t<2$ و درغیر این صورت $f(t)=0$

۱۴. $f(t)=t$ وقتی $0<t<1$ ودرغیر این‌صورت $f(t)=0$

۱۵. $f(t)=t$ وقتی $0<t<1$ و $f(t)=1$ وقتی $1<t<2$ و درغیراین صورت $f(t)=0$

۱۶. $f(t)=t-1$ وقتی $1<t<2$ ودرغیر این صورت $f(t)=0$

با استفاده از قضیهٔ ۳، $f(t)$ را بیابید هرگاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۱۷. $\dfrac{1}{s(s-2)}$ ۱۸. $\dfrac{1}{s(s^2+9)}$ ۱۹. $\dfrac{1}{s(s^2-1)}$

۲۰. $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$ ۲۱. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)$ ۲۲. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s-2}{s^2+4}\right)$

۲۳. $\dfrac{54}{s^3(s-3)}$ ۲۴. $\dfrac{2s-\pi}{s^3(s-\pi)}$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را به کمك تبدیل لاپلاس حل کنید.

۲۵. $y''+9y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=2$

۲۶. $y''+y'-2y=0\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=3$

۲۷. $y''-2y'-3y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=7$

۲۸. $4y''+y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=-2$

۲۹. $y''+2y'-8y=0\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=8$

۳۰. **(معادلهٔ کمکی)** نشان دهید که معادلهٔ کمکی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''+\omega^2 y=r(t) \qquad (\omega \text{ ثابت})$$

دارای جواب

$$Y(s)=\frac{sy(0)+y'(0)}{s^2+\omega^2}+\frac{R(s)}{s^2+\omega^2}$$

است که درآن $R(s)$ تبدیل لاپلاس $r(t)$ است. توجه کنید که جملهٔ اول طرف راست توسط شرایط اولیهٔ داده شده، مثلا $y(0)=k_1$ ، $y'(0)=k_2$ ، کاملا معین می‌شود وجملهٔ دوم مستقل از شرایط اولیه است.

۳.۵ انتقال برمحور s ها، انتقال برمحور t ها، تابع پله‌ای واحد

به کجا رسیده‌ایم و هدف بعدیمان چیست؟ می‌دانیم که تبدیل لاپلاس خطی است (قضیهٔ ۱، بخش ۱.۵) ، می‌دانیم که مشتق $f(t)$ ، به تعبیری با ضرب $\mathcal{L}(f)$ در s متناظر است (قضایای ۱ و ۲ بخش ۲.۵) ؛ و می‌دانیم که این خاصیت نقش عمده‌ای در حل معادلات دیفرانسیل دارد. نمونه‌ای از این روش حل درمثال ۴ بخش ۲.۵[1] ارائه شد، ولی درآنجا می‌توانستیم جواب را به‌آسانی با روشهای معمولی نیز بیابیم.

برای ارائهٔ کاربردهایی که درآنها تبدیل لاپلاس بتواند قدرت واقعی خود را نشان دهد، ابتدا باید خواص دیگری ازاین تبدیل رابه‌دست بیاوریم. دو خاصیت بسیار مهم، به انتقال برمحور s ها و انتقال برمحور t ها مربوط می‌شوند که تحت عنوان دو قضیهٔ انتقال بیان شده‌اند (قضایای ۱ و ۲ همین بخش).

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ اول انتقال: انتقال برمحور s ها)

هرگاه $f(t)$ دارای تبدیل $F(s)$ باشدکه درآن $s>\gamma$، آنگاه $e^{at}f(t)$ دارای تبدیل $F(s-a)$ استکه درآن $s-a>\gamma$؛ بنابراین هرگاه

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s) \quad \text{، آنگاه} \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

یعنی، اگر درتبدیل $s-a$ را به‌جای s قراردهیم («انتقال برمحور sها» شکل ۷۹)، این کار متناظر با ضرب تابع اصلی در e^{at} خواهد بود.

اثبات. بنابر تعریف داریم

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

وبنابراین

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]\,dt=\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}.$$

▲

مثال ۱

با اعمال قضیهٔ ۱ روی فرمولهای ۴، ۷ و ۷ جدول ۱.۵ نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

مثال ۲. ارتعاشات آزاد میرا

جسم کوچکی با جرم $m=۲$ به‌انتهای فنر کشسانی که از سقف آویزان شده، وصل شده است. ثابت فنر $k=۱۰$ فرض می‌شود. فرض کنید $y(t)$ تغییر مکان جسم ازوضعیت‌تعادلِ ایستا باشد. ارتعاشات آزاد جسم را تعیین کنید، اگر موقعیت اولیهٔ آن $y(۰)=۲$ و سرعت اولیه‌اش $y'(۰)=-۴$ باشد، با این فرض که میرایی دستگاه متناسب باسرعت آن، وثابت میرایی $c=۴$ است.

بنا برمعادلهٔ (۷) بخش۲.۶حرکت جسم توسط معادلهٔ $y(t)$، جواب مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر، توصیف می‌شود:

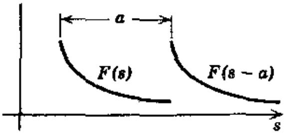
$$y''+۲y'+۵y=۰\,,\;\; y(۰)=۲\,,\;\; y'(۰)=-۴,$$

با استفاده از (۱) و (۲)، بخش ۲.۵، معادلهٔ کمکی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s^۲Y-۲s+۴+۲(sY-۲)+۵Y=۰\,,$$

با حل این معادله نسبت به Y داریم

$$Y(s)=\frac{۲s}{(s+۱)^۲+۲^۲}=۲\times\frac{s+۱}{(s+۱)^۲+۲^۲}-\frac{۲}{(s+۱)^۲+۲^۲}.$$



شکل ۷۹. قضیهٔ اول، انتقال برمحور s ها

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s}{s^۲+۲^۲}\right)=\cos ۲t\,,\quad \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{s^۲+۲^۲}\right)=\sin ۲t.$$

ازاینجا وقضیهٔ ۱، جواب زیر که ازهمان نوعی‌است که انتظارش می‌رفت، حاصل‌می‌شود:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-۱}(Y)=e^{-t}(۲\cos ۲t-\sin ۲t).$$

قضیهٔ اول انتقال (قضیهٔ ۱) به انتقال برمحور sها مربوط می‌شود: تعویض s با $s-a$، در $F(s)$ متناظر است با ضرب تابع اصلی $f(t)$ در e^{at}. حال قضیهٔ دوم انتقال (قضیهٔ ۲) را که به‌انتقال برمحور t ها مربوط می‌شود، بیان می‌کنیم: با اندکی مسامحه می‌توان گفت کـه تعویض t با $t-a$ در $f(t)$ متناظر است با ضرب تبدیل

$F(s)$ در e^{-as}؛ بیان دقیق این مطلب به‌شرح زیر است.

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ دوم انتقال؛ انتقال برمحور t ها)

هرگاه $F(s)$ تبدیل $f(t)$ باشد، آنگاه $e^{-as}F(s)$ (a دلخواه و مثبت) تبدیل تابع زیر است:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$

تبصره. فرمول دوم را می‌توان به طریق دیگری به شرح زیر نوشت. بنا به‌تعریف، **تابع پله‌ای واحد** $u_a(t)$ عبارت است از (شکل ۸۰ را ببینید)

$$u_a(t)=\begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases} \qquad (a\geqslant 0). \tag{1}$$

ملاحظه می‌کنیم که اکنون $f(t)$ را می‌توان به صورت $f(t-a)\,u_a(t)$ نوشت. شکل ۸۱ مثالی از این تابع را نشان می‌دهد. بنا به قضیهٔ ۲،

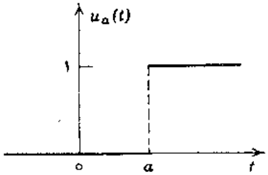
$$e^{-as}F(s)=\mathcal{L}\{f(t-a)\,u_a(t)\}. \tag{2}$$

همچنین، با گرفتن تبدیل معکوس از طرفین، داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)\,u^a(t). \tag{2*}$$

اثبات قضیهٔ ۲. بنا به‌تعریف داریم

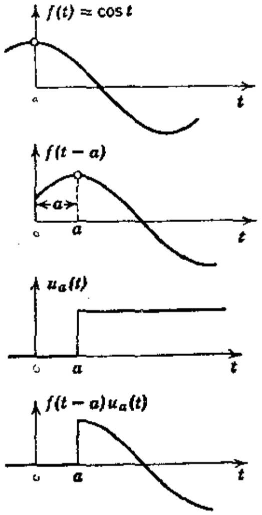
$$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau.$$



شکل ۸۰. تابع پله‌ای واحد $u_a(t)$

با قرار دادن $\tau+a=t$ درانتگرال، به‌دست می‌آوریم

$$e^{-as}F(s)=\int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\,dt\,.$$



شکل ۸۱. مثالی از $f(t-a)\,u_a(t)$ وقتی‌که $f(t)=\cos t$

چنانچه محقق سازیم که انتگرال بالا به ازای هر t درفاصلهٔ ۰ تا a برابر صفر است، آنگاه می‌توانیم قلمرو انتگرالگیری‌فوق‌را ۰ تا ∞ بگیریم. این‌کاررا می‌توان به‌سادگی با ضرب انتگرال در تابع پله‌ای $u_a(t)$ انجام داد:

$$e^{-as}F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)u_a(t)dt=\mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}\,.$$

این همان (۲) است واثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

قبل از آنکه به کاربردهای این قضیه بپردازیم، متذکر می‌شویم که تابع پله‌ای واحد $u_a(t)$ بسیار مهم است. درواقع، خواهیم دید که این تابع سنگ‌بنای توابعی‌است که دانستن آنها تا حد زیادی بر سودمندی تبدیل لاپلاس می‌افزاید.

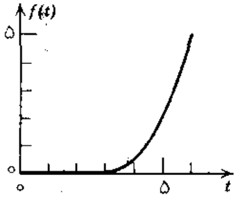
برای استفاده‌های بعدی خاطرنشان می‌کنیم که تبدیل $u_a(t)$ عبارت است از

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\}=\frac{e^{-as}}{s} \qquad (s>0) \tag{۳}$$

این فرمول مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود، زیرا

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\,dt$$
$$= \int_0^a e^{-st} \times (0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st} \times (1)\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_a^\infty .$$

اکنون به‌جرأت می‌توان گفت به‌مرحله‌ای رسیده‌ایم که می‌توانیم به‌مسائلی حمله کنیم که در مورد آنها استفاده از تبدیل لاپلاس برروشهای کلاسیك معمول برتری دارد؛ مثالهای ۵ تا ۷ این مطلب را شرح می‌دهند.

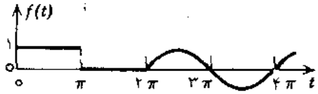


شکل۸۲. مثال ۳

مثال ۳

تبدیل معکوس e^{-3s}/s^3 را بیابید. ازآنجا که $\mathcal{L}^{-1}(1/s^3) = t^2/2$ (ر.ك. جدول ۱.۵ بخش ۱.۵)، قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد (شکل ۸۲)

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-3s}/s^3) = \frac{1}{2}(t-3)^2 u_3(t).$$



شکل ۸۳. مثال ۴

مثال ۴

تبدیل تابع

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

را بیابید (شکل ۸۳). $f(t)$ را می‌توان برحسب توابع پله‌ای واحد نمایش داد:

$$f(t)=u_{\circ}(t)-u_{\pi}(t)+u_{۲\pi}(t)\sin t \cdot$$

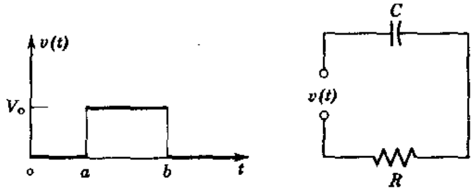
در اینجا به دلیل دوره‌ای بودن سینوس، داریم $\sin t=\sin(t-۲\pi)$. بدین‌ترتیب با توجه به (۳) و (۲) و جدول ۱.۵ (بخش ۱.۵) به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f)=\frac{۱}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-۲\pi s}}{s^{۲}+۱}\cdot$$

مثال ۵. پاسخ مدار RC به تک‌موج مربعی

شدت جریان $i(t)$ درمدار شکل۸۴ را بیابید که یك تك‌موج مربعی با ولتاژ $V_{\circ}$ در مدار فرستاده شود. فرض بر این است که قبل از اعمال این ولتاژ، جریانی ازمدار نمی گذرد.

معادلهٔ مدار عبارت است از(ر.ك. بخش ۹.۱)



شکل ۸۴. مثال ۵

$$Ri(t)+\frac{q(t)}{C}=Ri(t)+\frac{۱}{C}\int_{\circ}^{t}i(\tau)\,d\tau=v(t)$$

که در آن $v(t)$ را می‌توان برحسب دو تابع پله‌ای واحد نمایش داد :

$$v(t)=V_{\circ}[u_{a}(t)-u_{b}(t)]\,.$$

با استفاده از قضیهٔ ۳ بخش ۲.۵ وفرمول (۳)، معادلهٔ کمکی چنین به‌دست می‌آید :

$$RI(s)+\quad\frac{I(s)}{sC}=\frac{V_{\circ}}{s}[e^{-as}-e^{-bs}]\,.$$

جواب این معادله عبارت است از

$$I(s)=F(s)(e^{-as}-e^{-bs}) \qquad \text{که در آن} \qquad F(s)=\frac{V_{\circ}/R}{s+۱/RC}\,.$$

با توجه به‌جدول ۱.۵ از بخش ۱.۵، داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F)=\frac{V_\circ}{R}e^{-t/RC}$$

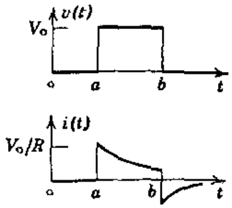
از این‌رو بنابرقضیهٔ ۲ جواب معادله به‌صورت زیر به دست می‌آید : (شکل ۸۵)

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}(I)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}-\mathcal{L}^{-1}\{e^{-bs}F(s)\}$$
$$=\frac{V_\circ}{R}[e^{-(t-a)/RC}u_a(t)-e^{-(t-b)/RC}u_b(t)]\ ;$$

یعنی $i=\circ$ هرگاه $t<a$، و

$$i(t)=\begin{cases} K_1e^{-t/RC} & a<t<b \\ (K_1-K_2)e^{-t/RC} & t>b \end{cases}$$

که در آن $K_1=V_\circ e^{a/RC}/R$ و $K_2=V_\circ e^{b/CR}/R$.



شکل ۸۵. ولتاژ و شدت جریان در مثال ۵

مثال ۶. پاسخ دستگاه نامیرا به‌تک‌موج مربعی

مسئله با مقدار اولیهٔ

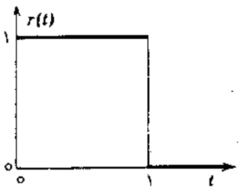
$$y''+2y=r(t)\,,\qquad y(\circ)=\circ\,,\qquad y'(\circ)=\circ$$

را حل کنید، با این‌فرض که $r(t)=1$ اگر $\circ<t<1$، و در غیر این‌صورت $r(t)=\circ$ (شکل ۸۶).

بنابرقضیهٔ ۲، بخش ۲.۵، و باتوجه به شرایط اولیه و فرمول (۳) ، معادلهٔ کمکی

$$s^2Y+2Y=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\,.$$

را به دست می‌آوریم.



شکل ۸۶. ورودی در مثالهای ۶ و ۷

جواب این معادله عبارت است از

$$Y(s)=\frac{۱}{s(s^۲+۲)}-\frac{e^{-s}}{s(s_۲+۲)}.$$

درمورد سمت راست معادله ازکسرهای جزئی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{s(s^۲+۲)}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۲}\right).$$

بدین‌ترتیب با توجه به‌جدول ۱.۵ (بخش ۱.۵) و قضیهٔ ۲،

$$y(t)=\frac{۱}{۲}[۱-\cos\sqrt{۲}t]-\frac{۱}{۲}[۱-\cos\sqrt{۲}(t-۱)]u_۱(t),$$

یعنی

$$y(t)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos\sqrt{۲}\,t & ۰\leqslant t<۱\\ \frac{۱}{۲}\cos\sqrt{۲}(t-۱)-\frac{۱}{۲}\cos\sqrt{۲}\,t & t>۱\end{cases}$$

می‌بینیم که $y(t)$ ترکیبی از نوسانهای هماهنگ را نمایش می‌دهد.

مثال۷. پاسخ دستگاه مرتعش میرا به تک‌موج مربعی

پاسخ دستگاه مرتعش میرای متناظر با

$$y''+۳y'+۲y=r(t),\qquad y(۰)=۰,\qquad y'(۰)=۰$$

را که در آن $r(t)$ همان است که در مثال ۶ بود تعیین کنید (شکل ۸۶).

باهمان روش قبلی، معادلهٔ کمکی

$$s^{2}Y+3sY+2Y=\frac{1}{s}(1-e^{-s}).$$

به‌دست می‌آید که با حل آن نسبت به Y، داریم

$$Y(s)=F(s)(1-e^{-s}) \quad \text{که در آن} \quad F(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

برحسب کسرهای جزئی داریم

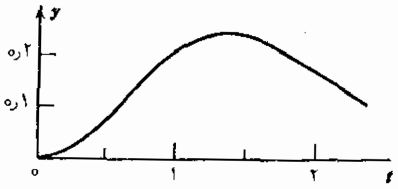
$$F(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}.$$

از این‌رو بنا به‌جدول ۱.۵ (بخش ۱.۵)،

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

بنابراین با توجه به قضیهٔ ۲، داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\}=F(t-1)u_1(t)$$
$$=\begin{cases} 0 & (0\leqslant t<1) \\ \frac{1}{2}-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & (t>1) \end{cases}$$



شکل ۸۷. خروجی در مثال ۷

درنتیجه جواب زیر حاصل می‌شود: (ر.ك. شکل ۸۷)

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=f(t)-f(t-1)u_1(t)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} & (0\leqslant t<1)\\ K_1e^{-t}-K_2e^{-2t} & (t>1)\end{cases}$$

که در آن $K_1=e-1$ و $K_2=(e^2-1)/2$.

مسائل بخش ۳.۵

$\mathcal{L}(f)$ را بیابید، اگر $f(t)$ برابر باشد با

۱. $e^{-2t}\sin n\pi t$ ۲. $e^{-t}\sin(\omega t+\theta)$

۳. $e^{-\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$ ۴. $e^{2t}(a_2t+a_2t^2)$

با نمایش توابع هذلولی‌گون برحسب توابع نمایی وبه‌کاربردن قضیهٔ اول انتقال نشان دهید که

۵. $\mathcal{L}(\cosh at\cos at)=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

۶. $\mathcal{L}(\cosh at\sin at)=\dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$

۷. $\mathcal{L}(\sinh at\cos at)=\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

۸. $\mathcal{L}(\sinh at\sin at)=\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

$f(t)$ را بیابید هرگاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۹. $\dfrac{s+3}{(s+1)^2+1}$ ۱۰. $\dfrac{2s+1}{s^2+4s+13}$

۱۱. $\dfrac{1}{(s-2)^3}+\dfrac{1}{(s-2)^5}$ ۱۲. $\dfrac{bs+c}{(s-a)^2+\omega^2}$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را به‌کمك تبدیل لاپلاس حل کنید.

۱۳. $y''+2y'+5y=0\,,\quad y(0)=2\,,\quad y'(0)=-4$

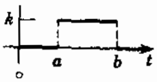
۱۴. $y''-4y'+4y=0\,,\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=2$

۱۵. $y''+2y'+10y=0\,,\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=3$

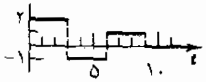
۱۶. $y''+4y'+4y=0\,,\quad y(0)=2\,,\quad y'(0)=-3$

توابع زیر را برحسب توابع پله‌ای واحد نمایش دهید وتبدیل لاپلاس هر یك را بیابید.

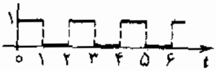
۱۷.



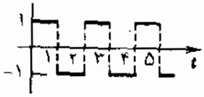
۱۸.



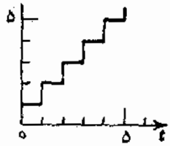
۱۹.



۲۰.

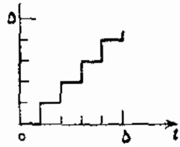


۲۱.



(تابع پلکانی)

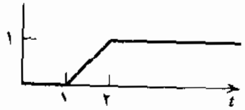
۲۲.



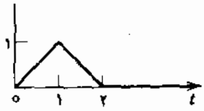
(تابع پلکانی)

با استفاده از قضیهٔ ۳ بخش ۲.۵، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

۲۳.

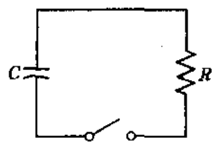


۲۴.

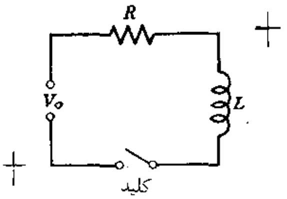


۲۵. خازنی به‌ظرفیت C طوری پر شده که پتانسیل آن V_0 است. کلیدی را که درشکل دیده می‌شود، درلحظهٔ $t=0$ می‌بندیم و خازن شروع به تخلیه شدن در مقاومتی مانند R می‌کند. با استفاده از تبدیل لاپلاس بار $q(t)$ خازن را بیابید.

۲۶. شدت جریان $i(t)$ درمدار شکل زیر را پیدا کنید، با این فرض که درزمان $t\leqslant 0$ جریانی از مدار نمی‌گذرد وکلید درلحظهٔ $t=0$ بسته می‌شود.



مسئله ۲۵



مسئله ۲۶

$f(t)$ را بیابید ونمودار آن را رسم کنید، هر گاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۳۷. $(e^{-۲s}-e^{-s})/s$

۳۸. $e^{-s}/s^{۲}$

۲۹. $(e^{-s}+e^{-۲s}-۳e^{-۲s}+e^{-۶s})/s^{۲}$

۳۰. $(۲e^{-as}-۱)/s$

نمودار توابع زیر را رسم کنید وتبدیل لاپلاس آنها را بیابید.

۳۱. $(t-۱)u_۱(t)$

۳۲. $tu_۱(t)$

۳۳. $u_\pi(t)\cos t$

۳۴. $u_{۲\pi/\omega}(t)\sin\omega t$

۳۵. $e^{kt}u_a(t)$

۳۶. $t^{۲}u_۱(t)$

نمودار توابع زیر را که فرض می‌کنیم درخارج فاصلهٔ داده شده صفر هستند، رسم کنید و تبدیل لاپلاس آنها را بیابید.

۳۷. $K\sin\omega t \quad (۰<t<\pi/\omega)$

۳۸. $K\sin t \quad (۲\pi<t<۴\pi)$

۳۹. $۱-e^{-t} \quad (۰<t<\pi)$

۴۰. $K\cos\omega t \quad (۰<t<\pi/\omega)$

۴۱. $t^{۲} \quad (۰<t<۱)$

۴۲. $t^{۲} \quad (۰<t<۳)$

$f(t)$ را بیابید ونمودار آن را رسم کنید، هر گاه $F(s)=\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۴۳. $e^{-۲s}/s$

۴۴. $e^{-s}/s^{۳}$

۴۵. $e^{-۲s}/(s-۲)$

۴۶. $e^{-s}/(s^{۲}+\pi^{۲})$

۴۷. $e^{-s}/(s-۳)$

۴۸. $(۱-e^{-\pi s})/(s^{۲}+۴)$

۴۹. $e^{-\pi s}/(s^{۲}+۲s+۲)$

۵۰. $s(۱+e^{-\pi s})/(s^{۲}+۱)$

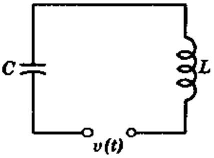
شدت جریان $i(t)$ در مدار LC راکه در شکل نشان داده شده است بیابید. فرض کنید

هانری ۱ $=L$ ، فاراد ۱ $=C$ ؛ همچنین شدت جریان اولیه و بار اولیهٔ خازن را صفر بگیرید و $v(t)$ را یکی ازمقادیرزیرانتخاب کنید.

۵۱. $v=t$ هر گاه $0<t<a$ ودرغیر این‌صورت $v=0$

۵۲. $v=t$ هر گاه $0<t<a$ ، و$v=a$ هر گاه $t>a$

۵۳. $v=1-e^{-t}$ هر گاه $0<t<\pi$ ، ودرغیر این‌صورت $v=0$



مسائل ۵۱ تا ۵۳. مدار LC

۵۴. هر گاه $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ، نشان دهید که $\mathcal{L}\{f(at)\}=F(s/a)/a$. با استفاده از این فرمول، تبدیل $\sin \omega t$ را از روی تبدیل $\sin t$ به‌دست آورید.

۵۵. نشان دهید که (۲) نتیجه می‌دهد

$$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}=\mathcal{L}\{f(t)u_a(t)\}, \qquad (۲^{**})$$

بعضی وقتها استفاده از این فرمول درکاربردها سبب سادگی کار می‌شود.

۴.۵ مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات

تبدیل لاپلاس خواص کلی بسیار زیادی داردکه برای به‌دست آوردن تبدیلات یاتبدیلات معکوس می‌توان‌ازآنها استفاده کرد. روشهای‌مربوط به‌این‌خواص عبارتندازانتگرالگیری مستقیم (بخش ۱.۵) ، استفاده از خطی بودن (بخش ۱.۵) ، انتقال (بخش ۳.۵) و مشتقگیری یا انتگرالگیری ازتابع اصلی $f(t)$ (بخش ۲.۵). اما این تمام مطالب نیست: دراین بخش مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات $F(s)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و اعمال متناظر را برای توابع اصلی $f(t)$ می‌یابیم . دربخش بعدی ضرب تبدیلات را بررسی می‌کنیم و عمل متناظر را برای توابع اصلی پیدا می‌کنیم

می‌توان نشان دادکه هر گاه $f(t)$ در شرایط قضیهٔ وجود بخش ۱.۵ صدق کند ، آنگاه مشتق تبدیل آن

$$F(s)=\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

نسبت به s می‌توان با مشتقگیری از تابع زیر علامت انتگرال نسبت بـه s بەدست‌آورد (اثبات در مرجع [A۳])؛ بنابراین

$$F'(s) = -\int_{0}^{\infty} e^{-st}[t\,f(t)]\,dt\,.$$

درنتیجه، هرگاه $\mathcal{L}(f) = F(s)$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)\,; \qquad (۱)$$

مشتقگیری از تبدیل یك تابع با ضرب آن تابع در $-t$ متناظر است.

این خاصیت تبدیل لاپلاس ما را قادر می‌سازد که از تبدیلهای مفروض، تبدیلهای جدیدی بەدست آوریم.

مثال ۱

سه فرمول زیر را بەدست می‌آوریم:

	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$
(۲)	$\dfrac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)$
(۳)	$\dfrac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta}\sin\beta t$
(۴)	$\dfrac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta}(\sin\beta t + \beta t\cos\beta t)$

از (۱) وفرمول ۸ (با $\omega = \beta$) جدول ۱.۵ بخش ۱.۵ بەدست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(t\sin\beta t) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}\,.$$

باتقسیم طرفین این رابطه‌بر 2β فرمول(۳) حاصل‌می‌شود. از (۱) وفرمول ۹ (با $\omega = \beta$) جدول ۱.۵ بخش ۱.۵ می‌یابیم

$$\mathcal{L}(t\cos\beta t) = \qquad (۵)$$

$$-\frac{(s^2+\beta^2) - 2s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

که درستی تساوی آخر را می‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌سادگی تحقیق کرد. ازاین‌رو

$$t\cos\beta t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sin\beta t - 2\beta^2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}\right\}.$$

ومشاهده می‌کنیم‌که $\mathcal{L}^{-1}\{\ldots\}$ درطرف راست برابر $f(t)$ در (۲) است. سرانجام با اضافه وکم کردن β^2 درصورت کسر داریم

$$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

با توجه به (۵) و (۲) ملاحظه می‌کنیم‌که دو جملهٔ طرف راست، به ترتیب، تبدیلات معکوس $t\cos\beta t$ و $(\sin\beta t - \beta t\cos\beta t)/2\beta$ هستند و (۴) حاصل می‌شود.

همین‌طور هرگاه $f(t)$ درشرایط قضیهٔ وجود بخش ۱.۵ صدق کند و حد $f(t)/t$ وقتی که t از راست به‌صفر میل می‌کند، موجود باشد آنگاه

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds \qquad (s>\gamma); \tag{۶}$$

بدین طریق، انتگرالگیری از تبدیل تابع $f(t)$ با تقسیم $f(t)$ بر t متناظر است

درواقع، بنابر تعریف نتیجه می‌شود که

$$\int_s^\infty F(\bar{s})\,d\bar{s} = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\bar{s}t}f(t)\,dt\right]d\bar{s}$$

ومی‌توان نشان داد که (ر. ک. مرجع [A۳]) با فرضهای فوق‌می‌شود ترتیب انتگرالگیری را عوض کرد، یعنی

$$\int_s^\infty F(\bar{s})\,d\bar{s} = \int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-\bar{s}t}f(t)\,d\bar{s}\right]dt = \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-\bar{s}t}d\bar{s}\right]dt.$$

درطرف راست، انتگرال نسبت به $\bar{s}$، وقتی که $s>\gamma$، برابر e^{-st}/t است وبنابراین

$$\int_s^\infty F(\bar{s})\,ds = \int_0^\infty e^{-\bar{s}t}\frac{f(t)}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \qquad (\bar{s}>\gamma).$$

مثال ۲

تبدیل معکوس تابع $\ln(1+\omega^2/s^2)$ را بیابید. با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{d}{ds}\ln\left(۱+\frac{\omega^۲}{s^۲}\right)=\frac{۲\omega^۲}{s(s^۲+\omega^۲)}=\frac{۲}{s}-۲\frac{s}{s^۲+\omega^۲}\,\cdot$$

درستی تساوی دوم را می‌توان به‌سادگی با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کرد. این $F(s)$ ماست. با توجه به‌جدول ۱.۵، بخش ۱.۵، به‌دست می‌آوریم

$$f(t)=\mathcal{L}^{-۱}(F)=\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲}{s}-۲\frac{s}{s^۲+\omega^۲}\right\}=۲-۲\cos\omega t\,\cdot$$

این تابع درشرایطی صدق می‌کندکه تحت آنها (۶) برقرار است. بنابراین

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\ln\left(۱+\frac{\omega^۲}{s^۲}\right)\right\}=\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}=\frac{f(t)}{t}\,,$$

ونتیجه چنین است

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\ln\left(۱+\frac{\omega^۲}{s^۲}\right)\right\}=\frac{۲}{t}(۱-\cos\omega t)\,\cdot$$

مسائل بخش ۴.۵

با استفاده از (۱)، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

۱. te^t ۲. $t^۲e^{۲t}$ ۳. $t\sin ۳t$

۴. $t^۲e^{-t}$ ۵. $t^۲\cos t$ ۶. $te^{-t}\cos t$

۷. $te^{-t}\cosh ۲t$ ۸. $t^۲\sinh ۲t$ ۹. $te^{-۲t}\sin t$

با استفاده از (۶)، $f(t)$ را بیابید هرگاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۱۰. $\frac{۱}{(s-۴)^۲}$ ۱۱. $\frac{۲s}{(s^۲+۱)^۲}$ ۱۲. $\frac{۲}{(s-a)^۳}$

۱۳. $\operatorname{arc\,cot}(s+۱)$ ۱۴. $\operatorname{arc\,cot}\frac{s}{\omega}$ ۱۵. $\ln\frac{s}{s-۱}$

۱۶. $\ln\frac{s+a}{s-a}$ ۱۷. $\ln\frac{s+a}{s+b}$ ۱۸. $\ln\frac{s^۲+۱}{(s-۱)^۲}$

۱۹. **(چندجمله‌ایهای لاگر)** چندجمله‌ای لاگر مرتبه n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_{\circ}(t)=\text{۱}\,, \quad l_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \qquad n=\text{۱}\,,\,\text{۲}\,,\,\cdots$$

(این چند جمله‌ای را معمولاً با نماد L_n نشان می‌دهند ولی ، نظر به‌اینکه ما توابع را با حروف کوچك و تبدیلات را با حروف بزرگ نمایش داده‌ایم، نماد l_n را به‌کار می‌بریم.) نشان دهید که $l_n(t)$ نسبت به t یك چندجمله‌ای مرتبه n است. با استفاده از یکی از قضایای انتقال (بخش ۳.۵) و فرمول مربوط به‌تبدیل مشتق n ام (بخش ۲.۵)، نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{l_n(t)\}=\frac{(s-\text{۱})^n}{s^{n+\text{۱}}}\,.$$

۲۰. معادلهٔ دیفرانسیل لاگر عبارت است از

$$ty''+(\text{۱}-t)\,y'+ny=\text{۰}\,.$$

با استفاده از(۱) و مسئلهٔ ۱۹ جوابی برای این‌معادله بیابید. (دراینجا دو نکته جلب توجه می‌کند. (الف) به‌ازای $Y=\mathcal{L}\{y\}$ باز هم یك معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آید، اما معادله‌ای که به سادگی می‌توان آن را حل کرد. (ب) جواب عمومی y به‌دست نمی‌آید. می‌توان نشان داد که معادله جواب مستقل دیگری دارد که تبدیل لاپلاس آن وجود ندارد.)

۵.۵ پیچش

خاصیت کلی مهم دیگر تبدیل لاپلاس‌درمورد حاصل‌ضرب تبدیلات است. درواقع، هرگاه $f(t)$ و $g(t)$ ، تبدیلات معکوس $F(s)$ و $G(s)$ ، معلوم باشند ، آنگاه با استفاده از $f(t)$ و $g(t)$ می‌توان $h(t)$ ، تبدیل معکوس حاصل ضرب $H(s)=F(s)G(s)$ ، را محاسبه کرد. تابع $h(t)$ به‌صورت $(f*g)(t)$ نوشته می‌شود، که نمادی است متعارف وپیچش f و g نامیده می‌شود. شکل پیچش درقضیهٔ زیر بیان شده است ؛ اهمیت عملی این قضیه آشکار است زیرا موقعیتی که در بالا مورد بحث قرار گرفت اغلب درکاربردها پیش می‌آید.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ پیچش)

هرگاه $f(t)$ و $g(t)$ به ترتیب تبدیلات معکوس $F(s)$ و $G(s)$ باشند و درمفروضات قضیهٔ وجود (بخش ۱.۵) صدق کنند آنگاه $h(t)$ ، تبدیل معکوس حاصل‌ضرب $H(s)=F(s)G(s)$ ، پیچش $f(t)$ و $g(t)$ است‌که به‌صورت $(f*g)(t)$ نوشته می‌شود وچنین تعریف می‌گردد :

$$h(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau . \qquad (1)$$

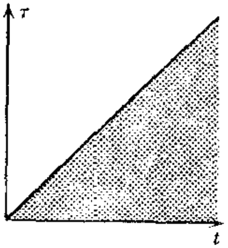
اثبات. با توجه به‌تعریف $G(s)$ و قضیهٔ اول انتقال، به‌ازای هر τ ی مشخص $(\tau\geqslant 0)$ داریم

$$e^{-s\tau}G(s)=\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)\,u_\tau(t)\,dt=\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\,dt$$

که درآن $s>\gamma$. از این‌رو با توجه به‌تعریف $F(s)$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_\tau^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,G(s)\,d\tau\\&=\int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\,dt\,d\tau\end{aligned}$$

با فرض $s>\gamma$. ابتدا نسبت به t از τ تا ∞ انتگرال می گیریم و سپس نسبت به τ از ۰ تا ∞؛ این ناحیه ، مطابق شکل ۸۸، متناظر با قسمت هاشور خوردهٔ گوه‌ای‌شکل درصفحهٔ $t\tau$ است که تا بینهایت ادامه دارد. فرضهای‌ما درمورد f و g طوری است که می‌توانیم ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم. (اثباتی که مستلزم اطلاع از همگرایی



شکل ۸۸. ناحیهٔ انتگرالگیری در صفحهٔ $t\tau$ــ اثبات قضیهٔ ۱

یکنواخت است، درمرجع [B۳] ضمیمهٔ ۱ آمده است.) سپس نخست نسبت به τ از ۰ تا t (ر. ك. شکل ۸۸) و بعد نسبت به t از ۰ تا ∞ انتگرال می گیریم؛ بنابراین

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt=\mathcal{L}(h)\end{aligned}$$

که درآن h از فرمول (۱) تعیین می‌شود. بدین ترتیب اثبات به‌انجام می‌رسد. ▲

خواننده می‌تواند با استفاده از تعریف نشان دهد که پیچش $f * g$ دارای خواص زیر است:

$$f * g = g * f \qquad \text{(قانون جابه‌جایی)}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(قانون پخشپذیری)}$$

$$(f * g) * v = f * (g * v) \qquad \text{(قانون انجمنی)}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0 .$$

این خواص شبیه خواص ضرب اعداد است. اما درحالت کلی $g \neq g$ ۱. مثلاهرگاه $g(t) = t$، آنگاه

$$(1 * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot (t-\tau)\, d = \frac{t^2}{2} \cdot$$

خاصیت غیرعادی دیگر اینکه ممکن است $(f * f)(t) \geqslant 0$ برقرار نباشد.

اکنون خواهیم دید که پیچش برای یافتن تبدیلات معکوس وحل معادلات دیفرانسیل مفید است.

مثال ۱

با فرض $H(s) = (1/s^2)(s-a)$، $h(t)$ را پیدا کنید. با توجه به جدول ۱.۵ (بخش ۱.۵) داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t\,, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

با استفاده از قضیهٔ ۱ وانتگرالگیری جزء به‌جزء به‌دست می‌آوریم

$$h(t) = t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{at} \int_0^t \tau e^{-a\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$$

مثال ۲. نوسانات واداشته، تشدید

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید:

$$my'' + ky = F_0 \sin pt\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0.$$

از بخش ۱۳.۲ می‌دانیم که این معادله به‌نوسانات واداشتهٔ جسمی به‌جرم m که به انتهای فنر کشسانی بسته شده است مربوط می‌شود (انتهای بالایی فنر ثابت است ، شکل ۸۹). k مدول فنر و $F_0 \sin pt$ نیروی راننده یا ورودی است. با قراردادن $\omega_0 = \sqrt{k/m}$، معادلهٔ مزبور را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin pt \qquad \left(K = \frac{F_0}{m} \right).$$

معادلهٔ کمکی عبارت است از

$$s^2 Y + \omega_0^2 Y = K \frac{p}{s^2 + p^2}. \tag{۲}$$

که جواب آن چنین است

$$Y(s) = \frac{Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)}. \tag{۳}$$

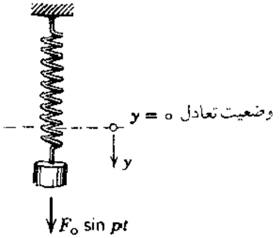
حال

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \right\} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2 + p^2} \right\} = \frac{1}{p} \sin pt.$$

از این‌رو بنابر قضیهٔ پیچش

$$y(t) = \frac{Kp}{\omega_0 p} \sin \omega_0 t * \sin pt = \frac{K}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 \tau \sin(pt - p\tau)\, d\tau. \tag{۴}$$



شکل ۸۹. دستگاه مرتعش، نوسانات واداشته

انتگران مساوی است با [ر. ك. (۱۱) ضمیمهٔ ۳]

$$(۵)\qquad \frac{۱}{۲}[-\cos(pt+(\omega_\circ-p)\tau)+\cos(pt-(\omega_\circ+p)\tau)]\,.$$

وقتی تشدید روی نمی‌دهد. اگر $p^۲\neq\omega_\circ^۲$، با انتگرالگیری نسبت به τ به دست می‌آوریم

$$y(t)=\frac{K}{۲\omega_\circ}\left[-\frac{\sin(pt+(\omega_\circ-p)\tau)}{\omega_\circ-p}+\frac{\sin(pt-(\omega_\circ+p)\tau)}{-\omega_\circ-p}\right]_\circ^t$$

$$=\frac{K}{۲\omega_\circ}\left[\frac{\sin pt-\sin\omega_\circ t}{\omega_\circ-p}+\frac{\sin pt+\sin\omega_\circ t}{\omega_\circ+p}\right].$$

پس‌از مخرج مشترك گرفتن وخلاصه کردن، نتیجه می گیریم

$$y(t)=\frac{K}{p^۲-\omega_\circ^۲}\left[\frac{p}{\omega_\circ}\sin\omega_\circ t-\sin pt\right].$$

این معادله برهمنهشی ازدو نوسان همساز را نمایش می‌دهد که بسامدهایشان عبارتند از بسامد طبیعی دستگاه، درحالتی که به‌صورت آزاد ارتعاش می کند، وبسامد نیروی راننده.
وقتی تشدید روی می‌دهد. هر گاه $p=\omega_\circ$، آنگاه به‌سادگی، به‌صورت زیردرمی‌آید :

$$\frac{۱}{۲}[-\cos\omega_\circ t+\cos(\omega_\circ t-۲\omega_\circ\tau)]\,.$$

انتگرالگیری نسبت به τ نتیجه می‌دهد

$$y(t)=\frac{K}{۲\omega_\circ}\left[-\tau\cos\omega_\circ t-\frac{۱}{۲\omega_\circ}\sin(\omega_\circ-۲\omega_\circ\tau)\right]_\circ^t$$

$$=\frac{K}{۲\omega_\circ^۲}[\sin\omega_\circ t-\omega_\circ t\cos\omega_\circ t]\,.$$

این معادله نشان می‌دهد، همان‌طور که دربخش ۱۳.۲ دیدیم، دستگاه درحال تشدیداست.

مسائل بخش ۱.۳

پیچشهای زیر را بیابید. [راهنمایی. درمسائل ۶ تا ۹ از فرمول (۱۱) ضمیمهٔ ۳ استفاده کنید]

۱. $1*1$ ۲. $1*\sin t$ ۳. e^t*e^t

۴. $e^{at} * e^{bt} \quad (a \neq b)$ ۵. $t * e^{at}$ ۶. $\sin t * \sin t$

۷. $\sin t * \sin 2t$ ۸. $\cos t * \cos t$ ۹. $\sin t * \cos t$

به کمك قضیهٔ پیچش $h(t)$ را بیابید هرگاه $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ برابر باشد با

۱۰. $\dfrac{1}{(s-a)^2}$ ۱۱. $\dfrac{1}{(s-a)^3}$

۱۲. $(a \neq b) \quad \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ ۱۳. $\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$

۱۴. $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ ۱۵. $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

۱۶. $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ ۱۷. $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$

۱۸. $(a^2 \neq b^2) \quad \dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

۱۹. قانون جابه‌جایی $f * g = g * f$ را ثابت کنید.

۲۰. قانون انجمنی $(f * g) * v = f * (g * v)$ را ثابت کنید.

۲۱. قانون پخشپذیری $f * (g_1 + g_2) = f y_1 + f * g_2$ را ثابت کنید.

۲۲. با استفاده از قضیهٔ پیچش، به کمك استقرا ثابت کنید که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}.$$

۲۳. چگونه می‌توانیم قضیهٔ ۳، بخش ۲.۵، را از قضیهٔ پیچش به‌دست آوریم؟

۲۴. مثالی بیاورید که امکان عدم برقراری $(f * f)(t) \geqslant 0$ را نشان دهد. (فرض کنید $f(t) = \cos t$.)

با به‌کار بردن پیچش، مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۲۵. $y'' + y = \sin 3t\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$

۲۶. $y'' + y = \sin t\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$

۲۷. $y'' + 2y = r(t)$، که درآن $r(t) = 1$ هرگاه $0 < t < 1$ ، و $r(t) = 0$

هر گاه $t > 1$ و $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 0$.

معادلات انتگرالی. یك معادلهٔ انتگرالی معادلــه‌ای است که در آن تابع مجهول ، مثلا $y(t)$ ، زیر علامت انتگرال است. مسائل زیر بعضی از انواع معادلات انتگرالی را که می‌توان با توجه به‌قضیهٔ پیچش حلشان کرد نشان می‌دهند.

۲۸. $$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

۲۹. $$y(t) = \sin 2t + \int_0^t y(\tau)\sin 2(t-\tau)\,d\tau$$

۳۰. $$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

۶.۵ کسرهای جزئی

بیشتر مسائلی که تاکنون دراین فصل بررسی شدند به‌معادله‌ای کمکی منجر گردیدند کــه جواب آن $y(s)$ به‌صورت

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

بود که $F(s)$ و $G(s)$ چندجمله‌ایهایی از s بودند. درچنین موردی برای‌تعیین‌جواب مسئله ، $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ ، می‌توان ابتدا $Y(s)$ را برحسب کسرهای جزئی نوشت. درواقع، این همان‌کاری است که دربرخی حالات ساده‌تر، به‌صورتی خاص و بدون‌اشکال، انجام دادیم. دربخش حاضر با درنظر گرفتن فرض زیر، به‌طور منظمتر و اصولیتری وارد بحث کسرهای جزئی می‌شویم.

فرض

$F(s)$ و $G(s)$ دارای ضرایبی حقیقی هستند و عامل مشترکی ندارند. درجهٔ $F(s)$ کمتر از درجهٔ $G(s)$ است.

شکل کسرهای جزئی به‌نوع عوامل $G(s)$ بستگی دارد. نخست یادآوری می‌کنیم که با تبدیلات معکوس متناظر که درذیل آمده‌اند قبلا آشنا شده‌ایم. به‌عامل غیرمکرر $s-a$ از $G(s)$ کسر جزئی $A/(s-a)$ مربوط می‌شود و (ر.ك. جدول ۱.۵ بخش ۱.۵)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-a}\right\} = A\,e^{at}$$

به‌عامل مکرر $(s-a)^m$ مجموع زیر مربوط می‌شود:

$$\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-۱}}{(s-a)^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_۱}{s-a}$$

و (ر.ك. مثال ۱، بخش ۳.۵)

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{A_k}{(s-a)^k}\right\}=A_k\frac{t^k}{(k-۱)!}e^{at}$$

که در آن m , ... , ۱ $=k$. درحالتی که ۰ $=G(s)$ دارای ریشهٔ مختلط $a=\alpha+i\beta$ باشد، باتوجه‌به‌اینکه عدد مختلط $\bar{a}=\alpha-i\beta$ نیز ریشهٔ ۰ $=G(s)$ است، و از آنجا که ضرایب $G(s)$ حقیقی هستند، ومی‌توان از نوشتن کسرهای جزئی مختلط اجتناب کرد، در نتیجه، بااستفاده ازرابطهٔ $(s-a)(s-\bar{a})=(s-\alpha)^۲+\beta^۲$ می‌توانیم کسرهایی به‌شکل

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^۲+\beta^۲}$$

تشکیل دهیم هرگاه $s-a$ و $s-\bar{a}$ عوامل غیرمکرر $G(s)$ باشند وکسرهایی به‌شکل

$$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^۲+\beta^۲]^۲}+\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^۲+\beta^۲}$$

تشکیل دهیم هرگاه $s-a$ و $s-\bar{a}$ عوامل مکرر $G(s)$ باشند. در این‌صورت لازم است (ر.ك. مثال ۱ بخش ۳.۵)

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{As+B}{(s-a)(s-\bar{a})}\right\}=\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^۲+\beta^۲}\right\}$$

$$=e^{\alpha t}\left[A\cos\beta t+\frac{\alpha A+B}{\beta}\sin\beta t\right]$$

و (ر.ك. مثال ۱ بخش ۴.۵)

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{[(s-a)^۲+\beta^۲]^۲}\right\}$$

$$=e^{\alpha t}\left[\frac{At}{۲\beta}\sin\beta t+\frac{\alpha A+B}{۲\beta^۳}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t\right]$$

[عوامل‌مختلط $(s-a)^۳$، $(s-a)^۴$، . . . ، راکه درعمل‌ازاهمیت کمتری برخوردارند بررسی نمی‌کنیم.] آنچه می‌ماند تعیین ثابتهای A و B و غیره است که برای این‌کار هم روشهایی درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی ارائه‌شده است؟ حال دانشجو می‌تواند

بیدرنگ مثالهای ۱ تا ۴ (همین بخش) را بررسی کند ودرستی نتایج فوق‌را به‌هر روشی که می‌داند؛ یعنی با به‌کاربردن روش دلخواه خود برای تعیین این ضرایب، تحقیق کند.
برای آنکه مطلب‌راکامل کنیم، روشی‌مبتنی‌برنظام ارائه می‌دهیم که چگونگی به‌دست آوردن این‌ثابتها را ازکمیتهایی‌که مستقیماً به $Y(s)=F(s)/G(s)$ مربوط می‌شوند، نشان می‌دهد.

نمادگذاری

روابط (۱ الف)، (۲ الف)، ...، (۵ الف) (که در زیر می‌آیند) نمایشهای $Y(s)=F(s)/G(s)$ هستند و در هرحالت، $W(s)$ نشان دهندهٔ حاصل‌جمع کسرهای جزئیی است‌که با عوامل خطیی (غیرمکرریامکرر) از $G(s)$ که موردنظرما نیستند متناظرند.

حالت ۱. عوامل غیرمکرر $s-a$. در این حالت،

$$Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{A}{s-a}+W(s). \qquad (۱\ \text{الف})$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$\mathcal{L}^{-1}(Y)=Ae^{at}+\mathcal{L}^{-1}(W) \qquad (۱\ \text{ب})$$

که در آن A یا یکی از دوعبارت زیر داده می‌شود

$$A=\frac{F(a)}{G'(a)} \qquad \text{یا} \qquad A=Q_a(a) \qquad (۱\ \text{پ})$$

و $Q_a(s)$ تابعی است‌که از $Y(s)$، پس ازحذف عامل $s-a$ از $G(s)$ باقی می‌ماند؛ یعنی

$$Q_a(s)=\frac{(s-a)\,F(s)}{G(s)}. \qquad (۱\ \text{ت})$$

شاخص a در Q_a برای تأکید براین امر مهم است‌که Q_a به a بستگی دارد و مقدارآن وقتی از یك عامل خطی به‌سراغ عامل خطی دیگر می‌رویم، تغییر می‌کند.

حالت ۲. عامل مکرر $(s-a)^m$ دراین حالت

$$Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\dots+\frac{A_1}{s-a}+W(s). \qquad (۲\ \text{الف})$$

تبدیل معکوس این عبارت برابراست با

$$(۲ب)\quad \mathcal{L}^{-1}(Y)=e^{at}\left(A_m\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_2\frac{t}{1!}+A_1\right)+\mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن ثابتهای A_1، . . . ، A_m از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۲پ)\quad A_m=Q_a(a)\,,\quad A_k=\frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}Q_a(s)}{ds^{m-k}}\bigg|_{s=a}\quad(k=1,\ldots,m-1);$$

در اینجا

$$Q_a(s)=\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}.$$

عوامل مختلط. درحالات پیشین عدد a می‌توانست حقیقی ویامختلط باشد، ولی هر گاه a مختلط باشد، استفاده از بعضی فرمولهای دیگر ازنقطه‌نظر عملی ترجیح دارد، فرض کنید

$$a=\alpha+i\beta \quad \text{و} \quad \bar{a}=\alpha-i\beta \qquad .(\alpha \text{ ، } \beta \text{ حقیقی ، } \beta\neq 0)$$

هر گاه $s=a$ ریشه‌ای از $G(s)=0$ باشد، آنگاه، چون ضرایب $G(s)$ حقیقی هستند، $s=\bar{a}$ نیز ریشه‌ای از $G(s)=0$ خواهد بود.

حالت ۳. عوامل مختلط مکرر یا غیرمکرر $s-a$ ، با نوشتن کسر جزئی متناظر با $s-a$ و $s-\bar{a}$ به‌طور مشروح و باتوجه به‌اینکه

$$(s-a)(s-\bar{a})=(s-\alpha)^2+\beta^2\,,$$

داریم

$$(۳\text{الف})\qquad Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+W(s)\quad(A \text{ و } B \text{ حقیقی}).$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$(۳ب)\qquad \mathcal{L}^{-1}(Y)=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}(T_a\cos\beta t+S_a\sin\beta t)+\mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن S_a و T_a قسمتهای حقیقی وموهومی

$$(۳پ)\qquad R_a(a)=S_a+iT_a$$

هستند، دراینجا

$$(۳ت)\qquad R_a(s)=[(s-\alpha)^2+\beta^2]\frac{F(s)}{G(s)}$$

حالت ۴. عامل مختلط مکرر $(s-a)^2$. با نوشتن‌کسرهای جزئی متناظر با $(s-a)^2$ و $(s-\bar{a})^2$ به‌طور مشروح، داریم

$$Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+W(s) \quad \text{(۴ الف)}$$

که درآن A ، B ، C ، D حقیقی هستند. تبدیل معکوس عبارت است از

$$\mathcal{L}^{-1}(Y)=\frac{1}{2\beta^3}e^{\alpha t}[(T_a-\beta S_a^*-\beta S_a t)\cos\beta t \quad \text{(۴ ب)}$$

$$+(S_a+\beta T_a^*+\beta T_a t)\sin\beta t]+\mathcal{L}^{-1}(W)$$

که درآن

$$R_a(a)=S_a+iT_a\,,\quad R'_a(a)=S_a^*+iT_a^* \quad \text{(۴ پ)}$$

و

$$R_a(s)=[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2\frac{F(s)}{G(s)}\,. \quad \text{(۴ ت)}$$

اثبات فرمولها

اثبات درحالت ۱. با ضرب (۱الف) در $s-a$ وبا استفاده از (۱ت)، داریم

$$Q_a(s)=A+(s-a)W(s)\,.$$

با فرض $s\to a$ وبا توجه به‌اینکه $W(s)$ شامل عامل $s-a$ نیست به‌فرمول اول ذکرشده در (۱پ)، $A=Q_a(a)$ ، می‌رسیم. هرگاه (۱ت) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$Q_a(s)=\frac{F(s)}{G(s)/(s-a)}$$

و فرض‌کنیم $s\to a$ آنگاه $F(s)\to F(a)$، و مخرج به‌صورت نامعین ۰/۰ درمی‌آید که بارفع ابهام از آن به‌روش معمول، به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{s\to a}\frac{G(s)}{s-a}=\lim_{a\to s}\frac{G'(s)}{(s-a)'}=G'(a)\,.$$

بدین ترتیب فرمول دوم ذکرشده در (۱پ) اثبات می‌شود. تبدیل معکوس $A/(s-a)$ عبارت است از Ae^{at}، و بنابراین اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

اثبات درحالت ۲. با ضرب (۲ الف) در $(s-a)^m$ وبا استفاده از (۲ ت) داریم

$$Q_a(s)=A_m+(s-a)A_{m-1}+(s-a)^2A_{m-2}+\cdots+(s-a)^m W(s)\,.$$

ازاین‌رو $Q_a(a)=A_m$. با مشتقگیری نتیجه می گیریم

$$Q_a'(s)=A_{m-1}+(\text{جملات دیگری که شامل عاملهای } s-a \text{ هستند}).$$

پس $Q_a'(a)=A_{m-1}$ زیرا داخل پرانتز به‌ازای $s=a$ صفر می‌شود. با مشتقگیری‌مجدد می‌یابیم $Q_a''(a)=2!\,A_{m-2}$ و غیره؛ بدین ترتیب (۲پ) ثابت می‌شود. تبدیل معکوس $A_k/(s-a)^k$ عبارت است از $A_k e^{at} t^{k-1}/(k-1)!$ و بدین ترتیب (۲ ب) نتیجه می‌شود. ▲

اثبات درحالت ۳. با ضرب (۳ الف) در $(s-\alpha)^2+\beta^2$، با استفاده از (۳ ت)، و با فرض $s \to a$ به‌دست می‌آوریم

$$R_a(a)=aA+B=(\alpha+i\beta)\,A+B\,.$$

قسمتهای حقیقی وموهومی دو طرف باید برابر باشند. بنابراین با استفاده از (۳پ)داریم

$$S_a=\alpha A+B\,,\quad T_a=\beta A\,.$$

از این‌رو در (۳ الف)،

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\,\frac{T_a(s-\alpha)+\beta S_a}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\,.$$

با توجه به‌این تساوی ومثال ۱ بخش ۳.۵ رابطهٔ (۳ ب) را به‌دست می‌آوریم. ▲

اثبات درحالت ۴. با معرفی نماد

$$p(s)=(s-a)(s-\bar{a})=(s-\alpha)^2+\beta^2\,,$$

با ضرب (۴ الف) در p^2، وبا استفاده از (۴ ت) داریم

$$R_a(s)=As+B+(Cs+D)\,p(s)+p^2(s)\,W(s)\,.$$

حال فرض می کنیم $s \to a$. نظر به‌اینکه $p(a)=0$، به‌سادگی به‌دست می‌آوریم

$$R_a(a)=aA+B=(\alpha+i\beta)\,A+B\,. \tag{5}$$

با مشتقگیری از $R_a(s)$ نسبت به s نتیجه می گیریم

$$R_a'(s)=A+(Cs+D)\,p'(s)+(p(s) \text{ جملات شامل عامل})$$

چون $p(a)=0$ و $p'(a)=2(a-\alpha)=2i\beta$ نتیجه می‌شود که

$$R_a'(a)=A+2i\beta\,[C(\alpha+i\beta)+D]\,. \tag{6}$$

در (۵) و (۶) قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین معادله‌ها باید برابر باشند. بنابراین با استفاده از (۴ پ) به‌دست می‌آوریم

$$S_a = \alpha A + B\,, \quad T_a = \beta A \tag{۷}$$

و به‌علاوه

$$S_a{}^* = A - ۲\beta^۲ C\,, \quad T_a{}^* = ۲\alpha\beta C + ۲\beta D\,,$$

که نتیجه می‌دهد

$$C = (T_a - \beta S_a{}^*)/۲\beta^۳\,, \quad \alpha C + D = T_\alpha{}^*/۲\beta\,. \tag{۸}$$

با توجه به‌مثال ۱، بخش ۳.۵، مشاهده می‌کنیم که کسر جزئی

$$\frac{Cs+D}{(s-\alpha)^۲+\beta^۲} = \frac{C(s-\alpha)+\alpha C+D}{(s-\alpha)^۲+\beta^۲}$$

در (۴ الف) دارای تبدیل معکوس زیر است:

$$e^{\alpha t}[\beta C\cos\beta t + (D+\alpha C)\sin\beta t]/\beta\,.$$

کسر جزئی دیگر، یعنی

$$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^۲+\beta^۲]^۲} = \frac{A(s-\alpha)^۲+\alpha A+B}{[(s-\alpha)^۲+\beta^۲]^۲}$$

دارای تبدیل معکوس

$$e^{\alpha t}[(A\beta^۲ t+\alpha A+B)\sin\beta t - (\alpha A+B)\beta t\cos\beta t]/۲\beta^۳$$

است که ازمثال ۱ بخش ۴.۵ نتیجه می‌شود. باقراردادن (۷) و (۸) درعبارت بالا وخلاصه کردن آن، (۴ ب) حاصل می‌شود واثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

مثال ۱

تبدیل معکوس

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{s+۱}{s^۳+s^۲+۶s}$$

را بیابید. مخرج دارای سه‌عامل خطی متمایز s، $s-۲$، و $s+۳$ است که متناظرند با ریشه‌های $a_۱ = ۰$، $a_۲ = ۲$ و $a_۳ = -۳$. از این‌رو

$$Y(s) = \frac{s+۱}{s(s-۲)(s+۳)} = \frac{A_۱}{s} + \frac{A_۲}{s-۲} + \frac{A_۳}{s+۳}\,,$$

و $F(s)=s+1$، $G'(s)=3s^2+2s-6$. بنابراین بسا استفاده از (۱ پ) به دست می‌آوریم

$$A_1=\frac{F(0)}{G'(0)}=-\frac{1}{6}, \quad A_2=\frac{F(2)}{G'(2)}=\frac{3}{10}, \quad A_3=\frac{F(-3)}{G'(-3)}=-\frac{2}{15}.$$

با توجه به‌این مقادیر و (۱ ب)، تبدیل معکوس عبارت است از

$$\mathcal{L}^{-1}(Y)=-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}.$$

مثال ۲

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید:

$$y''-3y'+2y=4t+e^{3t}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-1.$$

با توجه به‌جدول ۱.۵، بخش ۱.۵، و روابط (۱) و (۲) بخش ۲.۵، معادلهٔ کمکی چنین است:

$$s^2Y-s+1-3(sY-1)+2Y=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s-3}.$$

با حل این معادله نسبت به Y و با نمایش Y برحسب کسرهای جزئی، داریم

$$Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{s^4-7s^3+13s^2+4s-12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)}$$

$$=\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_1}{s}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s-1}.$$

نخست ثابتهای A_1 و A_2 را در کسرهای جزئی متناظر با ریشهٔ $a=0$ تعیین می‌کنیم. در (۲ ت) و (۲ پ)،

$$Q_0(s)=\frac{F(s)}{(s-3)(s^2-3s+2)}, \quad A_2=Q_0(0)=2, \quad A_1=Q'_0(0)=3.$$

با استفاده از (۱ پ) سایر ضرایب را به‌دست می‌آوریم:

$$B=\left.\frac{F(s)}{s^2(s^2-3s+2)}\right|_{s=3}=\frac{1}{2}, \quad C=\left.\frac{F(s)}{s^2(s-3)(s-1)}\right|_{s=2}=-2,$$

$$D=\left.\frac{F(s)}{s^2(s-3)(s-2)}\right|_{s=1}=-\frac{1}{2},$$

با توجه به (۱ ب) و (۲ ب) ملاحظه می‌کنیم که جواب عبارت است از

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=2t+3+\frac{1}{2}e^{3t}-2e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}.$$

دانشجو می‌تواند مسئله را به‌روش کلاسیك حل کند و به‌این ترتیب خود را متقاعد سازد که روش حاضر بسیار ساده‌تر است و سریعتر به‌نتیجه می‌رسد.

مثال ۳. نوسانات واداشته، تشدید

مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ طرح شده درمثال۲ بخش ۵.۵ را با روش کسرهای جزئی حل کنید.

وقتی تشدید روی نمی‌دهد. هر گاه $p^2\neq\omega_0^2$، $Y(s)$ جواب معادلهٔ کمکی (۲) بخش ۵.۵ و نمایش آن برحسب کسرهای جزئی عبارت است از

$$Y(s)=\frac{Kp}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+p^2)}=\frac{As+B}{s^2+\omega_0^2}+\frac{Ms+N}{s^2+p^2}. \tag{۹}$$

نخست A و B را در کسر متناظر با $a_1=\alpha_1+i\beta_1=i\omega_0$ تعیین می‌کنیم. در (۳ پ)،

$$R_{a_1}(a_1)=S_{a_1}+iT_{a_1}=\left.\frac{Kp}{s^2+p^2}\right|_{s=a_1}=\frac{Kp}{p^2-\omega_0^2}$$

بنابراین $T_{a_1}=0$. با توجه به این رابطه و (۳ ب)، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل معکوس اولین کسر سمت راست (۹) عبارت است از

$$\frac{Kp}{\omega_0(p^2-\omega_0^2)}\sin\omega_0 t.$$

حال M و N را در کسر دوم که متناظر است با $a_2=\alpha_2+i\beta_2=ip$، تعیین می‌کنیم. در (۳ پ) داریم

$$R_{a_2}(a_2)=S_{a_2}+iT_{a_2}=\left.\frac{Kp}{s^2+\omega_0^2}\right|_{s=a_2}=\frac{Kp}{\omega_0^2-p^2}.$$

از این‌رو $T_{a_2}=0$. با توجه به (۳ب) نتیجه می گیریم که تبدیل معکوس این کسر عبارت است از

$$-\frac{K}{p^2-\omega_0^2}\sin pt.$$

با جمع کردن این دو تبدیل جواب مطلوب را به‌دست می‌آوریم:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=\frac{K}{p^2-\omega_0^2}\left(\frac{p}{\omega_0}\sin\omega_0 t-\sin pt\right).$$

وقتی تشدید روی می‌دهد. هر گاه $p=\omega_0$، جواب معادلهٔ کمکی عبارت است از

$$Y(s)=\frac{K\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}\,.$$

مخرج دارای ریشهٔ مضاعف $a=\alpha+i\beta=i\omega_0$ و $\bar{a}=-i\omega_0$ است یعنی $\alpha=0$ و $\beta=\omega_0$. در (۴ پ) و (۴ ت)،

$$R_a(s)=K\omega_0\,,\quad S_a=K\omega_0\,,\quad T_a=0\,,\quad R_a'(s)=0\,,$$

و از (۴ ب) جواب زیر حاصل می‌شود:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=\frac{K}{2\omega_0^2}(\sin\omega_0 t-\omega_0 t\cos\omega_0 t)\,.$$

نتایج اخیر با نتایج مثال ۲ بخش ۵.۵ مطابقت دارد. ▲

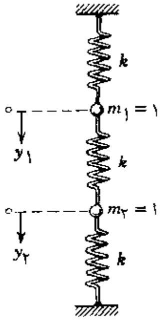
دستگاه معادلات دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس را می‌توان برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز به‌کار برد. این‌روش‌را با ارائهٔ یك مثال نوعی توضیح می‌دهیم.

مثال ۴. ارتعاش دو جرم

دستگاه مکانیکی شکل ۹۰ متشکل از دوجرم وسه فنراست وازمعادلات دیفرانسیل زیر تبعیت می کند.

$$\begin{aligned} y_1''&=-ky_1+k(y_2-y_1)\\ y_2''&=-k(y_2-y_1)-ky_2 \end{aligned}\qquad(10)$$



شکل ۹۰. مثال ۴

دراین معادلات k مدول‌هر کدام ازفنرها و y_1 و y_2 فاصلهٔ جرمها ازوضعیت تعادل‌ایستایشان است؛ از جرم فنرها و از میرایی صرفنظر می‌شود. برای به دست آوردن معادلات (۱۵) همان کاری را می‌کنیم که درمورد معادلهٔ دیفرانسیل ذکر شده در بخش ۶.۲ انجام دادیم؛ بخش ۱.۳ را نیز ببینید.

می‌خواهیم جواب متناظر با شرایط اولیهٔ $y_1(0)=1$ ، $y_2(0)=1$، $y_1'(0)=\sqrt{3k}$ ، $y_2'(0)=-\sqrt{3k}$ را تعیین کنیم. فرض کنید $Y_1=\mathcal{L}(y_1)$ و همچنین $Y_2=\mathcal{L}(y_2)$. دراین صورت با توجه به رابطهٔ (۲) بخش ۲.۵ وشرایط اولیه، معادلات کمکی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s^2Y_1-s-\sqrt{3k}=-kY_1+k(Y_2-Y_1)$$
$$s^2Y_2-s+\sqrt{3k}=-k(Y_2-Y_1)-kY_2.$$

این دستگاه معادلات جبری خطی، برحسب مجهولات Y_1 و Y_2، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(s^2+2k)Y_1-\quad kY_2\quad=s+\sqrt{3k}$$
$$-kY_1\quad+(s^2+2k)Y_2=s-\sqrt{3k}\,.$$

از قاعدهٔ کرامر* (بخش ۹.۷) یا به کمك روش حذفی، جواب زیر را نتیجه می گیریم

$$Y_1=\frac{(s+\sqrt{3k})(s^2+2k)+k(s-\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2-k^2}$$

$$Y_2=\frac{(s^2+2k)(s-\sqrt{3k})+k(s+\sqrt{3k})}{(s^2+2k)^2-k^2}\,.$$

نمایش این دوکسر برحسب کسرهای جزئی چنین است:

$$Y_1=\frac{s}{s^2+k}+\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k},\qquad Y_2=\frac{s}{s^2+k}-\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\,.$$

از این‌رو جواب مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ داده شده عبارت است از

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y_1)=\cos\sqrt{k}\,t+\sin\sqrt{3k}\,t$$
$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y_2)=\cos\sqrt{k}\,t-\sin\sqrt{3k}\,t.$$

---

* Cramer

مسائل بخش ۶.۵

۱. معادلات (۱۰) از مثال ۴ را به‌دست آورید.

با استفاده ازکسرهای جزئی $f(t)$ را بیابید، هر گاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۲. $\dfrac{3s-2}{s^2-s}$

۳. $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$

۴. $\dfrac{s^2+9s-9}{s^3-9s}$

۵. $\dfrac{4s+4}{s^2+16}$

۶. $\dfrac{s}{s^2+2s+2}$

۷. $\dfrac{s}{(s+1)^2}$

۸. $\dfrac{s^3+6s^2+14s}{(s+2)^4}$

۹. $\dfrac{2s^2-3s}{(s-2)(s-1)^2}$

۱۰. $\dfrac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$

۱۱. $\dfrac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2}$

۱۲. $\dfrac{3s^2-6s+7}{(s^2-2s+5)^2}$

۱۳. $\dfrac{s^3-3s^2+6s-4}{(s^2-2s+2)^2}$

۱۴. مسائل ۳ و ۱۰ را با استفاده از فرمولهای پیچش حل کنید.

نشان دهید که

۱۵. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}\right\}=\cosh at\cos at$

۱۶. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^4+4a^4}\right\}=\dfrac{1}{2a^2}\sinh at\sin at$

۱۷. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}\right\}=\dfrac{1}{2a}(\cosh at\sin at+\sinh at\cos at)$

۱۸. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4a^4}\right\}=\dfrac{1}{4a^3}(\cosh at\sin at-\sinh at\cos at)$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را به‌کمك تبدیل لاپلاس حل کنید.

۱۹. $y''-3y'+2y=6e^{-t}\ ,\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=3$

۲۰. $y''+2y'-3y=10\sinh 2t\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=4$

۲۱. $y''-4y=8t^2-4\ ,\ y(0)=5\ ,\ y'(0)=10$

۲۲. $y''-2y'+5y=8\sin t-4\cos t\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=3$

۲۳. $y''+2y'+y=2\cos t\ ,\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=0$

۲۴. $y''+y=-2\sin t\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$

دستگاه معادلات دیفرانسیل. مسائل بامقدار اولیهٔ زیررا به‌کمك تبدیل لاپلاس حل کنید.

۲۵. $y_1'=-y_2\ ,\ y_2'=y_1\ ,\ y_1(0)=1\ ,\ y_2(0)=0$

۲۶. $y_1'+y_2=2\cos t\ ,\ y_1+y_2'=0\ ,\ y_1(0)=0\ ,\ y_2(0)=1$

۲۷. $y_1''=y_1+3y_2\ ,\ y_2''=4y_1-4e^t\ ,\ y_1(0)=2$
$y_1'(0)=2\ ,\ y_2(0)=1\ ,\ y_2'(0)=3$

۲۸. $y_1''+y_2=-5\cos 2t\ ,\ y_2''+y_1=5\cos 2t$
$y_1(0)=1\ ,\ y_1'(0)=1\ ,\ y_2(0)=-1\ ,\ y_2'(0)=1$

۲۹. $y_1'+y_2'=2\sinh t\ ,\ y_2'+y_3'=e^t\ ,\ y_3'+y_1'=2e^t+e^{-t}\ ,$
$y_1(0)=1\ ,\ y_2(0)=1\ ,\ y_3(0)=0$

۳۰. $-2y_1'+y_2'+y_3'=0\ ,\ y_1'+y_2'=4t+2\ ,\ y_2'+y_3=t^2+2\ ,$
$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=0$

۷.۵ توابع دوره‌ای. چندکاربرد دیگر

توابع دوره‌ای دربسیاری ازمسائل عملی ظاهر می‌شوند، این توابع دراکثرمواردپیچیده‌تر از توابع صرفاً کسینوسی یا سینوسی هستند. این امر عنوان بخش حاضرراکه با روشی منظم به‌تبدیل توابع دوره‌ای می‌پردازد، توجیه می‌کند. درمتن درس ومسائل انتهای‌بخش نیز کاربردهای بیشتری را گنجانده‌ایم.

فرض کنید $f(t)$ تابعی باشد کسه به ازای هرمقدار مثبت t تعریف شده و دارای دورهٔ $p(>0)$ است، یعنی

$$f(t+p)=f(t) \qquad \text{به‌ازای هر } t>0$$

هرگاه $f(t)$ برفاصله‌ای به‌طول p پیوستهٔ تکه‌ای باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن موجود است و می‌توان انتگرال ازصفر تا بینهایت آن را به‌صورت یك سری ازانتگرالهای روی دوره‌های متوالی نوشت:

$$\mathcal{L}(f)=\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=\int_{0}^{p} e^{-st}f\,dt+\int_{p}^{2p} e^{-st}f\,dt+\int_{2p}^{3p} e^{-st}f\,dt+\cdots.$$

هرگاه درانتگرال دوم قراردهیم $t=\tau+p$، درانتگرال سوم $t=\tau+2p$، ...، ودر انتگرال n ام $t=\tau+(n-1)p$، ...، آنگاه حدود جدید همگی ازصفر تا p خواهند بود. چون

$$f(\tau+p)=f(\tau),\quad f(\tau+2p)=f(\tau),$$

و غیره، بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f)=\int_{0}^{p} e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{p} e^{-s(\tau+p)}f(\tau)\,d\tau+\int_{0}^{p} e^{-s(\tau+2p)}f(\tau)\,d\tau+\cdots$$

عواملی‌راکه به τ بستگی ندارند می‌توان‌از زیرعلامت‌انتگرال‌خارج کرد؛ درنتیجه

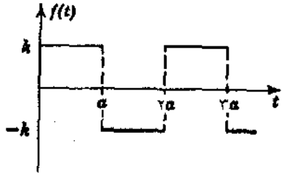
$$\mathcal{L}(f)=[1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\cdots]\int_{0}^{p} e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau.$$

سری داخل کروشه سریی هندسی است که مجموع آن برابر $1/(1-e^{-ps})$ است. باتوجه به‌این مطالب، قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

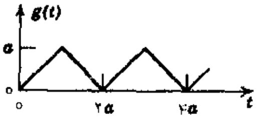
قضیهٔ ۱ (تبدیل توابع دوره‌ای)

تبدیل لاپلاس تابع پیوستهٔ تکه‌ای $f(t)$ که دورهٔ آن p است عبارت است از

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_{0}^{p} e^{-st}f(t)\,dt \qquad (s>0). \tag{1}$$



شکل ۹۱. مثال ۱



شکل ۹۲. مثال ۲

مثال ۱. موج مربعی دوره‌ای

تبدیل موج مربعی نشان داده شده درشکل ۹۱ را بیابید. دراینجا $p=۲a$ ، وبا توجه به (۱) ما با انتگرالگیری مستقیم و ساده‌کردن نتیجه به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f)=\frac{۱}{۱-e^{-۲as}}\left(\int_{۰}^{a} ke^{-st}dt+\int_{a}^{۲a}(-k)\,e^{-st}dt\right)$$
$$=\frac{k}{s}\;\frac{۱-۲e^{-as}+e^{-۲as}}{(۱+e^{-as})(۱-e^{-as})}=\frac{k}{s}\left(\frac{۱-e^{-as}}{۱+e^{-as}}\right)$$
$$=\frac{k}{s}\;\frac{e^{-as/۲}(e^{as/۲}-e^{-as/۲})}{e^{-as/۲}(e^{as/۲}+e^{-as/۲})}$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}(f)=\frac{k}{s}\tanh\frac{as}{۲}\cdot$$

می‌توانیم این فرمول را به شکل دیگری نیز بنویسیم که گرچه به‌زیبایی فرمول بالا نیست ولی اکثر اوقات مفیدتر ازآن واقع می‌شود:

$$\mathcal{L}(f)=\frac{k}{s}\left(\frac{۱-e^{-as}}{۱+e^{-as}}\right)=\frac{k}{s}\left(۱-\frac{۲e^{-as}}{۱+e^{-as}}\right)=\frac{k}{s}\left(۱-\frac{۲}{e^{as}+۱}\right)\cdot$$

مثال ۲. موج مثلثی دوره‌ای

تبدیل تابع دوره‌ای نشان داده شده در شکل ۹۲ را پیدا کنید. ملاحظه می‌کنیم که $g(t)$ انتگرال تابع $f(t)$، با $k=۱$ ، درمثال۱ است. پس، بنابر قضیهٔ ۳ از بخش ۲.۵ داریم

$$\mathcal{L}(g)=\frac{۱}{s}\,\mathcal{L}(f)=\frac{۱}{s^{۲}}\tanh\frac{as}{۲}\cdot$$

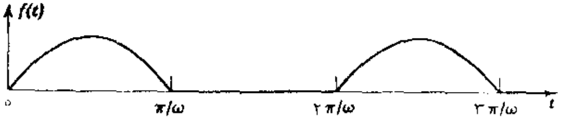
مثال ۳. یکسوکنندهٔ نیم‌موجی

تبدیل تابع $f(t)$ زیر راکه دورهٔ آن $p=۲\pi/\omega$ است پیدا کنید:

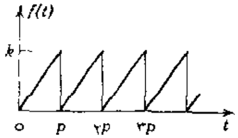
$$f(t)=\begin{cases}\sin\omega t & ۰<t<\dfrac{\pi}{\omega},\\[2mm] ۰ & \dfrac{\pi}{\omega}<t<\dfrac{۲\pi}{\omega}.\end{cases}$$

توجه کنید که این تابع یکسو شدهٔ نیم‌موجی $\sin \omega t$ است (شکل ۹۳). بنابر(۱) داریم

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin \omega t\, dt \, .$$



شکل ۹۳. یکسو شدهٔ نیم‌موجی $\sin \omega t$



شکل ۹۴. موج دندانه اره‌ای

با انتگرالگیری جزء به‌جزء یا با توجه به‌اینکه انتگرال فوق قسمت موهومی انتگرال

$$\int_0^{\pi/\omega} e^{(-s+i\omega)t}\,dt=\frac{1}{-s+i\omega}e^{(-s+i\omega)t}\Big|_0^{\pi/\omega}=\frac{-s-i\omega}{s^2+\omega^2}(-e^{-s\pi/\omega}-1)$$

است، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\mathcal{L}(f)=\frac{\omega(1+e^{-\pi s/\omega})}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-2\pi s/\omega})}=\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-s\pi/\omega})} \, .$$

مثال ۴. موج دندانه‌اره‌ای

تبدیل لاپلاس تابع (شکل ۹۴) $f(t)=\frac{k}{p}t$ را در صورتی که $0<t<p$ ، و $f(t+p)=f(t)$ بیابید. با انتگرالگیری جزء به‌جزء داریم

$$\int_0^p e^{-st}t\,dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^p+\frac{1}{s}\int_0^p e^{-st}\,dt$$

$$=-\frac{p}{s}e^{-sp}-\frac{1}{s^2}(e^{-sp}-1),$$

و بنابراین از (۱) نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\mathcal{L}(f)=\frac{k}{ps^{۲}}-\frac{ke^{-ps}}{s(۱-e^{-ps})} \qquad (s>۰)\,.$$

مثال ۵. تابع پلکانی

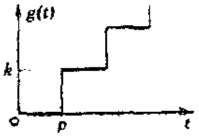
تبدیل لاپلاس تابع پلکانی زیر را بیابید (شکل ۹۵) :

$$g(t)=kn \qquad [np<t<(n+۱)\,p\,,\quad n=۰\,,۱\,,۲\,,\ldots]\,.$$

چون $g(t)$ برابر تفاضل توابع $h(t)=kt/p$ (که تبدیل آن $k/ps^{۲}$ است) و $f(t)$ ذکرشده درمثال ۴ است، داریم

$$\mathcal{L}(g)=\mathcal{L}(h)-\mathcal{L}(f)=\frac{ke^{-ps}}{s(۱-e^{-ps})} \qquad (s>۰).$$

مثال بعدی کاربرد تبدیل لاپلاس را درمورد یک‌معادلهٔ دیفرانسیل غیر همگن‌خطی که درطرف راست آن یک تابع دوره‌ای وجود دارد، نشان می‌دهد.



شکل ۹۵. تابع پلکانی

مثال ۶. نوسانات واداشته

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y''+۲y'+۱۰y=r(t) \tag{۲}$$

دراین معادله (شکل ۹۶)

$$r(t)=\begin{cases} ۱ & (۰<t<\pi) \\ -۱ & (\pi<t<۲\pi) \end{cases} \qquad r(t+۲\pi)=r(t)\,.$$

معادلهٔ کمکی (۲) عبارت است از

$$s^{۲}Y-sy(۰)-y'(۰)+۲[sY-y(۰)]+۱۰Y=R(s)\,,$$

که درآن $R(s)$ نشان دهندهٔ تبدیل $r(t)$ است. با حل این معادله نسبت به Y داریم

$$Y(s)=\frac{(s+۲)y(۰)+y'(۰)}{s^{۲}+۲s+۱۰}+\frac{R(s)}{s^{۲}+۲s+۱۰}\cdot \qquad (۳)$$

ریشه‌های مخرج عبارتند از

$a=-۱+۳i$ و $\bar{a}=-۱-۳i$.

تبدیل معکوس جملهٔ اول (۳) چنین است:

$$(۴) \qquad \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{(s+۲)y(۰)+y'(۰)}{s^{۲}+۲s+۱۰}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{(s+۱)y(۰)}{(s+۱)^{۲}+۹}+\frac{y(۰)+y'(۰)}{(s+۱)^{۲}+۹}\right\}$$

$$=e^{-t}\left(y(۰)\cos ۳t+\frac{y(۰)+y'(۰)}{۳}\sin ۳t\right).$$

این جواب معادلهٔ همگن متناظر با معادلهٔ (۲) است. جملهٔ دوم (۳) را درنظر می گیریم‌و $R(s)$ را تعیین می کنیم. $r(t)$ را می‌توان برحسب توابع پله‌ای نمایش داد (بخش۳.۵):

$$r(t)=u_{۰}(t)-۲u_{\pi}(t)+۲u_{۲\pi}(t)-۲u_{۳\pi}(t)+-\cdots.$$

از رابطهٔ (۳) بخش ۳.۵ ، تبدیل زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$R(s)=\mathcal{L}(r)=\frac{۱}{s}\left[۱-۲e^{-\pi s}+۲e^{-۲\pi s}-۲e^{-۳\pi s}+-\cdots\right].$$

بنابراین

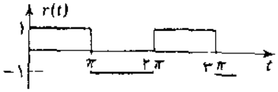
$$\frac{R(s)}{s^{۲}+۲s+۱۰}=\frac{۱}{s[(s+۱)^{۲}+۹]}\{۱-۲e^{-\pi s}+-\cdots\}.$$

حال می‌دانیم که

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۹}\right\}=\frac{۱}{۳}e^{-t}\sin ۳t.$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ۳ بخش ۲.۵ داریم

$$(۵) \qquad \mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۹}\right)\right\}=\frac{۱}{۳}\int_{۰}^{t}e^{-\tau}\sin ۳\tau\, d\tau=\frac{۱}{۱۰}[۱-h(t)]$$



شکل ۹۶. ورودی $r(t)$ در مثال ۶

که درآن

$$h(t)=e^{-t}\left(\cos ۳t+\frac{۱}{۳}\sin ۳t\right) \qquad (۶)$$

اگر تابع واقع درطرف راست (۵) را با $f(t)$ نشان دهیم،

$$f(t)=\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t)}{۱۰},$$

و قضیهٔ دوم انتقال (بخش ۳.۵) را به‌کاربریم به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{R(s)}{s^۲+۲s+۱۰}\right\} \qquad (۷)$$

$$=f(t)-۲f(t-\pi)u_\pi(t)+۲f(t-۲\pi)u_{۲\pi}(t)-+\cdots.$$

حال درمورد جملات طرف راست داریم

$$h(t-\pi)=e^{-(t-\pi)}\left[\cos ۳(t-\pi)+\frac{۱}{۳}\sin ۳(t-\pi)\right]=-h(t)e^\pi,$$

و همین طور،

$$h(t-۲\pi)=h(t)e^{۲\pi}, \quad h(t-۳\pi)=-h(t)e^{۳\pi},$$

و غیره. نتیجه می گیریم که در (۷)،

$$f(t-\pi)=\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t-\pi)}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{h(t)}{۱۰}e^\pi$$

$$f(t-۲\pi)=\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t-۲\pi)}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t)}{۱۰}e^{۲\pi}$$

و غیره. طرف راست (۷) مساوی می‌شود با

$$\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t)}{۱۰} \qquad ۰<t<\pi,$$

$$-\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t)}{۱۰}-\frac{h(t)}{۵}e^{\pi} \qquad \pi<t<۲\pi\,,$$

$$\frac{۱}{۱۰}-\frac{h(t)}{۱۰}-\frac{h(t)}{۵}(e^{\pi}+e^{۲\pi}) \qquad ۲\pi<t<۳\pi\,.$$

$$\frac{(-۱)^n}{۱۰}+\frac{h(t)}{۱۰}-\frac{h(t)}{۵}(۱+e^{\pi}+\dots+e^{n\pi}) \quad n\pi<t<(n+۱)\pi\,.$$

با محاسبهٔ مجموع جملات تصاعد هندسی متناهی داخل پرانتز، عبارت سطر آخر را می‌توان چنین نوشت:

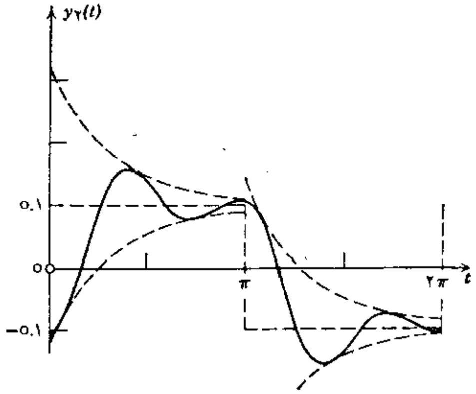
$$\frac{(-۱)^n}{۱۰}+\frac{h(t)}{۱۰}-\frac{h(t)}{۵}\left(\frac{e^{(n+۱)\pi}-۱}{e^{\pi}-۱}\right).$$

با توجه به‌فرمول (۶)، عبارت بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۸)\quad \left[\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۵(e^{\pi}-۱)}\right]e^{-t}\left(\cos ۳t+\frac{۱}{۳}\sin ۳t\right)$$
$$+\frac{(-۱)^n}{۱۰}-\frac{۱}{۵(e^{\pi}-۱)}e^{-[t-(n+۱)\pi]}\left(\cos ۳t+\frac{۱}{۳}\sin ۳t\right).$$

وجواب (۲) درفاصلهٔ $n\pi<t<(n+۱)\pi$ برابر باحاصل جمع عبارت(۸) وعبارت سمت راست (۴) است.

واضح است که وقتی t به‌سمت بینهایت میل می‌کند، تابع ذکرشده در (۴) وتابع موجود درسطر اول (۸) هردو به‌سمت صفر میل می‌کنند. تابع ذکرشده درسطر دوم (۸) تابعی است دوره‌ای از t با دورهٔ ۲π و بنابراین



شکل ۹۷. خروجی حالت پایرجای (۹) درمثال ۶

جواب حالت پایرجای مسئله را نمایش می‌دهد. برای اینکه مطلب بیشتر روشن شود، این تابع را با $y_۲(t)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\tau = t - n\pi$. آنگاه $t = \tau + n\pi$ و هنگامی که t از $n\pi$ تا $(n+۱)\pi$ تغییر کند. τ از ۰ تا π تغییر می‌کند. به‌علاوه،

$$\cos ۳t = \cos(۳\tau + ۳n\pi) = \cos ۳\tau \cos ۳n\pi = (-۱)^n \cos ۳\tau,$$

$$\sin ۳t = \sin(۳\tau + ۳n\pi) = \sin ۳\tau \cos ۳n\pi = (-۱)^n \sin ۳\tau,$$

و خواهیم داشت:

$$y_۲ = (-۱)^n \left[\frac{۱}{۱۰} - \frac{e^{-\tau+\pi}}{۵(e^\pi - ۱)} \left(\cos ۳\tau + \frac{۱}{۳} \sin ۳\tau \right) \right] \qquad (۹)$$
$$\approx (-۱)^n \left[۰٫۱ - ۰٫۲۲ e^{-\tau} \cos(۳\tau - ۰٫۳۲) \right]$$

که در آن $۰ < \tau < \pi$ و $t = \tau + n\pi$، $n = ۰, ۱, \ldots$. شکل ۹۷ این تابع را نشان می‌دهد؛ نموداری که در این شکل دیده می‌شود به‌ازای $۰ < t < \pi$ از (۹) با $n = ۰$ و $\tau = t$، و به‌ازای $\pi < t < ۲\pi$ از (۹) با $n = ۱$ و $t = \tau + \pi$ به دست آمده است.

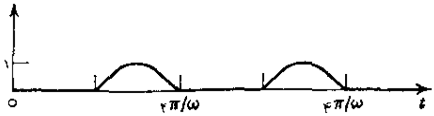
شاید این نتیجه عجیب باشد که خروجی $y_۲$ با سرعتی بیش از ورودی $r(t)$ تمایل به‌نوسان دارد. دلیل این رفتار غیرمنتظره درملاحظات بعدی، درمبحث سری فوریه، بخش ۷.۱۰، روشن خواهد شد.

مسائل بخش ۷.۵

۱. قضیهٔ ۱ رادرموردتابع $f(t) = ۱$، که باهردورهٔ p یك تابع دوره‌ای‌است، به‌کاربرید.

۲. نشان دهید که جواب $y_۲$ درمثال ۶، در ۰ و π پیوسته است.

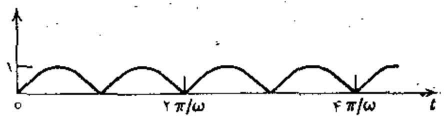
۳. تبدیل لاپلاس یکسوشدهٔ نیم موجی $-\sin \omega t$ را بیابید (شکل ۹۸).



شکل ۹۸. مسئلهٔ ۳

۴. مسئلهٔ ۳ را با به‌کاربردن قضیهٔ ۲ بخش ۳.۵ درمورد نتیجهٔ مثال ۳، حل کنید.

۵. تبدیل لاپلاس یکسو شدهٔ تمام موجی $\sin \omega t$ را بیابید (شکل ۹۹).



شکل ۹۹. مسئلهٔ ۵

۶. جواب مسئلهٔ ۵ را با استفاده از نتایج مثال ۳ ومسئلهٔ ۳ کنترل کنید.

۷. تبدیل لاپلاس $|\cos \omega t|$ را بیابید.

نمودار توابع زیر را، که دورهٔ آنها 2π فرض می‌شود، رسم کنید وتبدیل هریك رابیابید.

۸. $f(t)=2\pi-t \quad (0<t<2\pi)$

۹. $f(t)=e^{t} \quad (0<t<2\pi)$

۱۰. $f(t)=t^{2} \quad (0<t<2\pi)$

۱۱. $f(t)=K\sin(t/2) \quad (0<t<2\pi)$

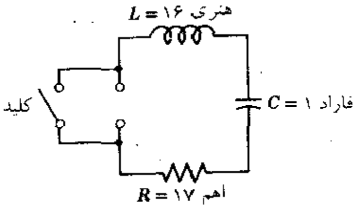
۱۲. $f(t)=1 \quad (0<t<\pi),\quad f(t)=-1 \quad (\pi<t<2\pi)$

۱۳. $f(t)=t \quad (0<t<\pi),\quad f(t)=\pi-t \quad (\pi<t<2\pi)$

۱۴. $f(t)=0 \quad (0<t<\pi),\quad f(t)=t-\pi \quad (\pi<t<2\pi)$

۱۵. $f(t)=t \quad (0<t<\pi),\quad f(t)=0 \quad (\pi<t<2\pi)$

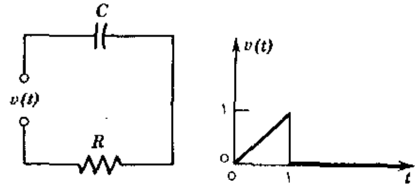
۱۶. خازنی (فاراد ۱ $=C$) تا پتانسیل ولت۱۰۰ $=V_0$ پرشده است. در لحظهٔ $t=0$ کلید بسته می‌شود وخازن شروع به تخلیه شدن می‌کند (شکل ۱۰۰). شدت جریان مدار وبار خازن را بیابید.



شکل ۱۰۰. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. پاسخ مدار RC شکل ۱۰۱ (شدت جریان $i(t)$ مدار) را به‌موج شیبی پیدا کنید.

فرض براین است که درلحظهٔ $t = ۰$ جریانی ازمدار نمی گذرد.

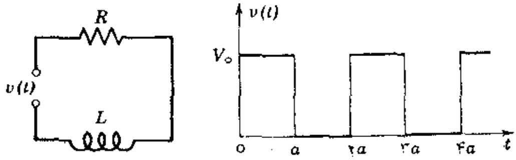


شکل ۱۰۱. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. مسئلهٔ ۱۷ را بدون استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. دلیل جهش $i(t)$ در $t = ۱$ را بیان کنید.

۱۹. شدت جریان $i(t)$ درمدار RC شکل ۱۰۱ را بیابید درصورتی که

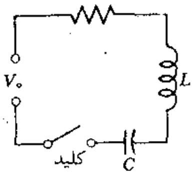
$$v(t) = \sin \omega t \quad \left(۰ < t < \frac{\pi}{\omega} \right) \text{ ، } v(t) = ۰ \left(t > \frac{\pi}{\omega} \right) \text{ ، و } i(۰) = ۰$$



شکل ۱۰۲ مسئله ۲۰

۲۰. شدت جریان حالت پا برجا را درمدار شکل ۱۰۲ بیابید.

۲۱. با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که شدت جریان $i(t)$ درمدار RLC شکل



شکل ۱۰۳. مسئلهٔ ۲۱

۱۰۳، با نیروی محرکهٔ الکتریکی ثابت V_0 و شدت جریان و بار اولیهٔ صفر، عبارت است از

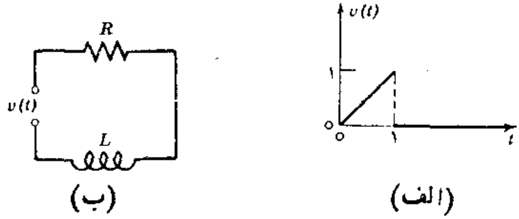
$$i(t)=\begin{cases} (K/\omega^*)e^{-\alpha t}\sin\omega^* t & \omega^{*2}>0 \\ Kte^{-\alpha t} & \omega^{*2}=0 \\ (K/\beta)e^{-\alpha t}\sinh\beta t & \omega^{*2}=-\beta^2<0 \end{cases}$$

که درآن $K=V_0/L$ ، $\alpha=R/2L$ ، $\omega^{*2}=(1/LC)-\alpha^2$.

۲۲. شدت جریان درمدار مسئلهٔ ۲۱ را بیابید، بسا این فرض که نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال شده در $t=0$ برابر $V_0 \sin pt$ و شدت جریان وبار در $t=0$ برابر صفر باشند.

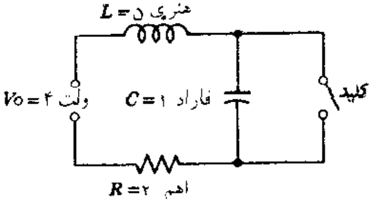
۲۳. شدت جریان درمدار RLC شکل ۱۰۳ را بیابید درصورتی که یك باطری با نیروی محرکهٔ الکتریکی V_0 در $t=0$ به‌مدار وصل ودر $t=a$ اتصال کوتاه شود. فرض کنید که شدت جریان و بار اولیه صفر است، و ω^{*2}، همان طور کـه در مسئلهٔ ۲۱ تعریف شد، مثبت است.

۲۴. شدت جریان $i(t)$ درمدار شکل ۱۰۴ را، با فرض $i(0)=0$ ، بیابید.



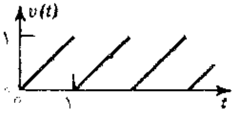
شکل ۱۰۴. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. درشکل ۱۰۵ کلید بسته است وجریان پابرجا از مدار عبور می‌کند. در $t=0$ کلید باز می‌شود. شدت جریان $i(t)$ را بیابید.



شکل ۱۰۵. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. شدت جریان پابرجا درمدار شکل ۱۰۴ ب را بیابید درصورتی که $v(t)=t$ وقتی $0<t<1$ و $v(t+1)=v(t)$ ؛ شکل ۱۰۶.



شکل ۱۰۶. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. مدارهای شکل ۱۰۷ توسط القای متقابل M جفت‌شده‌اند، در $t=0$ شدت‌جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ برابر صفرند. با به‌کاربردن قانون ولتاژکیرشهف (بخش ۹.۱) نشان دهید که معادلات دیفرانسیل مربوط به‌شدت جریانهای دو مدار به‌صورت زیرند:

$$L_1 i_1' + R_1 i_1 = M i_2' + V_0 u_0(t)$$

$$L_2 i_2' + R_2 i_2 = M i_1'$$

در اینجا $u_0(t)$ تابع پله‌ای واحد است. بـا قرار دادن $\mathcal{L}(i_1)=I_1(s)$ و $\mathcal{L}(i_2)=I_2(s)$ ، نشان دهید که معادلات کمکی عبارتند از

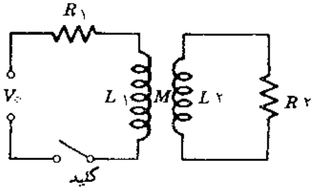
$$L_1 s I_1 + R_1 I_1 = M s I_2 + \frac{V_0}{s}$$

$$L_2 s I_2 + R_2 I_2 = M s I_1 .$$

با فرض $A \equiv L_1 L_2 - M^2 > 0$ ، نشان دهید I_2 را، که از حل معادلات فوق حاصل می‌شود، می‌توان به‌صورت

$$I_2 = \frac{K}{(s+\alpha)^2 + \omega^{*2}}$$

نوشت کـه در آن $K = A^{-1} V_0 M$ ، $\alpha = (2A)^{-1}(R_1 L_2 + R_2 L_1)$ ،



شکل ۱۰۷. مسئلهٔ ۲۷

$\omega^{*2} = A^{-1}R_1R_2 - \alpha^2$. نشان دهید که $i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_2)$ به‌همان صورت $i(t)$ درمسئلهٔ ۲۱ است، با این تفاوت که ثابتهای K ، α و ω^* دراین مسئله طور دیگری تعریف شده‌اند.

۲۸. درمسئلهٔ ۲۷ عبارت $i_1(t)$ را، با فرض $\omega^{*2} > 0$ ، بیابید.

۲۹. نشان دهید که هر گاه درمسئلهٔ ۲۷ داشته باشیم $A = 0$ ، آنگاه $i_2(t) = K_0 e^{-at}$ که درآن $K_0 = BV_0M$ ، $a = BR_1R_2$ ، $B = (R_1L_2 + R_2L_1)^{-1}$.

۳۰. فرض کنید که دراولین‌مدار شکل ۱۰۷ مدار بسته‌است وجریان پا برجایی برابر V_0/R_1 از مدار می گذرد. در $t = 0$ کلید باز می‌شود. جریان ثانویهٔ $i_2(t)$ را بیابید. راهنمایی. توجه کنید که $i_1(0) = V_0/R_1$ ، و وقتی $t > 0$ ، $i_1 = 0$.

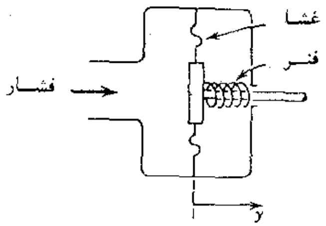
۳۱. شکل ۱۰۸ یك دستگاه کنترل فشار اتوماتیك را نشان می‌دهد. $y(t)$ تغییرمکان است و $y = 0$ متناظر با وضعیت تعادل دریك فشار ثابت مفروض است. فرض می کنیم که میرایی دستگاه متناسب با سرعت y' باشد، و فرض می کنیم در $t < 0$ دستگاه در حال سکون باشد و در $t = 0$ فشار به‌طور ناگهانی به صورت یك‌تابع پله‌ای واحد افزایش یابد. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه عبارت است از

$$my'' + cy' + ky = Pu_0(t)$$

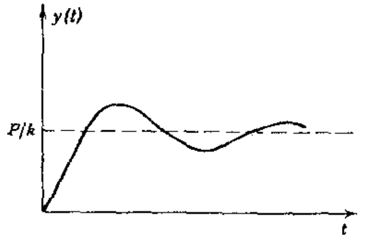
(m = جرم‌مؤثراجزای‌درحال‌حرکت، c = ثابت‌میرایی، k = مدول فنرو P = نیروی ناشی از افزایش فشار در $t = 0$). با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که‌هر گاه $c^2 < 4mk$ ، آنگاه (شکل ۱۰۹)

$$y(t) = \frac{P}{k}\left[1 - e^{-\alpha t}\sqrt{1 + (\alpha/\omega^*)^2}\cos(\omega^* t + \theta)\right]$$

که درآن $\alpha = c/2m$ ، $\omega^* = \sqrt{(k/m) - \alpha^2}\ (> 0)$ ، $\tan\theta = -\alpha/\omega^*$.



شکل ۱۰۸. مسئلهٔ ۳۱



شکل ۱۰۹. تغییرمکان $y(t)$ درمسئلهٔ ۳۱

۳۲. مسئلهٔ ۳۱ را درصورتی که $c^2 > 4mk$ حل کنید.

۳۳. مسئلهٔ ۳۱ را درصورتی که $c^۲ = ۴mk$ حل کنید.

۳۴. دو چرخ طیار (با گشتاورهای لختی $M_۱$ و $M_۲$) به میلهٔ کشسانی (که از گشتاور لختی آن‌صرفنظر می‌شود) وصل‌شده‌اند و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران‌می‌کنند. در $t = ۰$ جفت‌نیروی ترمز کنندهٔ P به‌یکی ازچرخها وارد می‌شود. سرعت‌زاویه‌ای $v(t)$ چرخ دیگر را بیابید.

۳۵. مسئلهٔ ۳۴ را درنظر بگیرید؛ با این تفاوت‌که این بار جفت نیروی ترمز کننده فقط درفاصلهٔ زمانی $۰ < t < ۱$ اعمال می‌شود. $v(t)$ را بیابید.

۸.۵ جدول برخی از تبدیلات لاپلاس

تبصره. فهرست جامعتری از تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس آنها در مرجع [B۷] ضمیمهٔ ۱ آمده است.

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
۱	$۱/s$	۱
۲	$۱/s^۲$	t
۳	$۱/s^n \quad (n = ۱, ۲, \cdots)$	$t^{n-۱}/(n-۱)!$
۴	$۱/\sqrt{s}$	$۱/\sqrt{\pi t}$
۵	$۱/s^{۳/۲}$	$۲\sqrt{t/\pi}$
۶	$۱/s^a \quad (a > ۰)$	$t^{a-۱}/\Gamma(a)$
۷	$\dfrac{۱}{s-a}$	e^{at}
۸	$\dfrac{۱}{(s-a)^۲}$	te^{at}
۹	$\dfrac{۱}{(s-a)^n} \quad (n = ۱, ۲, \cdots)$	$\dfrac{۱}{(n-۱)!} t^{n-۱} e^{at}$
۱۰	$\dfrac{۱}{(s-a)^k} \quad (k > ۰)$	$\dfrac{۱}{\Gamma(k)} t^{k-۱} e^{at}$

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$
13	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$
14	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{at}\sin\omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
22	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2\neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
۲۵	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$
۲۶	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$
۲۷	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
۲۸	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
۲۹	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
۳۰	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2}I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$ (ر. ك. بخش ۶.۴)
۳۱	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$ (ر. ك. بخش ۵.۴)
۳۲	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
۳۳	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k}$ $(k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2}I_{k-1/2}(at)$ (ر.ك.بخش ۶.۴)
۳۴	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$ (ر. ك. بخش ۵.۴)
۳۵	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
۳۶	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\sinh 2\sqrt{kt}$
۳۷	$e^{-k\sqrt{s}}$ $(k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
۳۸	$\frac{1}{s}\ln s$	$-\ln t-\gamma$ ($\gamma\approx$ ۰٫۵۷۷۲؛ ر.ک. بخش ۶.۴)
۳۹	$\ln\frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$
۴۰	$\ln\frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1-\cos\omega t)$
۴۱	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1-\cosh at)$
۴۲	$\arctan\frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t}\sin\omega t$
۴۳	$\frac{1}{s}\operatorname{arc\,cot} s$	$\operatorname{Si}(t)$ (ر. ک. ضمیمهٔ ۳)

٦

جبر خطی

قسمت اول: بردارها

دو عامل اصلی برتوسعهٔ ریاضیات مهندسی در دو دههٔ گذشته تأثیر گذاشته‌اند. این عوامل عبارتند ازکاربرد بسیار گستردهٔ حسابگرهای خودکاردرمسائل مهندسی و استفادهٔ فزاینده از جبر خطی وآنالیز خطی، مثلا درحل مسائل طولانی تحلیل سیستمها.

چهارفصل بعدی (۶ — ۹) به‌جبر خطی (فصول ۶و۷) وآنالیزخطی (فصول ۸ و ۹) اختصاص داده شده‌اند. دوفصل اول مشتمل‌است براصول‌نظری وکاربرد بردارهاوفضاهای برداری (بخشهای ۶.۱ تا ۶.۴) ، ضرب نقطه‌ای و فضای ضرب داخلی (بخشهای ۶.۵ و ۶.۶)، ضرب برداری وضرب سه گانهٔ اسکالر (بخشهای ۶.۷ تا ۶.۹)، ماتریسها ومعادلات خطی (بخشهای ۷.۱ تا۷.۸)، دترمینان وقاعدهٔ کرامر (بخشهای ۷.۹ تا ۷.۱۱) ، صورتهای درجه دوم وهرمیتی (بخش ۷.۱۲) ومقدار ویژه وبردار ویژه (بخشهای ۷.۱۳ و ۷.۱۴). بخش ۷.۱۵ به‌کاربرد ماتریسها درحل دستگاههای معادلات دیفرانسیل اختصاص داده شده است. فصل ۸ شامل حساب دیفرانسیل برداری (میدانهای اسکالر وبرداری، منحنیها، سرعت، مشتق جهتی، گرادیان، دیورژانس، تاو) است وفصل ۹ اختصاص دارد به‌حساب انتگرال برداری (انتگرال روی خط، انتگرال روی سطح، انتگرال سه گانه وتبدیلات آنها وسیلهٔ قضایای انتگرالی گرین، گاوس واستوکس).

درفصل حاضر مفاهیم اساسی و روشهای جبر برداری و کاربردهای آن در مسائل فیزیکی وهندسی را بررسی می‌کنیم. فایدهٔ بردارها در ریاضیات مهندسی از این امرناشی می‌شودکه ازیك طرف بسیاری ازکمیتهای فیزیکی ـ مثلا نیرو و سرعت ـ را می‌توان با بردار نمایش داد و از طرف دیگر در بعضی موارد قواعد محاسبات برداری به سادگی قواعد حاکم بردستگاه اعداد حقیقی است.

این درست است کــه هرمسئله‌ای که با استفاده ازبردارها حل شودبا روشهای غیر برداری نیز قابل حل است، اما آنالیز برداری کوتاهنوشتی است که بسیاری از محاسبات را به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. از این گذشته آنالیز برداری راهی است برای تجسم کمیتهای فیزیکی وهندسی و روابط بین آنها به‌خاطر تمام این دلایل است که نماد ـ گذاری برداری استفادهٔ گسترده‌ای درمتون جدید مهندسی دارد.

پیشنیاز این فصل: در دو بخش آخر، دترمینانهای مرتبهٔ دوم وسوم مورد نیازند.

بخشی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: بخش ۶.۶

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت C

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲

۱.۶ اسکالر و بردار

درفیزیك و هندسه کمیتهایی وجود دارندکه هریك ازآنها هنگامی کاملا مشخص می‌شود که مقدارش ــ یعنی اندازه یاتعداد واحدهای آن برحسب یك مقیاس ــ معلوم باشد؛ ازاین قبیلند جرم جسم، بار الکترون، گرمای ویژهٔ آب، اندازهٔ مقاومت، قطر دایره، مساحت مثلث و حجم مکعب. هریك ازاین کمیتها تنها بایك عدد(پس‌ازانتخاب واحد اندازه گیری‌مناسب) توصیف می‌شود. چنین کمیتهایی را **اسکالر**[1] می‌نامند.

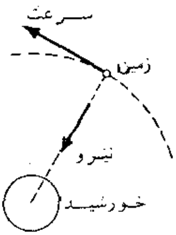
کمیتهای‌فیزیکی وهندسی‌دیگری وجود دارندکه نمی‌توان تنها بایك عددتوصیفشان کرد، چه برای آنکه این کمیتهاکاملا مشخص شوند باید علاوه برمقدار، جهتشان نیزمعلوم باشد.

مثلا، درمکانیك نیرو چنین کمیتی است. می‌دانیم کــه نیرو را می‌توان با رسم یك پیکان یا پاره خط جهت‌دار، که جهت آن جهت نیرو را مشخص می‌کند و طول آن برابر بزرگی نیرو برحسب یك مقیاس مناسب اندازه گیری است نشان داد. شکل ۱۱۰ نیروی جاذبه را در حرکت زمین بــه دور خورشید نشان می‌دهد. سرعت لحظه‌ای زمین را نیز می‌توان توسط پیکانی با جهت و اندازهٔ مناسب نمایش داد و این مثال نشان می‌دهد کــه سرعت نیزکمیتی است که با اندازه وجهتش مشخص می‌شود.

شکل ۱۱۱ انتقالی(جابه‌جایی بدون‌دوران) ازیك مثلث درصفحه رانشان می‌دهد. این حرکت رامی‌توان بااندازه (فاصله‌ای که هرنقطه‌ازمثلث طی کرده است) وامتدادآن‌مشخص کرد. این‌انتقال را می‌توانیم بارسم‌پاره خط جهت داری که نقطهٔ‌آغاز آن P، موضع اولیهٔ

---

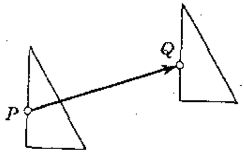
۱. واضح‌است که هرگاه عددی مشخص‌کنندهٔ اسکالری‌باشدکه مفهومی فیزیکی یا هندسی دارد، این عدد باید مستقل از انتخاب مختصات باشد؛ چون این نکته در این فصل اهمیتی ندارد، بعداً دربخش ۱.۸ دربارهٔ آن بحث می‌کنیم.



شکل ۱۱۰. نیرو وسرعت

یك‌نقطه ازمثلث، و نقطهٔ انتهایی آن، موضع جدید همان نقطه بعداز انتقال، باشدنمایش دهیم. اگر این‌کار را درمورد هر نقطه ازمثلث انجام دهیم دسته‌ای ازپاره خطهای‌جهت‌دار با طولهای مساوی وامتدادهای یکسان (یعنی موازی وهم‌جهت) خواهیم داشت. می‌توان گفت‌که هریك ازاین پاره خطهای جهت‌دار یکی ازنقاط مثلث‌را از موضع اولیه به‌موضع جدید «حمل» می‌کند.

با این اوصاف، بردار را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم.



شکل ۱۱۱. انتقال

تعریف بردار

هرپاره خط جهت دار را یك **بردار** نامند. طول پاره خط **طول** بردار و جهت آن **جهت** بردار نامیده می‌شود. دوبردار برابرند اگر و تنها اگر طول آنها با هم و جهت آنها با هم یکی باشد.

طول یك بردار را همچنین **اندازه** یا **نرم اقلیدسی** آن بردار می‌نامند. ▲

بردارها را باحروف‌کوچك سیاه[1]، مانند **a** ، **b** ، **v** ، وطول برداری مانند **a** را با $|\mathbf{a}|$ نشان می‌دهند.

البته درصورت تمایل می‌توانیم دوقسمت تعریف مزبور را ترکیب‌کرده بردار را

---

۱. این‌شیوه درکارهای چاپی رایج‌است؛ درکارهای غیرچاپی می‌توان بردار‌را باگذاشتن پیکانی برروی آن نشان داد، مثلا $\vec{a}$ (به‌جای **a**) ، $\vec{b}$ وغیره

به‌عنوان گردآوردهٔ تمام پاره خطهای جهت داری که دارای طول وجهت معینی هستند تعریف کنیم.

از این تعریف می‌بینیم که یك بردار را می‌توان به دلخواه انتقال داد (یعنی بدون دوران دادن جابه جا کرد) یا به عبارت دیگرمبدأ آن را به‌دلخواه انتخاب کرد. واضح‌است هرگاه نقطهٔ معینی را به‌عنوان مبدأ یك بردار اختیارکنیم انتهای بردار به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

هرگاه دوبردار **a** و **b** مساوی باشند، می‌نویسیم

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

واگر متفاوت باشند

$$\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$$

از نظر ترسیمی هربردار را می‌توان مانند شکل ۱۱۲ با پیکانی با طول و جهت مناسب نمایش داد.

برداری‌که طول آن ۱ باشد **بردار یکه** نامیده می‌شود.

برای‌کامل شدن بحث یادآور می‌شویم که درفیزیك و هندسه مواردی پیش می‌آید که می‌خواهیم‌روی موضع مبدأ یك بردار محدودیتهایی اعمال کنیم. مثلا درمکانیك ممکن است‌نیروی واردبریك جسم‌صلب روی خط‌اثرخود برتمام نقاط‌جسم به‌طوریکسان‌اثرکند. این موضوع تعریف **بردار لغزان** را ایجاب می‌کند، بردار لغزان برداری است‌که نقطهٔ اثر آن می‌تواند هرنقطه از خط مستقیمی‌که موازی بردار است باشد. نیرویی‌که بر یك جسم‌کشسان اثرمی‌کند برداری است‌که مبدأآن را به‌هیچ‌وجه نمی‌توان تغییرداد. درواقع اگر نقطه اثردیگری برای نیرو درنظر بگیریم درحالت‌کلی تأثیر آن متفاوت خواهدبود. از اینجا به تعریف **بردار مقید** می‌رسیم؛ بردار مقید برداری است‌که دارای مبدأ (نقطهٔ اثر) ثابت و معینی باشد. از آنجا که این مفاهیم در نوشته‌های مربوط به بردارها وجود دارند، دانشجویان بایدآنهارا بدانند، لیکن این مفاهیم دربحثهای بعدی ما اهمیت چندانی ندارند.

بردارهای مساوی $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ | بردارهای هم طول با جهتهای‌مختلف | بردارهای هم‌جهت با طولهای مختلف | بردارهای‌باطولهای مختلف‌وجهتهای‌مختلف

شکل ۱۱۲. بردارها

۲.۶ مؤلفه‌های یك بردار

یك نقطه درفضای سه بعدی یك شیء هندسی است، اما اگر دستگاه مختصاتی درنظر بگیریم، می‌توانیم آن نقطه را با سه‌تایی مرتبی از اعداد (که مختصات نقطه نامیده می‌شود) بیان کنیم. درمورد بردارها نیز همین‌طور است؛ دربخش قبل بردار را از نظر هندسی تعریف کردیم (با استفاده از مفهوم پاره‌خط جهت‌دار) اما اگر از دستگاه مختصات استفاده کنیم می‌توانیم بردار را با عبارات جبری توصیف کنیم.

حال در فضا دستگاه مختصاتی بنا می‌کنیم که محورهای آن سه‌خط راست دو به‌دو متعامد باشند. مقیاس سنجش‌را روی سه‌محور یکسان می‌گیریم. بدین ترتیب سه نقطهٔ یکهٔ روی محورها کـه مختصات آنها (۰ , ۰ , ۱)، (۰ , ۱ , ۰)، و (۱ , ۰ , ۰) است به فاصله‌های مساوی‌از مبدأ مختصات، محل تقاطع محورها، قرار می گیرند. دستگاه‌مختصات قائمی را که بدین ترتیب به‌دست می‌آید **دستگاه مختصات دکارتی** درفضا می‌نامند (ر.ك. شکل ۱۱۳).

حال برداری مانند $\mathbf{a}$ را درامتداد پاره‌خط جهت‌دار PQ طوری درنظر می گیریم کـه P ابتدا و Q انتهای آن بـاشد (شکل ۱۱۴). مختصات P و Q را بـه ترتیب (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) فرض می‌کنیم. دراین صورت اعداد

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1 \tag{1}$$

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ نسبت به‌دستگاه مختصات دکارتی نامیده می‌شوند.

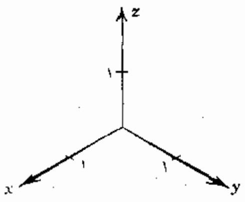
بنا به تعریف $|\mathbf{a}|$ طول بردار $\mathbf{a}$، برابر فاصلهٔ $\overline{PQ}$ است واز(۱) وقضیهٔ‌فیثاغورث نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2}$$

مثال ۱. مؤلفه‌ها وطول یك بردار

مؤلفه‌های‌بردار $\mathbf{a}$ که ابتدای آن $P: (3, 1, 4)$ وانتهای‌آن $Q: (1, -2, 4)$ است عبارتند از

$$a_1 = 1 - 3 = -2, \quad a_2 = -2 - 1 = -3, \quad a_3 = 4 - 4 = 0$$



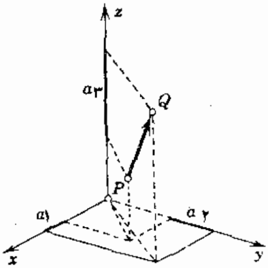
شکل ۱۱۳. دستگاه مختصات دکارتی

وطول آن برابر است با

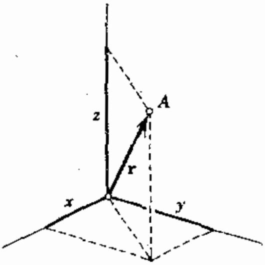
$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(-۲)^۲+(-۳)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱۳}.$$

هرگاه مختصات ابتدای **a** را (۸ , ۵ , ۱−) اختیار کنیم ، آنگاه مختصات انتهای آن برابر است با (۸ , ۲ , ۳−).

از روابط (۱) پیداست که هرگاه ابتدای بردار را مبدأ مختصات انتخاب کنیم ، آنگاه مؤلفه‌های بردار با مؤلفه‌های نقطهٔ انتهایی برابرمی‌شوند، این بردار را **بردار مکان** نقطهٔ انتهایی (نسبت به دستگاه مختصات مورد نظر) می‌نامند و معمولا با **r** نشان می‌دهند. به شکل ۱۱۵ رجوع شود.



شکل ۱۱۴. مؤلفه‌های یك بردار



شکل ۱۱۵. بردار مکان **r** نقطهٔ A که مختصات آن x , y , z است

همچنین از (۱) پیداست که مؤلفه‌های $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ بردار **a** مستقل از نحوهٔ انتخاب نقطهٔ ابتدایی **a** هستند، زیرا با انتقال **a** مختصات متناظر P و Q به یك اندازه تغییر می‌کنند. بنابراین دریك دستگاه مختصات دکارتی مفروض هربردار با سه‌تایی مرتب از مؤلفه‌هایش به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شود.

حال بردار پوچ یا **بردار صفر ۰** را برداری بامؤلفه‌های ۰ ، ۰ ، ۰ تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب هرسه‌تایی مرتب‌ازاعداد حقیقی ، من جمله سه‌تایی ۰ ، ۰ ، ۰ را می‌توان به عنوان یك بردار انتخاب کرد.

درصورت مشخص بودن دستگاه مختصات، بین سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی و بردارها در فضا تناظر یك‌به‌یك وجود دارد ؛ یعنی متناظر با هرسه‌تایی ، برداری در فضا وجود داردکه آن سه عدد ، نسبت به‌دستگاه مختصات مزبور ، مؤلفه‌های آن بردارند و بالعکس.

نتیجه می‌شود که دوبردار **a** و **b** برابرند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های متناظر آنها برابر باشند. بنابراین یك رابطهٔ برداری مانند

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

با سه رابطهٔ زیر معادل است:

$$a_۱=b_۱\,,\quad a_۲=b_۲\,,\quad a_۳=b_۳$$

که $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ مؤلفه‌های دو بردار نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی هستند.

از تناظر یك به‌یك بین همهٔ سه‌تاییهای مرتب اعداد حقیقی و همهٔ بردارهایی که در بخش ۱.۶ به‌روشی هندسی تعریف شدند، نتیجهٔ دیگری هم می‌توان گرفت. این تناظر نشان می‌دهد که می‌توان بردار را به‌عنوان سه‌تایی مرتبی از اعداد حقیقی (که مؤلفه‌های بردار نامیده می‌شود) به‌خوبی تعریف کرد. با شروع ازاین تعریف می‌توانیم تعبیرهندسی بردار را که از آن دربخش ۱.۶ به‌عنوان تعریف استفاده کردیم، به‌دست آوریم.

واضح است که هرگاه یك بردارشیئی فیزیکی یا هندسی باشد طول وجهت آن باید مستقل ازانتخاب دستگاه مختصات خاص باشد واین‌ایجاب می‌کند که مؤلفه‌هادراثرتبدیل دستگاه مختصات رفتار تبدیلی معینی داشته باشند. این مسئله را بعداً (دربخش ۹.۸) مورد بحث قرار خواهیم داد.

در فصل بعد همچنین مفهوم بردار را به n تاییهای مرتب از اعداد، که n هر عدد صحیح مثبت مشخص است، تعمیم خواهیم داد.

مسائل بخش ۲.۶

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{v}$، با ابتدای $P:(x_۱\,,y_۱\,,z_۱)$ وانتهای $Q:(x_۲\,,y_۲\,,z_۲)$، را پیدا کنید. $|\mathbf{v}|$ را به دست‌آورید. نمودار $\mathbf{v}$ را رسم کنید.

۱. $P:(۱\,,۲\,,۰)$ ، $Q:(۳\,,۲\,,۱)$

۲. $P:(۰\,,۱\,,-۱)$ ، $Q:(۰\,,۴\,,۲)$

۳. $P:(-۱\,,۲\,,-۲)$ ، $Q:(۰\,,۳\,,-۱)$

۴. $P:(۱\,,۱\,,۱)$ ، $Q:(۳\,,۳\,,۳)$

۵. $P:(-۲\,,-۳\,,-۱)$ ، $Q:(۰\,,۰\,,۰)$

۶. $P:(۲\,,۴\,,۶)$ ، $Q:(۱\,,۲\,,۳)$

۷. $P:(۰\,,۲\,,۰)$ ، $Q:(۰\,,۱\,,۰)$

۸. $P:(۰\,,۰\,,۰)$ ، $Q:(-۱\,,۲\,,۰)$

۹. $P:(۳\,,۸\,,۲)$ ، $Q:(۳\,,۸\,,۲)$

۱۰. $Q:(۳\,,۹\,,۴)$ ، $P:(۳\,,۸\,,۴)$

در هریك ازموارد زیر مؤلفه‌های $v_۱$ ، $v_۲$ ، $v_۳$ از بردار **v** و یك ابتدای خاص P داده شده‌اند. نقطهٔ انتهایی متناظر را پیدا کنید.

۱۱. $P:(۸\,,۲\,,۰)$; $-۱\,,۲\,,۵$

۱۲. $P:(-۴\,,۱\,,۲)$; $۳\,,۸\,,۰$

۱۳. $P:\left(-۲\,,\frac{۱}{۲}\,,۰\right)$; $\frac{۱}{۲}\,,۲\,,-۱$

۱۴. $P:(۰\,,۰\,,۰)$; $۱\,,۰\,,۰$

۱۵. $P:(-۴\,,۱\,,-۶)$; $۴\,,-۱\,,۶$

۱۶. $P:(۱\,,۴\,,۷)$; $۰\,,۰\,,۰$

۱۷. $P:(۰\,,۰\,,۰)$; $۳\,,۸\,,-۹$

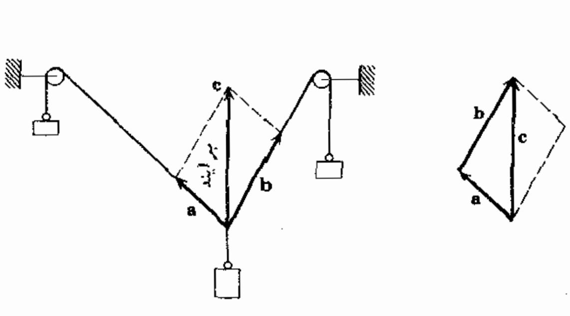
۱۸. $P:(۱\,,۲\,,۳)$; $۱\,,۲\,,۳$

۱۹. $P:(-۲\,,۰\,,-۳)$; $-۱\,,-۲\,,۱$

۲۰. $P:(-۸\,,۰\,,۴)$; $۸\,,-۶\,,-۱$

۳.۶ جمع بردارها، ضرب دراسکالر

برای انجام محاسبات برداری، اعمال جبری روی بردارها را معرفی می‌کنیم. دوعمل را که به‌جمع بردارها وضرب بردار دراسکالر موسوم هستند تعریف خواهیم کرد.



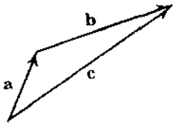
شکل ۱۱۶. برآیند دو نیرو (قانون متوازی‌الاضلاع)

تجربه نشان می‌دهد که برآیند دو نیرو را می‌توان با قانون مشهور متوازی‌الاضلاع تعیین کرد (شکل ۱۱۶). این امرانگیزه‌ای برای تعریف زیر است.

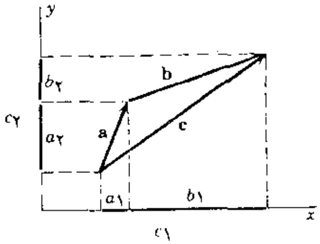
تعریف جمع برداری

دو بردار **a** و **b** مفروضند، هرگاه ابتدای بردار **b** را برانتهای بردار **a** منطبق کنیم، آنگاه بردار **c** مجموع **a** و **b**، از وصل کردن ابتدای **a** به انتهای **b** حاصل می‌شود. (شکل ۱۱۷) ومی‌نویسیم

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$ ▲



شکل ۱۱۷. جمع برداری

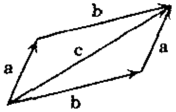


شکل ۱۱۸. جمع برداری برحسب مؤلفه‌ها

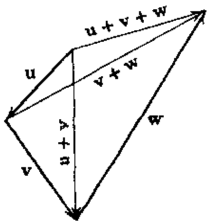
نتیجهٔ زیر از تعریف بالا به‌دست می‌آید. اگر مؤلفه‌های **a** و **b** نسبت به دستگاه مختصات ثابتی به‌ترتیب a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 باشند، در آن صورت مؤلفه‌های c_1، c_2، c_3ی بردار $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ با جمع کردن مؤلفه‌های متناظر **a** و **b** به دست می‌آیند، بنابراین

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3 \qquad (1)$$

شکل ۱۱۸ این مطلب را درصفحه نشان می‌دهد ودرفضا وضعیت مشابه است.



شکل ۱۱۹. جابه‌جایی بودن جمع برداری



شکل ۱۲۰. انجمنی بودن جمع برداری

از تعریف و یا از (۱) نتیجه می‌شود که جمع برداری دارای خواص زیر است. به‌ازای هر بردار (ر. ك. شکلهای ۱۱۹ و ۱۲۰)

(الف) (جابه‌جایی بودن) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(ب) (انجمنی بودن) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (۲)

(پ) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

(ت) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

دراینجا $-\mathbf{a}$ معرف برداری است به‌طول $|\mathbf{a}|$ ودرجهت مخالف $\mathbf{a}$.

از (۲ ب) نتیجه می گیریم که می‌توان نوشت $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$، و همین‌طور در مجموعهایی که شامل بیش از سه بردار هستند می‌توان پرانتزها را حذف کرد. همچنین به‌جای $\mathbf{a}+\mathbf{a}$ می‌نویسیم $2\mathbf{a}$ و به‌همین ترتیب. تعریف این نماد (و نماد $-\mathbf{a}$ که پیشتر تعریف شد) زمینه را برای تعریف دومین عمل جبری مربوط به‌بردارها آماده می کند.

ضرب بردار دراسکالر (عدد)

بردار $\mathbf{a}$ وعدد حقیقی q را درنظر بگیرید. بردار $q\mathbf{a}$ به‌طریق زیر تعریف می‌شود.

طول $q\mathbf{a}$ عبارت است از $|q||\mathbf{a}|$.

هرگاه $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ و $q>0$، آنگاه $q\mathbf{a}$ همجهت با $\mathbf{a}$ است.

هرگاه $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ و $q<0$، آنگاه $q\mathbf{a}$ درجهت مخالف $\mathbf{a}$ است.

هرگاه $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ یا $q=0$ (یا هردو)، آنگاه $q\mathbf{a}=\mathbf{0}$. ▲

چند مثال ساده درشکل ۱۲۱ نشان داده شده است.

بدیهی است که هرگاه $\mathbf{a}$ دارای مؤلفه‌های a_1، a_2، a_3 باشد آنگاه $q\mathbf{a}$ دارای مؤلفه‌های qa_1، qa_2، qa_3 (نسبت به‌همان دستگاه مختصات) خواهد بود. به‌علاوه، بنابرتعاریف داریم، به‌ازای هر بردار وهرعدد حقیقی

(الف) $q(\mathbf{a}+\mathbf{b})=q\mathbf{a}+q\mathbf{b}$

(ب) $(c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$ (۳)

(پ) $c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$ (که نوشته می‌شود $ck\mathbf{a}$)

(ت) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

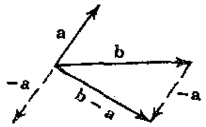
خواننده می‌تواند ثابت کند که (۲) و (۳) نتیجه می‌دهند به‌ازای هر $\mathbf{a}$،

$$0\mathbf{a}=\mathbf{0}$$ (۴)

$$(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$$

به‌جای $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$ فقط می‌نویسیم $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ (شکل ۱۲۲).

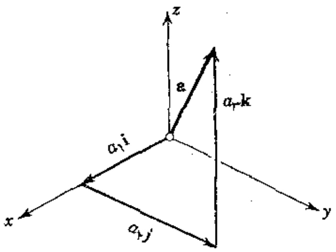
شکل ۱۲۱. ضرب بردار درعدد

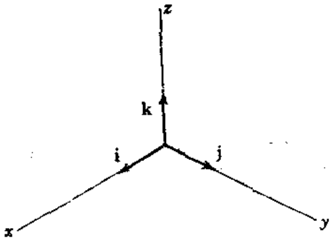


شکل ۱۲۲. تفاضل بردارها

دریك دستگاه مختصات دکارتی مفروض می‌توانیم بردار $\mathbf{a}$ با مؤلفه‌های a_1 ، a_2 ، a_3 را به‌صورت مجموع سه بردار موازی با محورهای مختصات نمایش دهیم. بدین‌منظور روی محورها سه بردار یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ را، که در جهت مثبت محورها قرار دارند، درنظر می گیریم. دراین صورت داریم (شکل ۱۲۳)

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \qquad (5)$$





شکل ۱۲۳. بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ ونمایش (۵)

شکل ۱۲۳ بردارهای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ را، که مبدأ مشترك آنها مبدأ مختصات انتخاب شده‌است، نشان‌می‌دهد. این بردارهادو به‌دو برهم‌عمودند. به‌جای عموداصطلاح **متعامد** نیز به‌کارمی‌رود، ومی گوییم که $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ یك سه‌تایی از بردارهای یکهٔ متعامد تشکیل می‌دهند. این سه‌تایی را سه‌تایی متعامد بنیادی مربوط به‌دستگاه مختصات مزبور نیز می‌نامند.

مثال ۱

فرض‌کنید، نسبت به یك دستگاه مختصات داده شده ،

$$\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}=4\mathbf{i}+\mathbf{k}$$

درآن صورت

$$2\mathbf{b}=4\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6\mathbf{k}, \quad -\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k},$$
$$1{,}5\mathbf{a}-\mathbf{b}=4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-1{,}5\mathbf{k}.$$

مسائل بخش ۳.۶

فرض کنید $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ، $\mathbf{c}=-5\mathbf{j}$. مطلوب است محاسبهٔ

۱. $-2\mathbf{a}, \frac{1}{2}\mathbf{a}, 3\mathbf{a}$

۲. $\mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}+\mathbf{a}$

۳. $\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{c}$

۴. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|, |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

۵. $|\mathbf{a}-\mathbf{c}|, |\mathbf{a}|-|\mathbf{c}|$

۶. $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|, \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$

۷. $3\mathbf{a}-3\mathbf{b}, 3(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

۸. $|-\mathbf{a}+2\mathbf{b}-3\mathbf{c}|$

۹. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}, \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

۱۰. مسائل ۲، ۷ و ۹ مبین چه قوانینی هستند؟

برآیند نیروهای زیر را پیدا کنید.

۱۱. $\mathbf{p}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{q}=5\mathbf{i}-2\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{u}=-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۱۲. $\mathbf{p}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{q}=-2\mathbf{i}-5\mathbf{j}-3\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{u}=\mathbf{k}$

۱۳. نیرویی مانند $\mathbf{p}$ پیدا کنید طوری که نیروهای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ درحال تعادل باشند.

۱۴. فرض کنید بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ بردارهای متناظر با اضلاع یك متوازی‌السطوح باشند. بردارهای متناظر چهار قطر را پیدا کنید.

با استفاده از بردارها احکام زیر را ثابت کنید.

۱۵. اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند.

۱۶. چهار قطر مکعب هم‌طولند.

۱۷. خطی که یکی از رئوس متوازی‌الاضلاع را به وسط یکی از اضلاع مقابلش وصل می‌کند قطر را به‌نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند.

۱۸. مجموع بردارهایی که ازمرکز یك چندضلعی منتظم به‌رئوس آن کشیده می‌شوند مساوی بردار صفر است.

۱۹. نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث هرمیانه را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند.

۲۰. چهار قطر یك متوازی‌السطوح همدیگر را قطع می‌کنند ومنصف یکدیگرند.

۴.۶ فضاهای برداری. وابستگی واستقلال خطی

مجموعهٔ V از بردارها که دو عمل جبری جمع برداری وضرب دراسکالر روی آن تعریف شده است یك ساختمان جبری به‌وجود می‌آورد که آن را فضای برداری (یا فضای خطی) می‌نامند. اهمیت این ساختمان از آنجا ناشی می‌شود که بسیاری از مجموعه‌هایی (مجموعهٔ بردارها، ماتریسها، توابع، عملگرها و غیره) که در ریاضیات وکاربرد آن خیلی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند چنین ساختمانی دارند. در واقع، مفهوم فضای برداری در آنالیز تابعی (آنالیز مدرن مجرد) که در معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی و سایر رشته‌هایی که برای مهندسین از نقطه نظر عملی جالب است، کاربرد دارد مفهومی است اساسی. (ر.ك. مرجع [A۱۰] ضمیمهٔ ۱.) حال به بیان تعریف می‌پردازیم:

تعریف فضای برداری حقیقی

مجموعهٔ غیرتهی V که ازعناصر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، . . . تشکیل شده است یك فضای برداری حقیقی (یا فضای خطی حقیقی) نامیده می‌شود هر گاه در V دوعمل جبری (جمع برداری و ضرب دراسکالر) به‌شکل زیر تعریف شده باشند.

الف. جمع برداری به هرجفت عنصر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از V عنصری یکتا از V مربوط می‌کند که آن را مجموع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نامیده با $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ نشان می‌دهند، به‌طوری‌که اصول زیر دربارهٔ آن صادق است.

الف۱. جابجایی بودن. به‌ازای هردو عنصر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از V،

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

الف۲. انجمنی بودن. به‌ازای هرسه عنصر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ از V،

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$ (نوشته می‌شود $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$)

الف۳. عنصری یکتا در V هست که عنصر صفر نامیده شده با $\mathbf{0}$ نشان داده می‌شود، به‌طوری‌که به‌ازای هر $\mathbf{a}$ در V،

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}.$$

الف۴. به‌ازای هر $\mathbf{a}$ از V عنصری یکتا در V وجود داردکه با $-\mathbf{a}$ نشان‌داده می‌شود وبه‌گونه‌ای است که

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$$

ب. ضرب دراسکالر. اعداد حقیقی را اسکالر می‌نامند. ضرب دراسکالر به هر $\mathbf{a}$ از V وهراسکالر q عنصری یکتا از V نسبت می‌دهدکه آن را حاصلضرب q و $\mathbf{a}$ نامیده با $q\mathbf{a}$ (ویا $\mathbf{a}q$) نشان می‌دهند. اصول زیر درمورد ضرب دراسکالر صادقند.

ب۱. پخشپذیری. به‌ازای هراسکالر q وعناصر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از V،

$$q(\mathbf{a}+\mathbf{b})=q\mathbf{a}+q\mathbf{b}.$$

ب.۲ پخشپذیری. به‌ازای هردو اسکالر c و k وهر $\mathbf{a}$، در V،

$$(c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}\,.$$

ب.۳ انجمنی بودن. به‌ازای هردو اسکالر c و k و هر $\mathbf{a}$ در V،

$$c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a} \qquad \text{(که نوشته می‌شود } ck\mathbf{a}\text{)}$$

ب.۴ به ازای هر $\mathbf{a}$ در V

$$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

عناصر V را **بردار** می‌نامند[1]. ▲

هر گاه به‌جای اعداد حقیقی، اعداد مختلط را به‌عنوان اسکالرها درنظر بگیریم فضای برداری مختلط به‌دست می‌آید.

چون نمی‌خواهیم ازهدف اصلی خود که مطالعهٔ جبر برداری است دورشویم، باذکر چند مسئلهٔ نوعی که درمجموعهٔ مسائل زیر آورده شده‌اند تنها کلی بودن مفهوم فضای برداری را روشن می‌کنیم و درفصل بعد باآوردن مثالهای بیشتری در ارتباط با ماتریسها بحث را ادامه می‌دهیم، توجه کنید که **مفهوم مجرد** فضای برداری را به کمك اصل تعریف مفهوم مجرد بر حسب برخی از مهمترین خواص **مدل واقعی** کــه در این مــورد مجموعهٔ تمام بردارهای فضای سه بعدی بود به‌دست آوردیم. این اصلی است که به‌کمك آن بسیاری از مفاهیم ریاضی مجرد را ازمدلهـای واقعی استخراج می‌کنیم. البته در هر حالت، انتخاب خواصی که باید به‌صورت اصول موضوع بیان شوند به تجربه نیازدارد.

حال بعضی مفاهیم مهم مربوط به‌فضای برداری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فرض کنید $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(m)}$ بردارهای دلخواهی در V باشند. دراین‌صورت‌عبارتی به‌شکل

$$q_1\mathbf{a}_{(1)}+\cdots+q_m\mathbf{a}_{(m)} \qquad (q_1, \ldots, q_m \text{ اسکالرهای دلخواهند})$$

را**ترکیب خطی** بردارهای مزبورمی‌نامند. واضح است که‌این‌عبارت، بنا به‌اصول‌موضوعهٔ فضای برداری، برداری در V است. مجموعهٔ S که تمام این ترکیبات خطی را دربردارد **مجموعهٔ پدید آمده** توسط $q_{(1)}, \ldots, q_{(m)}$ نامیده می‌شود وآن‌را با $\mathrm{span}(\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(m)})$ نشان می‌دهند ومی گویند که S **پدید آمده** یا تولید شده به‌وسیله m بردار ذکرشده است.

اثبات اینکه مجموعهٔ پدیدآمده توسط مجموعه‌ای‌از بردارها‌خودیك فضای برداری است، دشوارنیست (اثبات؟)

حال با استفاده از مفهوم ترکیب خطی می‌توانیم مفاهیم اساسی وابستگی واستقلال خطی بردارها را معرفی می‌کنیم.

---

۱. صرف‌نظراز اینکه این عناصر واقعاًچه هستند آنها را بردار می‌نامیم، این قرارداد باعث اشتباه نمی‌شود زیرا درهرحالت خاص، ماهیت آن عناصر از فحوای مطلب روشن است.

مجموعه‌ای از m بردار $\mathbf{a}_{(1)}$، . . .، $\mathbf{a}_{(m)}$ را يك **مجموعهٔ وابستهٔ خطی** نامندهر گاه اقلا یکی ازاین بردارها رابتوان به‌صورت ترکیبی خطی ازبقیه (با اسکالرهایی که‌الزاماً همه‌آنهاصفرنیستند) نمایش‌داد. مجموعه‌ای ازبردارها را يك **مجموعهٔ مستقل خطی** نامند هر گاه هیچیك ازبردارها را نتوان به‌صورت ترکیبی خطی ازبقیه نمایش داد.

دراین تعریف $m \geqslant 2$. هر گاه $m = 1$، مجموعه تنها شامل يك بردار $\mathbf{a}$ است و در این حال مجموعه را وابستهٔ خطی گوییم اگر $\mathbf{a} = 0$؛ و مستقل خطی گوییم اگر $\mathbf{a} \neq 0$.

مثال ۱. مجموعهٔ بردارهای وابستهٔ خطی و مستقل خطی

بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ يك مجموعهٔ وابستهٔ خطی‌را تشکیل می‌دهند زیرا $6\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c} = 0$؛ و در نتیجه $\mathbf{a} = (1/3)\mathbf{b} + (1/2)\mathbf{c}$. بردارهای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ که در بخش قبل تعریف شدند، يك مجموعهٔ مستقل خطی را تشکیل می‌دهند. ▲

هر گاه فضای برداری V چنان باشد که شامل مجموعهٔ مستقل خطی B از n بردار باشد، در حالی‌که هرمجموعه از $n+1$ بردار یا بیشتر در V وابسته خطی است، آنگاه گفته می‌شود که V دارای **بعد** n است (یا n بعدی است) و B را **پایه‌ای** برای V می‌نامند. بدین ترتیب هربردار $\mathbf{v}$ از V را می‌توان به‌صورت ترکیبی‌خطی از n بردار پایه‌به‌طور یکتا نمایش داد.

به عنوان مثال مجموعهٔ تمام بردارهای فضا، که در بخش ۱.۶ تعریف شد، تشکیل يك فضای برداری می‌دهد. این مجموعه سه بعدی است چون $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ پایه‌ای برای آن است (ر. ك. بخش ۳.۶).

به‌طور کلی اگرمجموعهٔ M از بردارهـای $\mathbf{a}_{(1)}$ ، . . . ، $\mathbf{a}_{(m)}$ در V را درنظر بگیریم وهر گاه مجموعهٔ پدیدآمده توسط‌آنها دارای بعد r باشد، نتیجه می گیریم که M دارای زیرمجموعه‌ای با r بردار مستقل خطی است. در این صورت بردارهای مفروض ترکیبات خطی آن r بـردار هستند کـه پایه‌ای برای بردارهای پدید آمده توسط M تشکیل می‌دهند.

معیار مهمی برای تشخیص وابستگی واستقلال خطی وجود دارد. برای به‌دست‌آوردن این معیار، معادلهٔ برداری

$$k_1\mathbf{a}_{(1)} + k_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + k_m\mathbf{a}_{(m)} = 0 \qquad (1)$$

را در نظر می گیریم ، کـه در آن $\mathbf{a}_{(1)}$ ، . . . ، $\mathbf{a}_{(m)}$ بردارهایی مفروض و k_1 ، . . . ، k_m اسکالرند و نخست فـرض می‌کنیم کـه $m \geqslant 2$. این معادلـه مسلماً بـه ازای

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

برقرار است. هر گاه بتوانیم اسکالرهای k_1 ، . . . ، k_m را، که همه صفر نیستند ، پیدا کنیم به‌طوری‌که (۱) برقرار باشد، آنگاه می‌توانیم (۱) را براسکالری مانند $k_i \neq 0$ تقسیم

کرده بردار متناظر $\mathbf{a}_{(i)}$ را به‌صورت ترکیبی خطی از بقیهٔ بردارها نمایش دهیم. (مثلا، اگر در رابطهٔ (۱) داداشته باشیم $k_1 \neq 0$، از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{a}_{(1)} = l_2 a_{(2)} + \cdots + l_m \mathbf{a}_{(m)}$$ که در آن $l_j = -k_j/k_1$.)

پس دراین حالت بردارها تشکیل یک‌مجموعهٔ وابستهٔ خطی‌می‌دهند. ولی، اگرتنها به‌ازای مجموعه اسکالرهای $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$ رابطهٔ(۱) برقرار باشد، نمی‌توانیم(۱) را نسبت به هیچیك از آن بردارها حل کنیم و بردارها تشکیل یك مجموعهٔ مستقل خطی می‌دهند. هرگاه $m = 1$، آنگاه (۱) به‌صورت $k_1\mathbf{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ درمی‌آید. این رابطه به‌ازای $k_1 \neq 0$ وقتی و تنها وقتی برقرار است که $\mathbf{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ و این، بنا به‌تعریف، به معنی وابستگی خطی است. ازاین بحث، معیار زیر را نتیجه می گیریم.

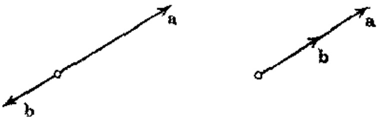
قضیهٔ ۱ (وابستگی خطی)

مجموعه‌ای از بردارهای $\mathbf{a}_{(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{(m)}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر (۱) به ازای مجموعه‌ای از اسکالرهای $k_1, \ldots, k_m$، که همه صفر نیستند، برقرار باشد.

این شرط لازم وکافی برای وابستگی خطی اغلب به عنوان تعریف وابستگی خطی به‌کار می‌رود.

اگر یکی از بردارهای مجموعهٔ بردار مورد نظر بردار صفر باشد مجموعه وابستهٔ خطی‌است، زیرا هرگاه، مثلا $\mathbf{a}_{(1)} = \mathbf{0}$، آنگاه (۱)به‌ازای‌هر k_1 و $k_2 = \ldots = k_m = 0$ برقرار است.

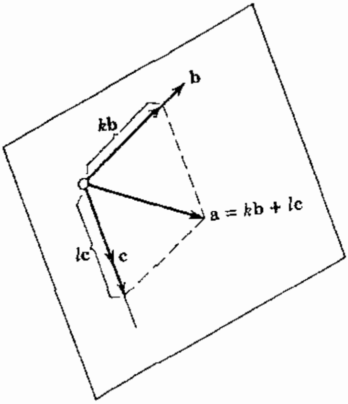
درفضای‌سه بعدی‌دو بردار که تشکیل یك مجموعهٔ وابستهٔ خطی‌می‌دهند **هم‌خط** هستند؛ یعنی اگرمبدأ آنها را برهم منطبق کنیم بردارها روی یك خط قرارمی گیرند (شکل ۱۲۴). هرگاه سه‌بردار **a** و **b** و **c** از این فضا تشکیل یك مجموعهٔ وابستهٔ خطی بدهند هم‌خط یا **هم صفحه** اند؛ یعنی هرگاه مبدأ آنها را بر هم منطبق بگیریم در یك صفحه قرار می گیرند (شکل ۱۲۵).



شکل ۱۲۴. بردارهای هم‌خط

در حقیقت وابستگی خطی ایجاب می کند که یکی از بردارها ترکیبی خطی از دو بردار دیگر باشد، مثلا $\mathbf{a} = k\mathbf{b} + l\mathbf{c}$، وبنابراین در صفحهٔ **b** و **c** قرار گیرد (و یا برخط مستقیمی که **b** و **c** روی آن قرار دارند، اگر **b** و **c** هم خط باشند). مجموعه‌ای که از چهار بردار یا بیشتر تشکیل شده است در فضای سه بعدی وابستهٔ خطی است، زیرا تمام

بردارهای این فضا یك فضای برداری سه بعدی تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۲۵. بردارهای هم‌صفحه

مسائل بخش ۴.۶

نشان دهیدکه هریك ازمجموعه‌های زیرفضایی برداری تشکیل می‌دهند. درهرمورد بعدفضا را تعیین‌کنید و پایه‌ای برای آن بیابید.

۱. مجموعهٔ تمام بردارهای فضا که مؤلفه اولشان صفر است.

۲. مجموعهٔ تمام بردارهای به صورت $c(\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$ ، در اینجا c اسکالری دلخواه است.

۳. مجموعهٔ تمام بردارهای به صورت $b\mathbf{i}+c(\mathbf{j}+\mathbf{k})$ ، در اینجا b و c اسکالرهایی دلخواهند.

۴. مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب از اعداد، با جمع معمولی تعریف شده با

$$(a_۱\ ,\ a_۲)+(b_۱\ ,\ b_۲)=(a_۱+b_۱\ ,\ a_۲+b_۲)$$

وضرب دراسکالر تعریف شده با $c(a_۱\ ,\ a_۲)=(ca_۱\ ,\ ca_۲)$.

۵. مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب از اعداد $(a_۱\ ,\ \dots\ ,\ a_n)$ با جمع تعریف شده با $(a_۱\ ,\dots,\ a_n)+(b_۱\ ,\dots,\ b_n)=(a_۱+b_۱\ ,\ \dots\ ,\ a_n+b_n)$ و ضرب در اسکالر تعریف شده با $c(a_۱\ ,\dots,\ a_n)=(ca_۱,\dots,\ ca_n)$.

۶. تمام توابع به‌صورت $y(x)=c_۱e^x+c_۱e^{-۲x}$ ($c_۱$ و $c_۲$ دلخواهند) با جمع معمولی

وضرب معمولی دراعداد.

۷. تمام توابع به صورت $y(x)=a\cos x+b\sin x$ (a و b دلخواهند) بـا جمع معمولی وضرب معمولی دراعداد.

۸. تمام چند جمله‌ایهای برحسب x با درجهٔ نابیشتر از ۲ باجمع معمولی وضرب‌معمولی دراعداد.

مجموعهٔ بردارهای تولید شده توسط $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ را درهریك ازحالات زیرتوصیف کنید.

۹. $\mathbf{u}=(1, 0, 0)$، $\mathbf{v}=(1, 2, 0)$ ‏ ۱۰. $\mathbf{u}=(1, 1, 1)$، $\mathbf{v}=(0, 0, 2)$.

۱۱. نشان دهیدکه نمایش برداری مانند $\mathbf{a}$ درفضای برداری V به صورت ترکیب خطی بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_{(1)}$، ...، $\mathbf{e}_{(n)}$ یکتاست.

۱۲. هرگاه مجموعهٔ $\{\mathbf{a}_{(1)}, \dots, \mathbf{a}_{(n)}\}$ مستقل خطی باشد، نشان دهیدکه هرزیرمجموعهٔ (غیر تهی) آن مجموعه، مستقل خطی است.

۱۳. **(زیرفضا)** W زیرمجموعهٔ غیرتهی‌فضای برداری V را زیر فضای V نامند درصورتی که خود W نسبت بـه عملهای جبری تعریف شده در V یك فضای برداری باشد. مثالهایی از زیر فضاهای یك و دو بعدی فضای تمام بردارهایی که درفضای سه‌بعدی هستند ارائه کنید.

۱۴. کدامیك از مجموعه‌های زیر یك زیر فضای برداری تمام بردارهایی که بـه شکل $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ هستند تشکیل می‌دهند؟
(الف) تمام $\mathbf{v}$ های با $v_1=v_2$ و $v_3=0$. (ب) تمام $\mathbf{v}$ های با $v_1=v_2+1$.
(پ) تمام $\mathbf{v}$ های با v_1، v_2، v_3 ی مثبت. (ت) تمام $\mathbf{v}$ های با

$$v_1-v_2+v_3=k=\text{ثابت}$$

۱۵. نشان دهیدکه زیرمجموعهٔ W از فضای برداری V زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در W وهراسکالر c و q، بردار $c\mathbf{a}+q\mathbf{b}$ در W باشد.

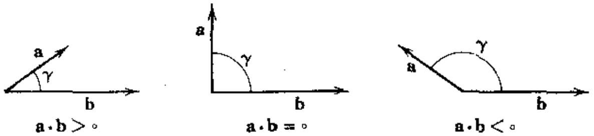
۵.۶ ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای)

ضرب داخلی، **ضرب نقطه‌ای**، یا**ضرب اسکالر** دوبردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ درفضای‌سه‌بعدی به‌صورت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ نوشته می‌شود وچنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma \qquad (\text{وقتی که } \mathbf{a}\neq 0 \text{ و } \mathbf{b}\neq 0)$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \qquad (\text{وقتی که } \mathbf{a}=0 \text{ یا } \mathbf{b}=0) \tag{1}$$

در اینجا γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$ زاویهٔ بین **a** و **b** است (وقتی که مبدأ بردارها برهم منطبق باشند). (ر. ك. شکل ۱۲۶.)



شکل ۱۲۶. زاویهٔ بین بردارها

اندازهٔ حاصلضرب داخلی یك اسکالر (عدد حقیقی) است و این امر موجب‌می‌شود که اصطلاح «حاصلضرب اسکالر» را به‌کار بریم. چون در (۱) کسینوس می‌تواند مثبت، صفر، یا منفی باشد حاصلضرب داخلی نیزمی‌تواند چنین باشد (ر. ك. شکل ۱۲۶). چون وقتی γ بین صفر و π تغییر می‌کند،آنگاه کسینوس صفرمی‌شود اگروتنها اگر $\gamma = \pi/2$، بنابراین قضیهٔ مهم زیر را داریم.

قضیهٔ ۱ (تعامد)

دو بردار غیر صفر متعامدند اگر و تنها اگر حاصل‌ضرب داخلی (حاصل‌ضرب اسکالر) آنها صفر باشد.

اگر در (۱) قرار دهیم $\mathbf{b}=\mathbf{a}$، خواهیم داشت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$، و این نشان می‌دهد که طول (نرم اقلیدسی) بردار را می‌توان برحسب ضرب اسکالر نوشت،

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} \qquad (\geqslant 0). \tag{۲}$$

از این رابطه و (۱) فرمول مفید زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}}. \tag{۳}$$

از تعریف نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب داخلی دارای خواص زیر است:

(۴)

(الف) $[q_1\mathbf{a}+q_2\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}=q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+q_2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (خطی بودن)

(ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (تقارن)

(پ) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geqslant 0$ ، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ اگر وتنها اگر $\mathbf{a}=0$ (مثبت ومعین بودن)

بنابراین ضرب نقطه‌ای جابه‌جایی است [ر.ك. (۴ب)] و نسبت به جمع برداری پخشپذیر

است؛ درواقع، با فرض $q_1 = 1$ و $q_2 = 1$ از (۴ الف) نتیجه می‌گیریم

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \quad \text{(پخشپذیری)} \qquad (\text{۴الف}^*)$$

علاوه بر این از (۱) و $|\cos\gamma|\leqslant 1$ به‌دست می‌آوریم

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \quad \text{(نابرابری شوارتس}^{1}\text{)} \qquad (5)$$

با استفاده از این نابرابری و (۲)، خواننده می‌تواند ثابت کند که

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \quad \text{(نابرابری مثلثی)} \qquad (6)$$

با یک محاسبهٔ سادهٔ سرراست به کمک ضرب داخلی، می‌توان نشان داد که

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2) \quad \text{(تساوی متوازی‌الاضلاعی)} \qquad (7)$$

هرگاه بردارهای **a** و **b** برحسب مؤلفه‌هایشان نشان داده شوند؛ یعنی اگر بنویسیم

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$$

حاصل‌ضرب داخلی آنها با فرمول اساسی وسادهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad (8)$$

حال (۸) را ثابت می‌کنیم. چون **i** و **j** و **k** بردارهای یکه هستند، از (۱) داریم

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

وچون این سه بردار متعامدند، از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0.$$

بنابراین اگر مقادیر **a** و **b**ی فوق را در $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ قرار دهیم و از (۴ الف*) و (۴ ب) استفاده کنیم، ابتدا مجموع ۹ حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\cdots+a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$$

چون ۶ تا از این حاصل‌ضربها صفرند، (۸) را به‌دست می‌آوریم.

قبل‌از آنکه کاربردهایی از ضرب داخلی را بررسی کنیم، مفهوم دیگری را معرفی می‌کنیم. فرض کنید **a** و $(\mathbf{b}\neq 0)$ بردارهایی مفروض و γ زاویهٔ بین آنها باشد. در این صورت عدد حقیقی

$$p=|\mathbf{a}|\cos\gamma$$

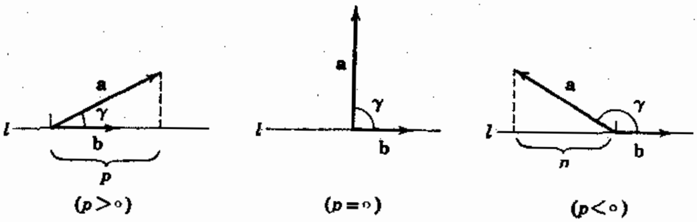
---

۱. هرمان آماندوس شوارتس (Hermann Amandus Schwarz)، ۱۸۴۳–۱۹۲۱، ریاضیدان آلمانی، که درزمینهٔ آنالیز مختلط وهندسهٔ دیفرانسیل کارکرده است.

را **مؤلفهٔ a** در امتداد **b** یا **تصویر a** در امتداد **b** می‌نامند. هرگاه $\mathbf{a}=0$، آنگاه γ تعریف نشده است، وقرار می‌دهیم $p=0$.

نتیجه می‌شود که $|p|$ طول تصویر قائم **a** روی خطی مستقیم مانند l درامتداد b است. p ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد (شکل ۱۲۷).

بنا به این تعریف، می‌بینیم که درحالت‌خاص مؤلفه‌های بردار **a** درامتداد بردارهای یکهٔ **i**، **j**، **k** از یك دستگاه مختصات دکارتی طبق مؤلفه‌های a_1، a_2، a_3 بردار **a** هستند که در بخش ۲.۶ تعریف شده‌اند. این موضوع نشان می‌دهد که استفادهٔ فعلی ما از اصطلاح «مؤلفه» صرفاً تعمیمی ملایم از تعریف قبلی است.



شکل ۱۲۷. مؤلفهٔ بردار **a** درامتداد بردار **b**

از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$p=|\mathbf{a}|\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \qquad (b\neq 0) \tag{۹}$$

ودرحالت خاصی که **b** بردار یکه باشد، به‌سادگی به‌دست می‌آوریم

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \tag{۱۰}$$

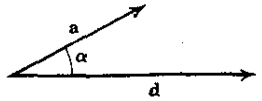
مثالهای زیر سودمندی ضرب داخلی را روشن می‌کنند. بعداً کاربردهای متعدد دیگری را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱. کاری که یك نیرو انجام می‌دهد

ذره‌ای را درنظر بگیرید که نیروی ثابت **a** بر آن اثر می‌کند. فرض کنید ذره به‌اندازهٔ **d** تغییرمکان پیدا کند. در آن صورت W با کاری که نیروی **a** در این تغییرمکان انجام می‌دهد به‌صورت حاصلضرب $|d|$ ومؤلفهٔ **a** درامتداد **d** تعریف می‌شود؛ یعنی

$$W=|\mathbf{a}||\mathbf{d}|\cos\alpha=\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \tag{۱۱}$$

دراینجا α زاویهٔ بین **a** و **d** است (شکل ۱۲۸).



شکل ۱۲۸. کاری‌که یك نیرو انجام می‌دهد

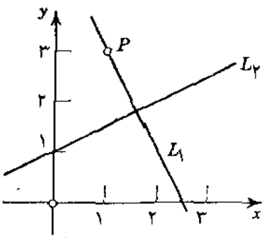
مثال ۲. خطوط مستقیم متعامد درصفحه

معادلهٔ خط مستقیم L_1 را طوری بیابیدکه از نقطهٔ $P:(1,3)$ درصفحهٔ xy بگذرد و برخط L_2 به‌معادلهٔ $x-2y+2=0$ عمود باشد.

هرخط مستقیم V_1 در صفحهٔ xy را می‌توان به‌صورت $a_1x+a_2y=c$ نمایش داد. هر گاه $c=0$، آنگاه L_1 ازمبدأ می گذرد. هر گاه $c\neq 0$، آنگاه $a_1x+a_2y=0$ خطی مانند L_1^* را نمایش می‌دهدکه از مبدأ می گذرد وبا L_1 موازی است. بردارمکان هر نقطه از خط L_1^* عبارت است از $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$. با در نظر گرفتن برداری مانند $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$، از (۸) می‌بینیم‌که L_1^* را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=0$$

مسلماً $\mathbf{a}\neq 0$، وبنابه قضیهٔ ۱، بردار $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{r}$ وبنابراین بر L_1^* عمود است. این‌بردار را **بردار قائم** بر L_1^* می‌نامند. چون L_1 و L_1^* موازیند، $\mathbf{a}$ بردار قائم بر L_1 نیز هست. بنابراین دو خط L_1 و $L_2: b_1x+b_2y=d$ برهم عمودند یا متعامدند اگر و تنها اگر بردارهای قائم‌آنها یعنی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ متعامد باشند؛ یعنی $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. توجه‌کنید که این امر مستلزم آن است که شیب خطوط قرینهٔ معکوس یکدیگر باشند.



شکل ۱۲۹. مثال ۲

در این حالت، $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$، و یکی از بردارهای د بر $\mathbf{b}$ عبارت است از $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$. ازاین‌رو L_1 باید به‌صورت $2x+y=c$ باشد و با قرار دادن مختصات P درآن، به‌دست می‌آوریم $c=5$، وبالاخره جواب زیرحاصل می‌شود (ر.ك.شکل۱۲۹):

$$y=-2x+5.$$

مثال ۳. بردار قائم برصفحه

بردار یکه‌ای پیدا کنید که برصفحهٔ $4x+2y+4z=-7$ عمود باشد.

هرصفحه را درفضا می‌توان به‌صورت

$$a_1x+a_2y+a_3z=c \tag{۱۲}$$

نمایش داد. بردار مکان هر نقطه از این صفحه عبارت است از $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. با درنظر گرفتن بردار $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ و با استفاده از (۸) می‌توانیم (۱۲) را به‌صورت

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=c \tag{۱۳}$$

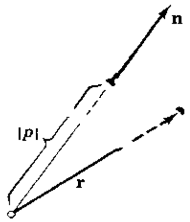
بنویسیم. مسلماً $\mathbf{a}\neq 0$، وبردار یکه درامتداد $\mathbf{a}$ عبارت است از

$$n=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot$$

با تقسیم کردن (۱۳) بر $|\mathbf{a}|$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=p \quad \text{که درآن} \quad p=\frac{c}{|\mathbf{a}|}\cdot \tag{۱۴}$$

از (۱۰) می‌بینیم که p تصویر $\mathbf{r}$ درامتداد $\mathbf{n}$ است، و این تصویر به‌ازای بردار مکان $\mathbf{r}$ هرنقطه ازصفحه دارای همان مقدارثابت $c/|\mathbf{a}|$ است. مسلماً این مطلب صحیح است اگر وتنها اگر $\mathbf{n}$ برصفحه عمود باشد. $\mathbf{n}$ را **بردار یکهٔ قائم** برصفحه می‌نامند (برداریکهٔ قائم دیگر $-\mathbf{n}$ است). به‌علاوه، از این مطالب واز تعریف تصویر نتیجه می‌شود که $|p|$ فاصلهٔ صفحه ازمبدأ است. نمایش (۱۴) را **صورت نرمال هسه**[1] صفحه می‌نامند (شکل ۱۳۰).



شکل ۱۳۰. بردار قائم بریک صفحه

---

۱. لودویک اتو هسه (Ludwig Otto Hesse)، ۱۸۱۱–۱۸۷۴، ریاضیدان آلمانی که درزمینهٔ نظریهٔ منحنیها و رویه‌ها کار کرده‌است.

دراین مثال،

$$\mathbf{a}=۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k},\quad c=-۷,\quad |\mathbf{a}|=۶,\quad \mathbf{n}=\frac{۱}{۶}\mathbf{a}=\frac{۲}{۳}\mathbf{i}+\frac{۱}{۳}\mathbf{j}+\frac{۲}{۳}\mathbf{k},$$

وفاصلهٔ صفحه از مبدأ برابر ۷/۶ است.

مسائل بخش ۵.۶

فرض کنید $\mathbf{a}=\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=-\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، و $\mathbf{c}=۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-\mathbf{k}$. مطلوب است

۱. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

۲. $|\mathbf{a}|\ ,\ |\mathbf{b}|\ ,\ |\mathbf{c}|$

۳. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\ ,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

۴. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})\ ,\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})$

۵. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\ ,\ |\mathbf{b}+\mathbf{c}|$

۶. $۲\mathbf{a}\cdot۳\mathbf{b}\ ,\ ۶\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

۷. $|\mathbf{a}+\mathbf{c}|\ ,\ |\mathbf{a}|+|\mathbf{c}|$

۸. $۲\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-۲\mathbf{b})$

۹. $-\mathbf{a}\cdot(۲\mathbf{c}-\mathbf{b})$

۱۰. مسائل ۱ و ۳ چه قوانینی را تشریح می‌کنند؟

۱۱. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ را پیدا کنید درصورتی‌که $\mathbf{a}=۲\mathbf{i}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{b}=\mathbf{j}$، $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$، وشکلی شبیه شکل ۱۲۶ ترسیم کنید.

۱۲. هرگاه $\mathbf{a}$ داده‌شده باشد و $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\mathbf{b}=\mathbf{c}$؟

درهریك از حالات زیر، کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{p}$ را کــه بریك ذره اثرمی‌کنــد بیابید درصورتی‌که ذره درطول پاره خط AB ازنقطه A به‌نقطهٔ B تغییرمکان یافته باشد.

۱۳. $A:(۰,۰,۰)\ ,\ B:(۰,۳,۰)\ ,\ \mathbf{p}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۴. $A:(۰,-۱,۲)\ ,\ B:(۰,۰,۰)\ ,\ \mathbf{p}=\mathbf{k}$

۱۵. $A:(۸,-۲,-۳)\ ,\ B:(-۲,۰,۶)\ ,\ \mathbf{p}=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$

۱۶. $A:(۲,۲,۲)\ ,\ B:(۴,۴,۴)\ ,\ \mathbf{p}=-۴\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

۱۷. $A:(۴,۱,۳)\ ,\ B:(۵,۲,۵)\ ,\ \mathbf{p}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۱۸. چرا درمسئلهٔ ۱۷ کار برابر صفر است؟

۱۹. به ازای چه مقادیری از a_1 بردارهای $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ متعامدند؟

۲۰. بردار یکهٔ $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ را چنان بیابید که بر بردار $2\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ عمود باشد.

۲۱. فرض کنید که ذره‌ای درطول پاره‌خط مستقیم AB از نقطهٔ A به‌نقطهٔ B جابه‌جا شده باشد، نشان دهید که کارانجام شده توسط دو نیرویی که برذره اثرمی‌کنند باکارانجام شده توسط برآیند نیروها برابر است.

۲۲. با استفاده از بردارها نشان دهید که هرگاه اقطار یك مستطیل برهم عمود باشند، آن مستطیل باید مربع باشد.

۲۳. تحت چه شرایطی اقطار یك متوازی‌الاضلاع متعامدند؟

۲۴. آیا ۴ قطر یك مکعب متعامدند؟

۲۵. نشان دهید که صفحات $x+y+z=1$ و $3x-4y+z=2$ متعامدند.

۲۶. زاویهٔ بین صفحات $x+2y+z=2$ و $2x-y+3z=-4$ را بیابید.

۲۷. زوایای مثلثی با رئوس $A:(1,1,0)$ ، $B.(3,1,0)$ ، $C:(1,3,0)$ را پیدا کنید.

فرض کنید $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ، $\mathbf{c}=\mathbf{i}+5\mathbf{k}$. کسینوس زاویهٔ بین بردارهای زیر را پیدا کنید.

۲۸. $\mathbf{a},\mathbf{c}$ **۲۹.** $-\mathbf{a},\mathbf{c}$ **۳۰.** $\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}$ **۳۱.** $\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b}$

درهرحالت مؤلفه $\mathbf{a}$ درامتداد $\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۳۲. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{b}=2\mathbf{i}+7\mathbf{k}$

۳۳. $\mathbf{a}=4\mathbf{j}+3\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{b}=-4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

۳۴. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۳۵. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{b}=6\mathbf{k}$

۳۶. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ بردارهای یکهٔ متعامد باشند ، آنگاه $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ با این بردارها زوایای مساوی می‌سازد.

۳۷. قانون کسینوسها را با استفاده از بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ به‌دست آورید.

۳۸. فرض کنید $\mathbf{a}=\cos\alpha\mathbf{i}+\sin\alpha\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=\cos\beta\mathbf{i}+\sin\beta\mathbf{j}$ ، که در آن

$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. نشان دهید که **a** و **b** بردارهای یکه هستند. با استفاده از (۸) اتحاد مثلثاتی مربوط به $\cos(\beta-\alpha)$ را به‌دست آورید.

۳۹. نابرابری مثلثی (۶) را ثابت کنید.

۴۰. تساوی متوازی‌الاضلاعی (۷) را ثابت کنید.

۶.۶ فضاهای ضرب داخلی

دربخش ۴.۶ تعریف فضای برداری را با استفاده ازخواص اساسی جمع برداری‌وضرب دراسکالر، درفضای سه‌بعدی، به‌دست‌آوردیم. جالب است که ضرب نقطه‌ای نیزمی‌تواند به طریقی مشابه مورد استفاده قرار گیرد (بخش ۵.۶) و انگیزهٔ ایجاد مفهوم فضای ضرب داخلی حقیقی شود. بنابه تعریف، این فضا عبارت از یك فضای برداری حقیقی است که درآن‌ضربی داخلی، که در (۴) بخش ۵.۶ صدق می‌کند، تعریف‌شده است؛ به‌طورمبسوط:

تعریف فضای ضرب داخلی حقیقی

فضای برداری حقیقی V را فضای ضرب داخلی حقیقی (یا پیش‌فضای حقیقی هیلبرت[1]) می‌نامند درصورتی که دارای خاصیت زیر باشد. به‌هر جفت بردار **a** و **b** در V عددی حقیقی مربوط است که با $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ نشان داده می‌شود و **ضرب داخلی** (یا ضرب اسکالر) **a** و **b** نامیده می‌شود، درمورد این ضرب باید اصول موضوعی زیر صادق باشند.

اصل ۱. به‌ازای تمام اسکالرهای q_1 و q_2 وتمام بردارهای **a**، **b**، **c** در V،

$$(q_1\mathbf{a}+q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$ (خطی بودن).

اصل ۲. به‌ازای تمام بردارهای **a** و **b** در V،

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$ (تقارن).

اصل ۳. به ازای هر **a** در V،

$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$ و

$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ اگر وتنها اگر $\mathbf{a} = 0$ (مثبت ومعین بودن).

---

۱. **دیوید هیلبرت** (David Hilbert)، ۱۸۶۲–۱۹۴۳، ریاضیدان بزرگ آلمانی که کارهای او در جبر عالی ونظریهٔ اعداد، معادلات انتگرالی، حساب وردشها، آنالیز تابعی و منطق ریاضی‌ازاهمیتی اساسی برخوردارند. کتاب «بنیادهای هندسه» او به‌روش اصل موضوعی دربه‌دست آوردن شناخت و پذیرش عمومی‌کمك‌کرد. ۲۳ مسئلهٔ مشهور هیلبرت (کـه در یك سخنرانی درسال ۱۹۰۰ عرضه شد) تأثیر قابل ملاحظه‌ای درتوسعه ریاضیات جدید داشت.

تعریف تعامد

بردارهای **a** و **b** دریك فضای ضرب داخلی V را متعامد نامند هرگاه

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 . \qquad \blacktriangle$$

توجه کنید که این تعریف ملهم از قضیهٔ ۱ بخش ۵.۶ است.

با استفاده از ضرب داخلی، به‌هرعنصر **a** از V می‌توان عددی مربوط ساخت که با $\|\mathbf{a}\|$ نشان داده شده چنین تعریف می‌شود

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}, \mathbf{a}} \quad (\geqslant 0) ,$$

این عدد را **نرم a** می‌نامند. از (۲) بخش ۵.۶ می‌بینیم که این تعمیم مفهوم طول است. درواقع، با توجه به‌تعریفی که برای ضرب داخلی کردیم، ضرب نقطه‌ای یك ضرب‌داخلی است،

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} ,$$

نمادهای جدید، فرمول (۲) بخش ۵.۶ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} .$$

بنا به‌اصول موضوع ضرب داخلی و تعریف‌نرم، می‌توان نتیجه گرفت [ر. ك. (۵) تا (۷) بخش ۵.۶]

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqslant \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \qquad \text{(نابرابری شوارتس)،}$$

واز اینجا

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \qquad \text{(نابرابری مثلثی)،}$$

وبا یك محاسبهٔ مستقیم ساده

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2) \qquad \text{(تساوی متوازی‌الاضلاعی).}$$

ما وارد جزئیات‌نخواهیم‌شد، زیرا اینها به‌درسهای‌پیشرفته‌تری (درآنالیزتابعی، به‌خصوص فضاهای هیلبرت، نظریهٔ تقریب و غیره؛ (ر. ك. [A۱۰] ضمیمهٔ ۱) مربوط می‌شوند. مع‌ذلك، مایلیم با ذکر دومثال مهم عمومیت مفهوم فضای ضرب داخلی را توضیح دهیم. اولین مثال فضای اقلیدسی n بعدی است که عبارت است از فضای ضرب داخلی مربوط به‌تمام n تاییهای مرتب حقیقی $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ، $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$، وغیره، با ضرب داخلی

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

(که در(۸) بخش۵.۶ به‌آن اشاره شد). مثال‌دوم عبارت ازفضای ضرب داخلی تمام‌توابع

پیوستهٔ $f(x)$ ، $g(x)$ ، . . . تعریف شده درفاصله‌ای مانند $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ است، با ضرب داخلی تعریف شده با

$$(f\ ,g)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,g(x)\,dx.$$

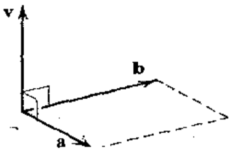
توجه کنید که تعامد دراین حالت با آنچه دربخش ۷.۴ تعریف شد یکسان است.

۷.۶ ضرب برداری (ضرب خارجی)

کاربردهای مختلف موجب معرفی نوع دیگری ضرب برداری می‌شود که در آن حاصل‌ضرب دو بردار بردار دیگری است. این ضرب که اصطلاحاً **ضرب برداری** یا **ضرب خارجی** دو بردار **a** و **b** نامیده می‌شود، به‌صورت

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

نوشته می‌شود و برداری مانند **v** است که به‌طریق زیر تعریف می‌شود.



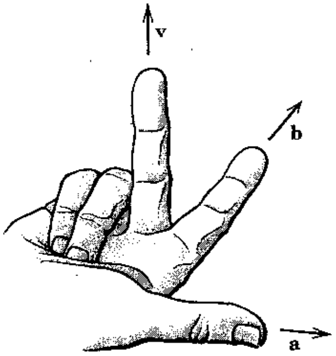
شکل ۱۳۱. حاصل‌ضرب برداری

تعریف حاصل‌ضرب برداری

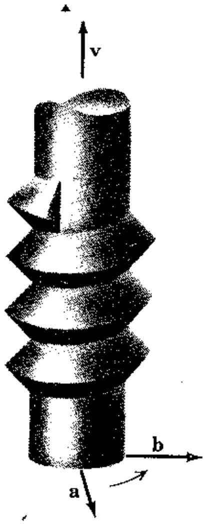
هر گاه **a** و **b** هم‌جهت یا هم امتداد وغیرهم‌سو باشند ویا یکی‌از دو بردار ، بردار صفر باشد، آنگاه $\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$.

درهر حالت دیگر، $\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برداری است که طول آن باسطح متوازی‌الاضلاعی که اضلاع مجاور آن **a** و **b** هستند برابر وامتدادش عمود بر **a** و **b** باشد. سوی این بردار باید چنان باشد که **a** ، **b** ، **v** ، با همین ترتیب، تشکیل یك سه‌تایی راستگرد، نظیر شکل ۱۳۱، بدهند. ▲

منشأ اصطلاح **راستگرد** آن است که بردارهای **a** و **b** و **v** را ، با همین ترتیب ، می‌توان درامتداد انگشتهای شست، اشاره ومیانی دست راست، همانند شکل ۱۳۲ ، فرض کرد. همچنین می‌توان گفت هر گاه **a** را تحت زاویهٔ $\alpha\ (<\pi)$ دوران دهیم تا در امتداد **b** قرار گیرد، آنگاه جهت **v** درجهت پیشروی پیچ راستگردی خواهدبود که به‌همان‌طریق چرخانده می‌شود (شکل ۱۳۳).



شکل ۱۳۲. سه‌تایی راستگرد بردارهای v ، b ، a



شکل ۱۳۳. پیچ راستگرد

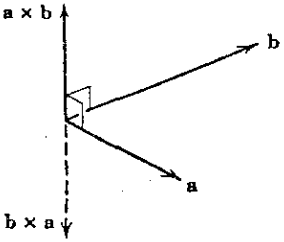
مساحت متوازی‌الاضلاعی که‌ضلعهای آن **a** و **b** باشند برابراست با $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$ ، که γ زاویهٔ بین **a** و **b** است، (ر. ك. شکل ۱۳۱). بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma . \tag{۱}$$

فرض کنید $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{v}$ و $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{w}$. درآن صورت بنابه‌تعریف $|\mathbf{v}|=|\mathbf{w}|$، و برای اینکه **b** ، **a** ، **w** تشکیل یك‌سه‌تایی راستگرد بدهند باید داشته باشیم $\mathbf{w}=-\mathbf{v}$ (شکل۱۳۴). بنابراین باید داشته باشیم

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) ; \tag{۲}$$

یعنی ضرب خارجی بردارها **جابه‌جایی نیست** بلکه پادجابه‌جایی است. از این‌رو ترتیب عوامل درضرب برداری اهمیت زیادی دارد و باید به‌دقت رعایت شود.



شکل ۱۳۴. پادجابه‌جایی بودن ضرب خارجی

از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود که به‌ازای هر ثابت k،

$$(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(k\mathbf{b}) . \tag{۳}$$

به‌علاوه، ضرب برداری نسبت به‌جمع برداری پخش‌پذیر است، یعنی

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),\\(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}&=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) .\end{aligned} \tag{۴}$$

اثبات این‌مطلب دربخش بعد ارائه‌خواهد شد. بعداً ضربهای برداری را بیشترموردبررسی قرار می‌دهیم اما لازم است در همین‌جا یادآور شویم که ضرب برداری **انجمنی نیست**، یعنی، درحالت کلی

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} .$$

از (۱) همین بخش و (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{v}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\gamma=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\gamma)=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 .$$

با گرفتن جذر از طرفین، دستور مفیدی برای تعیین طول حاصل‌ضرب برداری به‌دست می‌آوریم

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2} . \tag{۵}$$

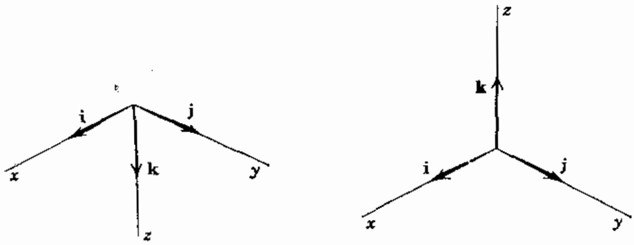
۸.۶ حاصل‌ضرب برداری برحسب مؤلفه‌ها

اینك حاصل‌ضرب برداری را برحسب مؤلفه‌های عوامل آن دریك دستگاه مختصات دکارتی نشان می‌دهیم. درارتباط با این موضوع، توجه به‌این نکته مهم است که بسته به جهتی که برای‌محورها انتخاب کنیم، دستگاههای دکارتی به‌دو نوع **راستگرد** و **چپگرد** تقسیم می‌شوند. این دونوع دستگاه را درزیر تعریف می‌کنیم.

یك دستگاه مختصات دکارتی را **راستگرد** نامند هرگاه بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ ی متناظر با جهت مثبت محورها تشکیل یك‌سه‌تایی راستگرد بدهند (شکل ۱۳۵ الف). هرگاه این بردارها یك سه‌تایی چپگرد تشکیل دهند دستگاه مختصات **چپگرد** نامیده می‌شود. بردارهای یکهٔ مربوط به‌این دستگاه نسبت به‌هم همان وضعی را دارندکه انگشتان شست، اشاره ومیانی دست چپ نسبت به‌هم دارا هستند (شکل ۱۳۵ ب).

درکاربردها، ترجیح می‌دهیم که از دستگاههای راستگرد استفاده کنیم.

فرض کنید a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 به‌ترتیب مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد یا چپگرد باشند. می‌خواهیم مؤلفه‌های v_1، v_2،



(الف) راستگرد (ب) چپگرد

شکل ۱۳۵. دو نوع دستگاه مختصات دکارتی

v_3 حاصلضرب برداری

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

را برحسب مؤلفه‌های **a** و **b** بیان کنیم. کافی است تنها حالتی را بررسی کنیم که در آن $\mathbf{v}\neq 0$. چون **v** هم بر **a** عمود است و هم بر **b**، بنابه‌قضیهٔ ۱ بخش ۵.۶، نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=0$ و $\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}=0$، یا بنابه (۸) بخش ۵.۶،

$$\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3&=0\,,\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3&=0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

با ضرب معادلهٔ اول در b_3، معادلهٔ دوم در a_3 وتفریق آنها ازیکدیگر، به‌دست‌می‌آوریم

$$(a_3b_1-a_1b_3)\,v_1=(a_2b_3-a_3b_2)\,v_2\,.$$

با ضرب معادلهٔ اول (۱) در b_1، معادلهٔ دوم در a_1 وتفریق آنها از یکدیگر، به دست می‌آوریم

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,v_2=(a_3b_1-a_1b_3)\,v_3\,.$$

می‌توان به‌سهولت نشان داد

$$v_1=c\,(a_2b_3-a_3b_2)\,,\quad v_2=c\,(a_3b_1-a_1b_3)\,,\quad v_3=c\,(a_1b_2-a_2b_1) \tag{2}$$

که در آنها c مقداری ثابت است در دو معادلهٔ بالا صدق می‌کنند. خواننده به راحتی می‌تواند تحقیق کند که (۲) در (۱) نیز صادق است. هریك ازمعادلات مذکور در (۱) صفحه‌ای مار برمبدأ در فضای $v_1v_2v_3$ را نمایش می‌دهند. بردارهای **a** و **b** بردارهای قائم این صفحات هستند (ر.ك. مثال ۳ بخش ۵.۶). از آنجا که $\mathbf{v}\neq 0$، این بردارها موازی نیستند و دوصفحه برهم منطبق نخواهند بود. لذا، فصل مشترك آنها خط راستی مانند L

است که از مبدأ می گذرد. چون (۲) جوابی برای (۱) است و وقتی c تغییر کند خط مستقیمی را نمایش می‌دهد، نتیجه می گیریم که (۲) نمایشگر L است، وهرجوابی‌از(۱) باید به‌شکل(۲) باشد. به‌خصوص‌مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ نیز باید بدین شکل باشند، که دراین مورد c باید تعیین شود. از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$
$$= c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2],$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2],$$

که خواننده به سادگی می‌تواند درستی آن را تحقیق کند، بنابراین با استفاده از (۸) بخش ۵.۶ داریم

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2].$$

از مقایسهٔ این رابطه با (۵) بخش قبل، نتیجه می گیریم که $c = \pm 1$.

از اینجا به بعد لازم است که راستگرد یا چپگرد بودن دستگاه مختصات مشخص باشد. ابتدا حالتی را درنظرمی گیریم که‌دستگاه راستگرد است ونشان می‌دهیم که $c = \pm 1$. این کار را می‌توان به‌طریق زیر انجام داد.

هرگاه طولها و جهتهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را به‌طور پیوسته تغییر دهیم طوری که در نهایت $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{j}$، (شکل ۱۳۵ الف) آنگاه اندازه وجهت $\mathbf{v}$ به‌طور پیوسته تغییرخواهد کرد و درنهایت، $\mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$، بدیهی است که می‌توانیم تغییرات را طوری انجام دهیم که هم $\mathbf{a}$ وهم $\mathbf{b}$ مخالف بردار صفر باقی بمانند وهیچگاه موازی هم نشوند. بدین ترتیب $\mathbf{v}$ هیچگاه مساوی بردار صفر نخواهد شد، واز آنجاکه تغییرات پیوسته است و c فقط می‌تواند مقادیر ۱+ و ۱− را احراز کند، نتیجه می‌شود که عاقبت c باید همان‌مقدار قبلی را داشته باشد. اما درنهایت $\mathbf{a} = \mathbf{i}$، $\mathbf{b} = \mathbf{j}$، $\mathbf{v} = \mathbf{k}$، و بنابراین $a_1 = 1$، $b_2 = 1$، $v_3 = 1$، وسایر مؤلفه‌های ذکر شده در (۲) برابرصفرند. بنابراین از (۲) معلوم‌می‌شود که $v_3 = c = +1$. توجه‌کنید که عبارتهای داخل پرانتز در (۲) را می‌توان به صورت دترمینانهای مرتبهٔ دوم نوشت، می‌توانیم نتیجه را به‌صورت زیر جمعبندی کنیم.

نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$$

یا برحسب دترمینانهای مرتبهٔ دوم[1]

---

۱. دترمینانهای‌مرتبهٔ دوم وسوم‌معمولا درحساب‌دیفرانسیل وانتگرال‌مقدماتی بررسی‌می‌شوند. خوانندگانی‌که با این دترمینانها آشنا نیستند می‌توانند بخش ۷ ۹ را مطالعه کنند.

$$(۳) \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}+\mathbf{j}\begin{vmatrix} a_۳ & a_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix},$$

که $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ و $b_۱$ ، $b_۲$ ، $b_۳$ به‌ترتیب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستند.

برای به‌خاطر سپردن فرمول، توجه می‌کنیم که (۳) را می‌توان به‌صورت بسط دترمینان

$$(۴) \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

نسبت به‌سطر اول، نمایش داد؛ اما باید متوجه باشیم که این یك دترمینان معمولی نیست زیرا عناصر سطر اول آن بردارند.

دریك دستگاه مختصات دکارتی چپگرد، $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{k}$ (شکل ۱۳۵-ب) وازاستدلال بالا نتیجه می‌شود که باید در (۲) داشته باشیم $c=-۱$. بنابراین نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی چپگرد داریم

$$(۵) \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

مثال ۱

نسبت به یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، فرض کنید که $\mathbf{a}=۴\mathbf{i}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$. دراین صورت

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۴ & ۰ & -۱ \\ -۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=\mathbf{i}-۱۰\mathbf{j}+۴\mathbf{k}. \qquad ▲$$

حال می‌توانیم **قانون پخشپذیری** (۴) را که در بخش قبل ذکر شد ثابت کنیم. از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود که مؤلفهٔ اول $a\times(b+c)$ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲+c_۲ & b_۳+c_۳ \end{vmatrix}=a_۲(b_۳+c_۳)-a_۳(b_۲+c_۲)$$

$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+(a_۲c_۳-a_۳c_۲)=\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^۲ & a_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}.$$

عبارت سمت راست مؤلفهٔ اول $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ است. برای دومؤلفهٔ دیگر بردارمذکور نیز وضع به همین منوال است. بدین ترتیب اولین رابطه از روابط (۴) بخش قبل ثابت می‌شود ورابطهٔ دوم را با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد. ▲

خواننده می‌تواند معیار زیرین برای تشخیص وابستگی واستقلال خطی دوبردار را ثابت کند.

قضیهٔ ۱

دوبردار تشکیل یك مجموعه وابستهٔ خطی می‌دهند اگر و تنها اگر حاصل‌ضرب برداری آنها بردار صفر باشد.

لزوم تعریف ضرب برداری در مسائل متعددی احساس می‌شود کــه ما دونمونه از آنها را درزیرمی‌آوریم. دیگرکاربردهای فیزیکی وهندسی ضرب برداری‌را به‌بعد موکول می‌کنیم.

مثال ۲. گشتاور نیرو

درمکانیك گشتاور m نیروی $\mathbf{p}$ نسبت به‌نقطه‌ای مانند Q بنابه‌تعریف عبارت ازحاصل‌ضرب $m=|\mathbf{p}|d$ است که درآن d فاصلهٔ (عمودی) نقطهٔ Q از خط L، خط اثر نیروی $\mathbf{p}$، است (شکل ۱۳۶). هرگاه $\mathbf{r}$ برداری باشدکه ابتدایش نقطهٔ Q است وانتهایش هرنقطهٔ A از خط L، آنگاه $d=|\mathbf{r}|\sin\gamma$ (شکل ۱۳۶) و

$$m=|\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin\gamma.$$

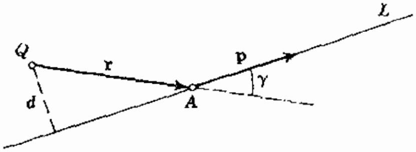
چون γ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ است، از رابطهٔ (۱) بخش قبل نتیجه می‌شودکه

$$m=|\mathbf{r}\times\mathbf{p}|.$$

بردار

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

را **بردارگشتاور** یا **گشتاور برداری** $\mathbf{p}$ نسبت به Q می‌نامند. اندازهٔ این بردار m وجهت آن جهت محور دوران $\mathbf{p}$ نسبت به Q است، اگر این دوران هم‌سو با $\mathbf{p}$ انجام گیرد.



شکل ۱۳۶. گشتاور نیرو

مثال ۳. سرعت جسم دوار

دوران جسم صلب B درفضا را می‌توان به‌سادگی و به‌طور یکتا به‌ترتیب زیر با بردار $\mathbf{w}$ توصیف کرد. جهت $\mathbf{w}$ همان جهت محور دوران است که، برای ناظری که از مبدأ $\mathbf{w}$ به انتهای آن نگاه می‌کند، دوران درجهت حرکت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد. طول $\mathbf{w}$ برابر با **تندی زاویه‌ای** $\omega(>0)$. دوران، یعنی خارج‌قسمت تندی خطی (یامماسی) نقطه‌ای از B بر فاصلهٔ آن ازمحور دوران است.

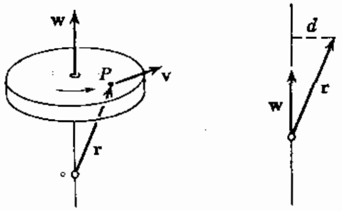
فرض کنید P نقطه‌ای از B و d فاصلهٔ آن از محور باشد. در این صورت تندی P برابر ωd است. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار مکان P نسبت به‌دستگاه مختصاتی با مبدأ O روی محور دوران باشد. دراین صورت $d=|\mathbf{r}|\sin\gamma$ است که درآن γ زاویهٔ بین $\mathbf{w}$ و $\mathbf{r}$ است. بنابراین،

$$\omega d=|\mathbf{w}||\mathbf{r}|\sin\gamma=|\mathbf{w}\times\mathbf{r}|.$$

با استفاده از این رابطه و تعریف ضرب برداری می‌بینیم که $\mathbf{v}$، بردار سرعت نقطهٔ P، را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد (شکل ۱۳۷):

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r} \qquad (۷)$$

از این فرمول ساده می‌توان برای تعیین $\mathbf{v}$ درهرنقطه از B استفاده کرد.



شکل ۱۳۷. دوران جسم‌صلب

مسائل بخش ۸.۶

نسبت بـه یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، فرض کنید $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$. مطلوب است محاسبهٔ

۱. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{b}\times\mathbf{a}$

۲. $\mathbf{b}\times\mathbf{c}\ ,\ |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\ ,\ |\mathbf{c}\times\mathbf{b}|$

۳. $\mathbf{a}\times\mathbf{c}\ ,\ |\mathbf{a}\times\mathbf{c}|\ ,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

۴. $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times\mathbf{c}\ ,\ \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)\times 2\mathbf{c}$

۵. $(\mathbf{c}-\mathbf{a})\times 2\mathbf{b}\ ,\ (\mathbf{a}-\mathbf{c})\times 2\mathbf{b}$

۶. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})\ ,\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

۷. $\mathbf{a}\times(2\mathbf{b}+3\mathbf{c})\ ,\ 2\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

۸. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}\ ,\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{b}$

۹. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})\ ,\ \mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

۱۰. $\mathbf{c}\times\mathbf{c}\ ,\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

۱۱. $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{a}\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$

۱۲. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\ ,\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۱۳. مسائل ۱ ، ۴ و ۶ نشان دهندهٔ کدام خواص ضرب خارجی هستند؟

۱۴. با درنظر گرفتن مختصات راستگرد ، نشان دهید که $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ ، $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$ ، همچنین $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ و $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

مساحت متوازی‌الاضلاعی را که بردارهای داده شده اضلاع مجاور آن هستند پیدا کنید.

۱۵. $\mathbf{i}+\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}-\mathbf{j}$

۱۶. $\mathbf{i}+2\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۷. $4\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}$

۱۸. $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

مطلوب است مساحت متوازی‌الاضلاعی که رئوس آن، درصفحهٔ xy ، عبارتند از

۱۹. $(0,0,0)\ ,\ (2,2)\ ,\ (-1,1),(1-3)$

۲۰. $(1,2)\ ,\ (0,0)\ ,\ (2,6)\ ,\ (1,4)$

۲۱. $(-4،2)\ ,\ (-6,5)\ ,\ (-3,6)\ ,\ (-5,9)$

۲۲. $(8,-3)\ ,\ (10,1)\ ,\ (9,0)\ ,\ (11,4)$

مطلوب است مساحت مثلثی که رئوس آن عبارتند از

۲۳. $(0,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (1,1,0)$

۲۴. $(3,2,0)\ ,\ (1,-1,0)\ ,\ (2,3,0)$

۲۵. $(0,4,0)\ ,\ (1,1,1)\ ,\ (-2,1,-3)$

۲۶. $(۴, -۲, ۶)$, $(۶, -۱, ۷)$, $(۵, ۰, ۵)$

درهریك از حالات زیر $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ را با استفاده از (۵) بخش ۷.۶ پیدا کنید.

۲۷. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=۳\mathbf{k}$ ۲۸. $\mathbf{a}=۲\mathbf{i}+۴\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=۵\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۲۹. $\mathbf{a}=۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ۳۰. $\mathbf{a}=۵\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$

آیا بردارهای زیر موازی هستند؟ متعامد چطور؟

۳۱. $-۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}$, $۳\mathbf{k}$ ۳۲. $۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $۶\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

۳۳. $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ۳۴. $\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$, $۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}$

۳۵. $-\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$, $۴\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۱۲\mathbf{k}$ ۳۶. $\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$, $-۳\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۶\mathbf{k}$

درهرمسئله دو برداریکه پیدا کنید که برهردو بردار داده شده عمود باشد.

۳۷. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ۳۸. $\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$, $۲\mathbf{i}+۳\mathbf{k}$

۳۹. $۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$, $۲\mathbf{i}$ ۴۰. $۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$, $۳\mathbf{j}-\mathbf{k}$

مطلوب است بردار یکهٔ قائم برصفحه‌ای که از نقاط زیر می گذرد.

۴۱. $(۰, ۰, ۰)$, $(۰, ۱, ۰)$, $(۰, ۰, ۱)$

۴۲. $(-۱, ۲, ۳)$, $(۱, ۱, ۱)$, $(۲, -۱, ۳)$

۴۳. $(۰, -۱, ۰)$, $(۲, ۲, ۱)$, $(۱, ۰, ۱)$

۴۴. $(۳, ۲, ۸)$, $(۱, ۳, ۳)$, $(۰, ۲, ۱)$

۴۵. برداری مانند $\mathbf{v}$ پیدا کنید که با فصل مشترك صفحات $۲x+۳y+۴z=۰$ و $x-y+z=۲$ موازی باشد.

۴۶. برداری مانند $\mathbf{v}$ پیدا کنید که با صفحهٔ $x+y+z=۱$ موازی وبرخط $x=y$ و $z=۰$ عمود باشد.

نیرویی مانند $\mathbf{p}$ در امتداد خطی که از نقطهٔ A می گذرد، اثر می کند. بردار گشتاور $\mathbf{m}$ نیروی $\mathbf{p}$ را نسبت به نقطه‌ای مانند Q پیدا کنید در صورتی که نیرو، نقطهٔ A و نقطهٔ Q عبارت باشند از

۴۷. $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $(۰, ۰, ۰)$, $(۰, ۱, ۰)$

۴۸. $۲\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $(۱, ۱, ۱)$, $(۲, ۲, ۲)$

۴۹. $\mathbf{i}$, (۱ , ۱ , ۰) , (−۵ , ۱ , ۰)

۵۰. $3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, (۰ , −۱ , ۴) , (۳ , ۰ , ۲)

۹.۶ ضرب سه‌گانهٔ اسکالر. سایر ضربهای مکرر

ضربهای مکرر بردارها یعنی ضربهایی که دارای سه عامل یا بیشتر هستند، کاربردهای زیادی دارند. مهمترین این ضربها ضرب **سه‌گانهٔ اسکالر** یا ضرب سه‌گانهٔ مختلط $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ی سه بردار است. فرض کنید نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد،

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},\quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k},\quad \mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}.$$

دراین صورت بنابه (۴) بخش ۸.۶، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

از اینجا و از (۸) بخش ۵.۶ می‌بینیم که ضرب سه گانهٔ اسکالر به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix} \qquad (1)$$

ضرب سه گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ را به‌صورت $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ نمایش می‌دهیم.
چون عوض کردن جای دو سطر دترمینان باعث عوض شدن علامت آن می‌شود، داریم

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})=-(\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{c}) \text{ ، وغیره.} \qquad (2)$$

اگر دومرتبه جای سطرها را عوض کنیم به‌دست می‌آوریم

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})=(\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a})=(\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}). \qquad (3)$$

حال، بنا به تعریف

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\quad (\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$

وچون ضرب نقطه‌ای جابه‌جایی است، عبارت آخر برابراست با $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. بنابراین

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad (4)$$

علاوه براین، به‌ازای هر ثابت k ،

$$(k\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = k\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}). \quad (۵)$$

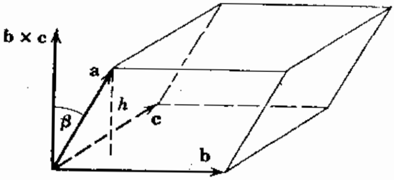
قدرمطلق حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ یك تعبیرهندسی ساده دارد. این‌حاصل‌ضرب برابر است با حجم متوازی‌السطوحی مانند P که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ اضلاع مجاور آن هستند.

درواقع، از (۱) بخش ۵.۶ به‌دست می‌آوریم

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\beta$$

که درآن β زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ وبردارحاصل‌ضرب $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ است. حال $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ مساحت قاعدهٔ P است وارتفاع P که آن را h می‌نامیم برابر با قدر مطلق $|\mathbf{a}|\cos\beta$ است (شکل ۱۳۸). بدین ترتیب حکم فوق اثبات می‌شود.

از این بررسی هندسی نتیجه می‌شود که مقدار ضرب سه گانهٔ اسکالر عددی حقیقی است که مستقل از نحوهٔ انتخاب مختصات دکارتی راستگرد در فضاست. اما باید به‌خاطر داشته باشیم که درمورد دستگاه مختصات چپگرد، به‌جای (۴) بخش ۸.۶ باید رابطهٔ (۵) آن بخش را به‌کار بریم و در نتیجه یك علامت منفی جلوی دترمینان (۱) خواهیم داشت. همچنین می‌توان گفت کــه مقدار دترمینان تحت تبدیل از یك دستگاه دکارتی راستگرد بـه دستگاه راستگرددیگر، ویا تغییر ازیك دستگاه چپگردبه‌دستگاه چپگرد دیگر، **ناورداست**، اما تبدیل از یك دستگاه راستگرد به چپگرد (یا به عکس) باعث می‌شود که دترمینان در ۱ — ضرب شود.



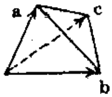
شکل ۱۳۸. تعبیر هندسی ضرب سه‌گانهٔ اسکالر

مثال ۱. چهاروجهی

حجم یك چهاروجهی راکه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ یالهای مجاور آن نسبت به یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، مقادیر زیر را دارند پیدا کنید.

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = ۴\mathbf{i} + ۶\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}.$$

حجم V متوازی‌السطوحی با اضلاع مجاور a و b و c از ضرب سه گانهٔ اسکالر زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۱۳۹. هرم

$$(\mathbf{a\,b\,c})=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۲ \\ ۳ & ۳ & -۶ \end{vmatrix} = -۵۴$$

واز آنجا $V=۵۴$؛ علامت منفی نشان می‌دهد که **a** و **b** و **c**، با این ترتیب، تشکیل یك سه‌تایی چپگرد می‌دهند. حجم چهاروجهی ۱/۶ حجم متوازی‌السطوح، یعنی ۹، است. ▲

با توجه به‌تعبیر هندسی ضرب سه گانهٔ اسکالر، معیارمفیدی برای تشخیص وابستگی خطی واستقلال خطی سه بردار به دست می آوریم. سه بردار تشکیل یك مجموعهٔ وابسته خطی می‌دهند اگر و تنها اگر هم‌صفحه (و از جمله در حالت خاص هم‌خط؛ ر. ك. بخش ۴.۶) باشند. بنا براین داریم

قضیهٔ ۱ (وابستگی خطی)

سه بردار تشکیل یك مجموعهٔ وابستهٔ خطی می‌دهند اگر وتنها اگر حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ‌اسکالر آنها صفر باشد.

ضربهای مکرردیگری راکه درکاربردها پیش‌می‌آیند می‌توان برحسب ضرب‌نقطه‌ای، ضرب برداری یا ضرب سه گانهٔ اسکالر، بیان کرد. یك فرمول مهم (که ذیلا آن را ثابت می کنیم) عبارت است از

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d} \qquad (۶)$$

از این فرمول، **اتحاد لاگرانژ** نتیجه می‌شود

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (۷)$$

اثبات این اتحاد به خواننده واگذار می‌شود ؛ (ر. ك. مسئلهٔ ۳۹ همین بخش) و همچنین (ر. ك. مسئلهٔ ۴۰)

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a\,b\,d})\,\mathbf{c}-(\mathbf{a\,b\,c})\,\mathbf{d}. \qquad (۸)$$

قبل از اثبات (۶) متذکر می‌شویم که (۶) همچنین ایجاب می کند که

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}=-\mathbf{d}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}.$$

این نشان می‌دهد که درحالت کلی $\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ و $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}$ بردارهای مختلفی

هستند یعنی ضرب خارجی **انجمنی نیست** وپرانتزها در (۶) اهمیت دارند ونمی‌توان آنها را حذف کرد. به‌عنوان مثال، نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} \quad \text{ولی} \quad \mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=0\,.$$

اثبات (۶). دستگاه مختصات دکارتی راستگردی انتخاب می‌کنیم به‌قسمی که محور x ها درامتداد d بوده، صفحهٔ xy شامل c باشد. در این صورت بردارهایی که در (۶) آمده‌اند به‌شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}\,,\quad \mathbf{d}=d_1\mathbf{i}\,.$$

بنابراین $\mathbf{c}\times\mathbf{d}=-c_2d_1\mathbf{k}$ ، و به‌علاوه،

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ 0 & 0 & -c_2d_1\end{vmatrix}=-b_2c_2d_1\mathbf{i}+b_1c_2d_1\mathbf{j}\,.$$

از طرف دیگر، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}&=b_1d_1(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j})-(b_1c_1+b_2c_2)d_1\mathbf{i}\\ &=b_1c_2d_1\mathbf{j}-b_2c_2d_1\mathbf{i}\,.\end{aligned}$$

وبدین ترتیب (۶) دردستگاه خاص مورد بحث، اثبات می‌شود. اما طول وجهت یك بردار وحاصلضرب برداری، ونیزمقدارحاصلضرب داخلی مستقل ازچگونگی انتخاب‌محورهای مختصات است. علاوه براین، نمایش $\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ برحسب $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ نسبت به‌دستگاه راستگرد و چپگرد، به‌دلیل وجود دو ضرب برداری، همانند است. بنابراین، (۶) در هر دستگاه مختصات دکارتی صادق است. ▲

مسائل بخش ۹.۶

مقدار حاصلضرب سه‌گانهٔ اسکالر بردارهای زیر (به ترتیب مفروض) را، که مؤلفه‌هایشان نسبت به‌یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داده شده‌اند، پیدا کنید.

۱. $\mathbf{i}\,,\ \mathbf{j}\,,\ \mathbf{k}$

۲. $\mathbf{j}\,,\ \mathbf{k}\,,\ \mathbf{i}$

۳. $\mathbf{i}\,,\ \mathbf{k}\,,\ \mathbf{j}$

۴. $2\mathbf{i}\,,\ 3\mathbf{j}+\mathbf{k}\,,\ 4\mathbf{i}-\mathbf{k}$

۵. $j \ , \ j+k \ , \ 3i-2j$

۶. $3i-j+k \ , \ j+k \ , \ -i+2j-3k$

۷. $2j+3k \ , \ i+4j \ , \ 6k$

۸. $4i+2j+k \ , \ i-j-k \ , \ 3i+2j+4k$

۹. $2i-3k \ , \ -i \ , \ 3i-j+5k$

۱۰. $i+j+k \ , \ 3i \ , \ 4j+5k$

آیا بردارهای زیر به‌طور خطی مستقل هستند یا وابسته؟

۱۱. $3i \ , \ -j$

۱۲. $i-6j+2k \ , \ 2j+7k \ , \ -2i+12j-4k$

۱۳. $i+j \ , \ i-j$

۱۴. $i \ , \ 0 \ , \ j$

۱۵. $i \ , \ j \ , \ k \ , \ 3i+2j-k$

۱۶. $4i+5j \ , \ i+2j \ , -i+3j$

۱۷. $i+j \ , \ j+k \ , \ k+i$

۱۸. $i+k \ , \ 3i-5k \ , \ 8k$

۱۹. λ را طوری تعیین کنید که $a=i+j+k$ ، $b=2i-4k$ ، $c=i+\lambda j+3k$ هم‌صفحه باشند.

۲۰. آیا نقاط $(1, -2, 4)$ ، $(6, 1, 5)$ ، $(-5, 2, 2)$ و $(0, 5, 3)$ در یك صفحه قرار دارند؟

۲۱. λ و μ را طوری تعیین کنید که نقاط $(2, 3, -1)$ ، $(-2, 2, -4)$ و $(\mu, \lambda, 5)$ برخطی مستقیم قرار گیرند.

۲۲. دستگاه متشکل از سه معادلهٔ خطی همگن با سه مجهول یك جواب غیربدیهی دارد اگر وتنها اگر دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد. با استفاده از این قضیهٔ آشنا، قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

حجم متوازی‌السطوحی را پیدا کنید که بردارهای داده شده اضلاع مجاور آن باشند.

۲۳. $\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, ۳$\mathbf{k}$ ۲۴. ۲$\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $-\mathbf{j}+$۴$\mathbf{k}$

۲۵. $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ ۲۶. $\mathbf{i}$, ۲$\mathbf{i}+$۴$\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+$۳$\mathbf{k}$

۲۷. ۳$\mathbf{i}+$۲$\mathbf{k}$, $-$۴$\mathbf{j}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ۲۸. $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-$۳$\mathbf{k}$

حجم چهاروجهیی با رئوس زیر را پیدا کنید.

۲۹. (۰ , ۱ , ۱) , (۱ , ۰ , ۰) , (۲ , ۲ , ۳) , (−۱ , ۰ , ۴)

۳۰. (۲ , ۱ , ۸) , (۳ , ۲ , ۹) , (۲ , ۱ , ۴) , (۳ , ۳ , ۱۰)

۳۱. (۰ , ۰ , ۰) , (۱ , ۰ , ۰) , (۰ , ۱ , ۰) , (۰ , ۰ , ۱)

۳۲. (−۱ , ۰ , ۱) , (۴ , ۴ , ۵) , (۰ , ۱ , ۰) , (۲ , ۲ , ۰)

فرض کنید، نسبت به یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد $\mathbf{a}=\mathbf{i}+$۲$\mathbf{j}-\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=$۳$\mathbf{i}-$۴$\mathbf{k}$، $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{d}=$۲$\mathbf{i}-\mathbf{j}+$۳$\mathbf{k}$. مطلوب است محاسبهٔ

۳۳. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

۳۴. $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}$, $\mathbf{d}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۳۵. $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times\mathbf{d}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\times\mathbf{c}$

۳۶. $(\mathbf{b}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۳۷. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$

۳۸. $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})$, $(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}\times\mathbf{b})$

۳۹. (۷) را ثابت کنید. راهنمایی. حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}$ و (۶) را پیدا کنید.

۴۰. (۸) را از (۶) نتیجه بگیرید.

۷

جبر خطی

قسمت دوم: ماتریس و دترمینان

ماتریس آرایه‌ای مستطیلی ازاعداد است. چنین آرایه‌هایی درشاخه‌های مختلف ریاضیات کاربردی ظاهرمی‌شوند. دربسیاری موارد ماتریسها ضرایب تبدیلات خطی (مثالهای بخش ۱.۷) یا دستگاههای معادلات خطی (معادلات خطی همزمان) هستند که مثلا در شبکه‌های الکتریکی، چارچوبها درمکانیك، برازاندن منحنی درآمارومسائل حمل ونقل پیش‌می‌آیند. ماتریسها سودمندند زیرا ما را قادر می‌سازندکه آرایه‌ای از تعداد زیادی عددرا همچون یك شیٔ منفرد درنظر بگیریم، آن را با یك علامت نشان دهیم و با این علامتها محاسبات را به‌شکل بسیار خلاصه‌ای انجام دهیم. این «خلاصه‌نویسی ریاضی» بسیار دقیق‌وپرقدرت بوده، برای بسیاری از مسائل عملی مناسب است. بیش از ۵۰ سال است که ماتریس در ریاضیات مهندسی واردشده‌است وامروزه درشاخه‌های مختلف‌آن اهمیت روزافزونی‌دارد.

در این فصل نخست ماتریسها ومفاهیم مربوط به آنها را بیان‌کرده (بخش ۱.۷)، سپس اعمال جبری روی ماتریسها را تعریف می کنیم (بخشهای ۲.۷ تا ۴.۷)، و سرانجام دستگاههای معادلات خطی (حل با روش حذفی دربخش ۵.۷، وجود در بخش ۷.۷، حل باقاعدهٔ کرامردر بخش ۱۱.۷)، دترمینانها (بخشهای۹.۷ و ۱۰.۷)، صورتهای دوخطی و دیگر صورتها (بخش ۱۲.۷)، مسائل مقدار ویژهٔ ماتریسها (بخشهای ۱۳.۷ و ۱۴.۷)، دستگاههای معادلات دیفرانسیل (بخش ۱۵.۷)، رتبهٔ ماتریس (بخشهای ۶.۷ و ۱۱.۷) ومعکوس ماتریس (بخش ۸.۷) را بررسی می کنیم.

روشهای عددی دربخشهای ۹.۱۹ تا ۱۴.۱۹ که از دیگر بخشهای فصل ۱۹ مستقل هستند ارائه شده‌اند، بنابراین می‌توان به محض آشنایی با مطالب این فصل به مطالعهٔ آنها پرداخت.

پیشنیاز این فصل: فصل ۶.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۱۲.۷ — ۱۵.۷.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت پ.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۷ مفاهیم اساسی

ماتریس آرایه‌ای مستطیلی از اعداد محصور شده بین دوپرانتز است؛ مانند

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۰٫۴ & ۸ \\ ۵ & -۳ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۰ \\ ۴ \end{pmatrix}, \quad (a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳).$$

تعریف ماتریس در زیرارائه می‌شود وقواعد محاسبات ماتریسی دربخشهای بعد تعریف و تشریح خواهند شد.

ماتریسها در ارتباط با تبدیلات خطی یا دستگاه معادلات خطی ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} ۲۰x_۱ - ۳x_۲ &= y_۱ \\ ۰٫۵x_۱ + ۷x_۲ &= y_۲ \end{aligned} \qquad (۱)$$

هرگاه $y_۱$ و $y_۲$ اعداد داده شده‌ای باشند، معادلات بالا دستگاهی از دو معادلهٔ خطی با مجهولات $x_۱$ و $x_۲$ تشکیل می‌دهند. ضرایب این دستگاه عبارتند از ۲۰ ، ۳— ، ۰٫۵، ۷ و برای تشخیص موقعیت آنها می‌توان آنها را به‌ترتیبی که در معادلات آمده‌اند، یعنی به‌صورت یك ماتریس، مرتب کرد:

$$\begin{pmatrix} ۲۰ & -۳ \\ ۰٫۵ & ۷ \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

هرگاه $x_۱$ ، $x_۲$ و $y_۱$ ، $y_۲$ کمیتهای متغیری باشند (مثلا، مختصات مربوط به دودستگاه مختصات متفاوت درصفحه)، آنگاه جفت فرمول (۱) یك تبدیل خطی را نمایش می‌دهد. این تبدیل با چهار ضریب خود، یعنی با ماتریس (۲)، کاملا معین می‌شود. می‌توانیم این

ماتریس را تنها با یك حرف، مثلا $\mathbf{A}$ ، نشان دهیم و آن را به‌صورت

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}$$

بنویسیم که در آن $a_{۱۱} = ۲۰$ ، $a_{۱۲} = -۳$ ، $a_{۲۱} = ۰٫۵$ و $a_{۲۲} = ۷$. امتیاز این نمادگذاری آن است که فوراً می‌توانیم موقعیت هر ضریب a_{jk} را دریابیم زیرا اولین شاخص زیر ، شمارهٔ سطر (خط افقی) ودومین شاخص ، شمارهٔ ستون (خط عمودی) a_{jk} می‌باشد. حال تعریفی کلی از ماتریس ارائه می‌دهیم (قواعد محاسبات ماتریسی دربخشهای بعدی تعریف وتبیین خواهند شد).

آرایه‌ای مستطیلی از اعداد (حقیقی یا مختلط) به‌صورت

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots a_{۲n} \\ \vdots & \\ a_{m۱} & a_{m۲} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

را **ماتریس** نامند. (اعداد $a_{۱۱}$ ، $a_{۱۲}$ ، ... ، و a_{mn} **عناصر** ماتریس نامیده می‌شوند. خطهای افقی‌را **سطرها** یا بردارهای سطری وخطهای‌عمودی را **ستونها** یا**بردارهای ستونی** ماتریس می‌نامند. ماتریسی راکه m سطر و n ستون دارد ماتریس $(m \times n)$ می‌نامند. (خوانده می‌شود «ماتریس m در n»).

ماتریسها رابا حروف‌بزرگ سیاه نظیر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ وغیره، یا به‌وسیلهٔ (a_{jk}) و (b_{ik}) وغیره، یعنی با نوشتن عنصر عمومی ماتریس درداخل پرانتز نشان می‌دهند.

درنمادگذاری شاخص زیر دوگانه برای عناصر ، اولین شاخص زیر همیشه معرف سطر و دومین شاخص زیرمعرف ستون عنصر داده شده است.

ماتریس

$$(a_{۱} \quad a_{۲} \cdots a_{n})$$

راکه تنها یك سطر دارد **ماتریس سطری** یا بردار سطری می‌نامند. ماتریس

$$\begin{pmatrix} b_{۱} \\ b_{۲} \\ \vdots \\ b_{m} \end{pmatrix}$$

راکه تنها یك ستون دارد **ماتریس ستونی** یا بردار ستونی می‌نامند . ماتریسهای سطری و ستونی با حروف کوچك سیاه نشان داده می‌شوند. این‌کاربا نمادگذاری ما در مورد بردارها (فصل ۶) موافقت دارد بدین معنی‌که مؤلفه‌های بردار را می‌توان به صورت

ماتریسی سطری یا ستونی نوشت.

عناصر یك ماتریس می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند. هرگاه تمام عناصر یك ماتریس حقیقی باشند آن ماتریس را **ماتریس حقیقی** می‌نامند.

ماتریسی راکه تعداد سطرها وستونهایش با هم برابر باشند **ماتریس مربعی** نامندو تعداد سطرها را **مرتبهٔ** آن گویند. ماتریس مربعی مرتبهٔ n را ماتریس $(n\times n)$ نیز می‌نامند (که خوانده می‌شود «ماتریس n در n»). درماتریس مربعی قطری که شامل عناصر a_{11}، a_{22}، . . . ، a_{nn} می‌شود **قطر اصلی** نام دارد. ماتریسهای مربعی از اهمیت خاصی برخوردارند.

تساوی ماتریسها را با الهام از تعریفی که در فصل ۶ (به‌آنتهای بخش ۲.۶ رجوع شود) از تساوی بردارها داشتیم تعریف می‌کنیم. دو ماتریس $\mathbf{A}=(a_{jk})$ و $\mathbf{B}=(b_{jk})$ مساویند اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای تعداد سطرها و ستونهای مساوی بوده وعناصر متناظر آنها برابر باشند، یعنی

$$a_{jk}=b_{jk} \qquad \text{به‌ازای تمام مقادیر } j \text{ و } k$$

دراین صورت می‌نویسیم

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}\,.$$

هرماتریسی که با حذف بعضی از سطرها وستونهای ماتریس مفروض $(m\times n)$ به دست آید **زیر ماتریس** $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود.

بنا به‌قرارداد، وبرای سهولت‌امر، مفهوم «زیرماتریس» شامل خود $\mathbf{A}$ (یعنی‌ماتریس حاصل از $\mathbf{A}$ بدون حذف سطر وستون) نیز می‌شود.

مثال ۱. زیرماتریسهای یك ماتریس

ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

سه زیرماتریس (2×2) به‌صورت

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{pmatrix},$$

دو زیر ماتریس (1×3)، یعنی دو بردار سطری، سه زیرماتریس (2×1)، یعنی سه بردار ستونی؛ شش زیرماتریس (1×2) به‌صورت

$$\begin{aligned} &(a_{11} \quad a_{12}), \quad (a_{11} \quad a_{13}), \quad (a_{12} \quad a_{13}), \\ &(a_{21} \quad a_{22}), \quad (a_{21} \quad a_{23}), \quad (a_{22} \quad a_{23}), \end{aligned}$$

وشش زیرماتریس (1×1) به‌صورت a_{11}، a_{12}، ... و a_{23} را شامل می‌شود.

۲۰۷ جمع ماتریسها. ضرب ماتریس درعدد

چون می‌خواهیم به کمك ماتریسها محاسبه کنیم اینك به‌معرفی اعمال جبری روی‌ماتریسها می‌پردازیم. دونمونه از این اعمال راکه عبارتند از جمع ماتریسها و ضرب ماتریس‌درعدد تعریف می کنیم. این تعاریف ازکاربردهای مختلف (که بعداً درهمین فصل مورد بحث‌قرار خواهند گرفت ونیز از تعاریف متناظر درمورد بردارها که دربخش ۳.۶ گفته شد، وانتظار می‌رود که حالتهای خاصی از تعاریف ماتریسی باشند، نشأت می گیرند.

جمع ماتریسها فقط در مورد ماتریسهایی تعریف می‌شودکه تعداد سطرهایشان باهم وتعدادستونهایشان باهم برابرباشند، این‌جمع به‌طریق زیرتعریف می‌شود. مجموع‌ماتریس $\mathbf{A}=(a_{jk})$ و $\mathbf{B}=(b_{jk})$ که هردو $m\times n$ هستند عبارت است از ماتریس $\mathbf{C}=(c_{jk})$ که $(m\times n)$ است وعناصر آن عبارتند از

$$c_{jk}=a_{jk}+b_{jk} \qquad \begin{matrix} j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n \end{matrix} \tag{1}$$

ومی نویسیم

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

می بینیم که عناصر $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ از جمع کردن عناصر متناظر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۱. جمع ماتریسها

هرگاه داشته باشیم

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

، آنگاه داریم

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \blacktriangle$$

ماتریس $(m\times n)$ **صفر**، $\mathbf{0}$ را ماتریسی تعریف می کنیم کـه تمام عناصر آن صفر هستند. ملاحظـه می کنیم کـه بنابراین تعریف ماتـریسها دارای همان خواص جمع اعداد حقیقی است.

$$\text{(الف)}\quad \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\text{(ب)}\quad (\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W}=\mathbf{U}+(\mathbf{V}+\mathbf{W})\quad (\text{که نوشته می‌شود } \mathbf{U}+\mathbf{V}+\mathbf{W})\qquad (۲)$$

$$\text{(پ)}\quad \mathbf{A}+0=\mathbf{A}$$

$$\text{(ت)}\quad \mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$$

دراینجا $-\mathbf{A}=(-a_{jk})$ ماتریس $(m\times n)$ ی است که از ضرب کردن تمام عناصر $\mathbf{A}$ در ۱ — به‌دست می‌آید و **منفی** $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود.

به‌جای $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ می‌نویسیم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ و این ماتریس را **تفاضل** $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌نامیم بدیهی است که عناصر این ماتریس از تفریق عناصر متناظر دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آیند.

ضرب ماتریس درعدد به‌ترتیب زیر تعریف می‌شود. **حاصل‌ضرب** ماتریس $\mathbf{A}$ که $(m\times n)$ است در عدد q با $q\mathbf{A}$ یا $\mathbf{A}q$ نشان داده می‌شود و ماتریسی است $(m\times n)$ که از ضرب هرعنصر $\mathbf{A}$ در q حاصل می‌شود یعنی

$$q\mathbf{A}=\mathbf{A}q=\begin{pmatrix} qa_{11} & qa_{12} & \cdots & qa_{1n} \\ qa_{21} & qa_{22} & \cdots & qa_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ qa_{m1} & qa_{m2} & \cdots & qa_{mn} \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

مثال ۲. ضرب ماتریس درعدد

هرگاه

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۲٫۷ & -۱٫۸ \\ ۰٫۹ & ۳٫۶ \end{pmatrix}$، آنگاه $\mathbf{A}+\mathbf{A}=۲\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۵٫۴ & -۳٫۶ \\ ۱٫۸ & ۷٫۲ \end{pmatrix}$ و

$\frac{۱۰}{۹}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۴ \end{pmatrix}$. ▲

از تعاریف فوق می‌بینیم که به‌ازای هرماتریس $(m\times n)$ (با m و n مشخص) و هرعدد داریم

$$\text{(الف)}\quad q(\mathbf{A}+\mathbf{B})=q\mathbf{A}+q\mathbf{B}$$

$$\text{(ب)}\quad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}\qquad (۴)$$

$$\text{(پ)}\quad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}\quad (\text{که نوشته می‌شود } ck\mathbf{A})$$

$$\text{(ت)}\quad ۱\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

توجه کنید که $(-۱)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$ منفی $\mathbf{A}$ است.

فرمولهای (۲) و (۴) خواصی را بیان می‌کنند که مشخصهٔ فضای برداریند. (ر. ك. بخش ۴.۶). لذا داریم:

قضیهٔ ۱ (فضای برداری ماتریسها)

تمام ماتریسهای $(m \times n)$ حقیقی (یا مختلط) (با m و n مشخص) تشکیل یك فضای برداری حقیقی (یا مختلط) به‌بعد mn می‌دهند. ماتریسهای $\mathbf{E}_{rs}$ $(r=۱\,,\,\ldots\,,m$؛ $s=۱\,,\,\ldots\,,n)$ است که تعدادآنها mn است پایه‌ای برای این فضا تشکیل می‌دهند، ماتریس $\mathbf{E}_{rs}$ ماتریسی $(m \times n)$ است‌که درآن $e_{rs}=۱$ (یعنی عنصر سطر rام و ستون sام برابر ۱ است) وتمام عناصر دیگر صفر هستند.

مسائل مربوط به‌جمع ماتریسها و ضرب ماتریس در عدد در آخر بخش بعد آورده شده است.

۳.۷ ترانهادماتریس. ماتریسهای مخصوص

دراین بخش کوتاه می‌خواهیم عمل سادهٔ دیگری روی‌ماتریس تعریف‌کرده بعضی‌ازانواع بخصوص ماتریسهایی راکه از نظر عملی اهمیت دارند معرفی کنیم.

ترانهش یك ماتریس به‌طریق زیرتعریف می‌شود. **ترانهاد** $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ماتریس $(m \times n)$، $\mathbf{A}=(a_{jk})$ ماتریس $(n \times m)$ی است‌که ازتعویض‌سطرهای $\mathbf{A}$ با ستونهای آن‌به‌دست می‌آید، یعنی سطر j ام $\mathbf{A}$ ستون j ام $\mathbf{A}_{\mathrm{T}}$ می‌شود:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=(a_{kj})=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & \cdots & a_{m۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & \cdots & a_{m۲} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{۱n} & a_{۲n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (۱)$$

خواننده می‌تواند ثابت کندکه

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}. \qquad (۲)$$

مثال ۱. ترانهش یك ماتریس

هرگاه داشته باشیم

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۵ & -۸ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$ ، آنگاه داریم $$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ -۸ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

مثال ۲. ترانهش یك ماتریس سطری

ترانهاد یك ماتریس سطری ماتریسی ستونی است وبالعکس. مثلاً، اگر

$$\mathbf{b}=(\text{۷} \quad \text{۵} \quad -\text{۲})\text{، درآن صورت } \mathbf{b}^T=\begin{pmatrix} \text{۷} \\ \text{۵} \\ -\text{۲} \end{pmatrix}.$$

ماتریس مربعی **حقیقی** $\mathbf{A}=(a_{jk})$ را **متقارن** نامند هرگاه با ترانهاد خودش برابر باشد،

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}\text{، یعنی } a_{kj}=a_{jk} \qquad (j, k=\text{۱}, \cdots, n) \qquad (\text{۳})$$

ماتریس مربعی **حقیقی** $\mathbf{A}=(a_{jk})$ را **ضد متقارن** نامند هرگاه

$$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}\text{، یعنی } a_{kj}=-a_{jk} \qquad (j, k=\text{۱}, \cdots, n) \qquad (\text{۴})$$

(مفاهیم مشابه درمورد ماتریسهای مختلط بعداً دربخش ۱۲.۷ تعریف می‌شود.) توجه کنید که به‌ازای $k=j$ در (۴) داریم $a_{jj}=-a_{jj}$، این نشان می‌دهد که عناصرقطراصلی یك ماتریس ضد متقارن همگی، صفرند.

هرماتریس مربعی حقیقی $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت مجموع یك ماتریس متقارن $\mathbf{R}$ ویك ماتریس ضد متقارن $\mathbf{S}$ نوشت به‌طوری که

$$\mathbf{R}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T) \text{ و } \mathbf{S}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T).$$

مثال ۳. ماتریسهای متقارن وضد متقارن

ماتریسهای

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\text{۳} & \text{۱} & \text{۵} \\ \text{۱} & \text{۰} & -\text{۲} \\ \text{۵} & -\text{۲} & \text{۴} \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \text{۰} & -\text{۴} & \text{۱} \\ \text{۴} & \text{۰} & -\text{۵} \\ -\text{۱} & \text{۵} & \text{۰} \end{pmatrix}$$

به‌ترتیب متقارن وضد متقارن هستند. ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \text{۲} & \text{۳} \\ \text{۵} & -\text{۱} \end{pmatrix}$$

نه‌متقارن است ونه‌ضد متقارن. $\mathbf{A}$ را می‌توان به‌صورت $\mathbf{A}=\mathbf{R}+\mathbf{S}$ نوشت‌که در آن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{S}$ به‌ترتیب ماتریسهای متقارن وضد متقارن زیر هستند:

$$R=\frac{1}{2}(A+A^T)=\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & -۱ \end{pmatrix}$$ و $$S=\frac{1}{2}(A-A^T)=\begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

▲

ماتریس مربعی $A=(a_{jk})$ کـه عناصر واقع در بالای (یا پایین) قطر اصلی آن همگی صفر باشند **ماتریس مثلثی** نامیده می‌شود.
مثلاً،

$$T_1=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$ و $$T_2=\begin{pmatrix} ۱ & ۶ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$$

ماتریسهایی مثلثی هستند

ماتریس مربعی $A=(a_{jk})$ که تمام عناصر واقع دربالا وپایین قطر اصلی آن‌همگی صفر هستند، یعنی $a_{jk}=۰$، به‌ازای تمام مقادیر $j\neq k$، **ماتریس قطری** نامیده‌می‌شود.
مثلا،

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{pmatrix}$$ و $$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

ماتریسهایی قطریند.

ماتریس قطری n سطریی که تمام عناصرروی قطراصلی‌آن ۱ باشند، **ماتریس یکه** نامیده می‌شود (به دلایلی که در بخش ۸.۷ بیان می‌شود) وآن را با I_n یا به‌اختصار با I نمایش می‌دهند. مثلا ماتریس یکهٔ (۳×۳) عبارت است از

$$I=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

مسائل بخش‌های ۱.۷ تا ۳.۷

بافرض $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix} ۰ & -۲ \\ ۴ & ۳ \end{pmatrix}$، و $C=\begin{pmatrix} ۵ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$،
مطلوب است محاسبهٔ :

۱. $B+A$ ، $A+B$

۲. $B-A$ ، $A-B$

۳. $2(2A-B)$ ، $4A-2B$ ۴. A^T ، B^T ، C^T ، $(B^T)^T$

۵. $(A+B)^T$ ، A^T+B^T ۶. $A+A^T$ ، $A-A^T$

۷. آیا $C+C^T$ تعریف شده است؟ ۸. آیا $A+C$ تعریف شده است؟

۹. آیا A و B متقارنند؟

۱۰. B را به‌صورت مجموع یك ماتریس متقارن ویك ماتریس ضد متقارن نمایش دهید.

با فرض $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ، $N=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ ، و $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، مطلوب است محاسبهٔ

۱۱. $M+P$ ، $P+M$ ۱۲. $M-P$ ، $P-M$

۱۳. $3M+2P$ ۱۴. $M+M^T$ ، $M-M^T$

۱۵. $(M-P)^T$ ، M^T-P^T ۱۶. $(3P)^T$ ، $3P^T$

۱۷. آیا $M+N$ ، $M+N^T$ ، $M+P^T$ ، $N+C^T$ (C دربالا داده شده است) تعریف شده‌اند؟

۱۸. روابط (۲) و(۴) بخش۲.۷ را ثابت کنید وهریك‌ازاین روابط را باذکرمثالی تشریح کنید.

۱۹. ثابت‌کنید $(A+B)^T=A^T+B^T$ و برای آن دو مثال بیاورید.

۲۰. ثابت‌کنید $(aA)^T=aA^T$ ، $(A^T)^T=A$ و برای هرفرمول مثالی بیاورید.

۲۱. ثابت کنید که ماتریسهای مربعی دوسطری متقارن تشکیل یك فضای برداری می‌دهند. بعد این فضا چیست؟ (ر. ك. بخش ۴.۶.)

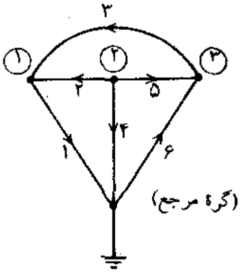
۲۲. آیاماتریسهای مربعی دوسطری ضدمتقارن تشکیل فضای برداری می‌دهند؟ ماتریسهای مربعی دوسطری با عناصر حقیقی غیرمنفی چطور؟

۲۳. پایه‌ای برای فضای برداری تمام ماتریسهای مربعی دو سطری پیدا کنید. همین‌کار را برای فضای برداری تمام ماتریسهای مربعی دوسطری متقارن حقیقی انجام دهید.

۲۴. تمام ماتریسهای n سطری مربعی را پیدا کنید که هم‌متقارن باشند وهم ضد متقارن.

۲۵. نشان دهید که تمام ماتریسهای مربعی n سطری متقارن حقیقی تشکیل یک فضای برداری می‌دهند، بعد این فضا را تعیین کنید و پایه‌ای برای آن بیابید.

۲۶. (**ماتریس تلاقی گرهی**) چنانچه بعداً می بینیم ماتریسها کاربردهای مهندسی زیادی دارند. به‌عنوان مثال می‌توان برای مشخص کردن اتصالات (در شبکه‌های الکتریکی ، شبکهٔ راههای ارتباطی بین شهرها وغیره) ازماتریس استفاده کرد شکل زیریك شبکهٔ الکتریکی را نشان می‌دهد که دارای شش شاخه (اتصال) و چهار گره (نقطه‌ای که درآن دو یـا



شاخه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
گرهٔ (۱) ○	۱	−۱	−۱	۰	۰	۰
گرهٔ (۲) ○	۰	۱	۰	۱	۱	۰
گرهٔ (۳) ○	۰	۰	۱	۰	−۱	−۱

مسئلهٔ ۲۶. شبکه وماتریس تلاقی گرهی

بیش‌از دو شاخه تلاقی می کنند) است. یکی از گره‌ها گرهٔ مرجع است (گرهی که به دلیل‌اتصال بازمین ولتاژش صفراست). سایر گره‌هارا شماره گذاری می کنیم؛ شاخه‌ها رانیزجهت گذاری وشماره گذاری می کنیم. نحوهٔ انجام دادن این‌کار اختیاری‌است. حال می‌توان شبکه را با ماتریسی مانند $\mathbf{A}=(a_{jk})$ نمایش داد به‌طوری که

$$a_{jk}=\begin{cases} +1 & \text{هرگاه شاخهٔ } k \text{ از گرهٔ } J \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{هرگاه شاخهٔ } k \text{ به گرهٔ } J \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{هرگاه شاخهٔ } k \text{ با گرهٔ } J \text{ ارتباطی نداشته باشد} \end{cases}$$

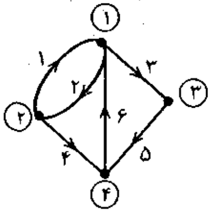
$\mathbf{A}$ را ماتریس تلاقی‌گرهی شبکه می‌نامند. نشان دهید که درمورد شبکهٔ شکل بالا، $\mathbf{A}$ به‌صورتی است که درکنار شکل نوشته‌ایم.

۲۷. ماتریس‌تلاقی گرهی شبکه‌ای راکه درشکل‌صفحهٔ بعد نشان داده شده است پیدا کنید.

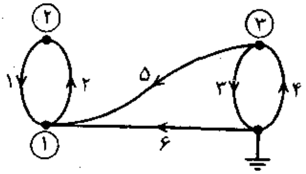
۲۸. طرح شبکه‌ای را بکشید که ماتریس تلاقی گرهی آن به‌صورت زیر باشد :

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

۲۹. روشهای تحلیل شبکهٔ الکتریکی درسایر زمینه‌ها هم کاربرد دارد. مشابه ماتریس تلاقی گرهی را برای شبکه‌ای از خیابانهای یکطرفه که درشکل نشان داده شده است پیدا کنید (جهتها با پیکان مشخص شده‌اند).



مسئلهٔ ۲۹. شبکهٔ خیابانهای یکطرفه



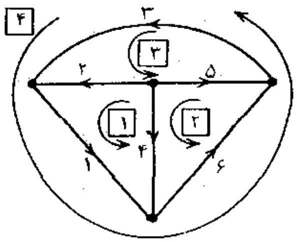
مسئلهٔ ۲۷. شبکهٔ الکتریکی

۳۰. **(ماتریس تلاقی خانه‌ای)** یك شبکه را به‌وسیلهٔ ماتریس تلاقی خانه‌ای $\mathbf{M}=(m_{jk})$ نیز می‌توان مشخص کرد به‌طوری که

$m_{jk} =$
- $+1$ هرگاه شاخهٔ k درخانهٔ $\boxed{j}$ باشد وهمان جهت را داشته باشد
- -1 هرگاه شاخهٔ k درخانهٔ $\boxed{j}$ باشد ولی جهت مخالف آن را داشته باشد
- 0 هرگاه شاخهٔ k درخانهٔ $\boxed{j}$ نباشد

دراینجا منظور از خانه حلقه‌ای است که شاخه‌ای در داخل (یا بیرون) آن نباشد. در اینجا شماره گذاری وجهت گذاری (جهت گیری) حلقه‌ها به‌طور دلخواه انجام گرفته است. نشان دهید که درمورد شبکهٔ شکل زیر داریم

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



مسئلهٔ ۳۰. شبکه

۴.۷ ضرب ماتریسی

حال به تعریف ضرب ماتریس درماتریس می‌پردازیم. این تعریف رامی‌توان با استفاده‌ای که ازماتریس درارتباط با تبدیلات خطی می‌شود توجیه‌کرد. برای روشن‌کردن مطلب، با ذکرحالت ساده‌ای شروع می‌کنیم.

سه دستگاه محورهای مختصات درصفحه درنظر می گیریم وآنها را دستگاه w_1w_2، دستگاه x_1x_2، ودستگاه y_1y_2 می‌نامیم وفرض می کنیم که این دستگاهها با تبدیلات

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad (1)$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

و

$$x_1 = b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \qquad (2)$$
$$x_2 = b_{21}w_1 + b_{22}w_2$$

که تبدیلات خطی نامیده می‌شوند به‌هم مربوط باشند. واضح است که مختصات y_1y_2 را می‌توان مستقیماً برحسب مختصات w_1w_2 با تبدیل خطی یکتای زیر به‌دست آورد:

$$y_1 = c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \qquad (3)$$
$$y_2 = c_{21}w_1 + c_{22}w_2$$

ضرایب c_{11}، c_{12}، c_{21} و c_{22} این تبدیل را می‌توان با قرار دادن (۲) در (۱)

$$y_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)$$
$$y_2 = a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)$$

ومقایسهٔ نتیجه با (۳) به‌دست آورد. خواهیم داشت

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \qquad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \qquad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

یا به‌اختصار

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + b_{j2}b_{2k} = \sum_{i=1}^{2} a_{ji}b_{ik} \qquad j, k = 1, 2. \qquad (4)$$

ماتریسهای ضرایب تبدیلات (۱) و (۲) عبارتند از

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

وحاصل‌ضرب $\mathbf{AB}$ ی ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ (با همین ترتیب) را ماتریس ضرایب

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

مربوط به «تبدیل مرکب» (۳) تعریف می‌کنیم، یعنی

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

که عناصر $\mathbf{C}$ از (۴) به‌دست می‌آیند.

تذکر این مطلب مفید است که هرگاه $\mathbf{A}$ را برحسب بردارهای سطری بنویسیم:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad \text{که درآن} \quad \begin{matrix} \mathbf{a}_1 = (a_{11} \quad a_{12}) \\ \mathbf{a}_2 = (a_{21} \quad a_{22}) \end{matrix}$$

و $\mathbf{B}$ را برحسب بردارهای ستونی بنویسیم:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) \quad \text{که درآن} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

در آن صورت عناصر $\mathbf{C}$ را می‌توان به‌سادگی به‌صورت حاصل‌ضرب نقطه‌ای نوشت:

$$c_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1, \qquad c_{12} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2,$$
$$c_{21} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1, \qquad c_{22} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 .$$

مثال ۱. ضرب ماتریسها

فرض کنید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

بنا به (۴) داریم

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times1+1\times5 & 2\times(-2)+1\times3 \\ 3\times1+4\times5 & 3\times(-2)+4\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 23 & 6 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

برای رسیدن به‌تعریف ضرب دو ماتریس درحالت کلی مطالب فوق به‌صورت کلی درمورد تبدیل

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned} \qquad (5)
$$

و تبدیل

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}w_1 + \cdots + b_{1p}w_p \\
x_2 &= b_{21}w_1 + \cdots + b_{2p}w_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= b_{n1}w_1 + \cdots + b_{np}w_p
\end{aligned} \qquad (6)
$$

را بیان می‌کنیم. باقراردادن (۶) در(۵) می‌توانیم y_1، ...، y_m رابرحسب w_1، ...، w_p، به‌صورت

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}w_1 + \cdots + c_{1p}w_p \\
y_2 &= c_{21}w_1 + \cdots + c_{2p}w_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= c_{m1}w_1 + \cdots + c_{mp}w_p
\end{aligned} \qquad (7)
$$

بنویسیم؛ دراین معادلات ضرایب از دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}.$$

اینکه لازم است حاصلضرب $\mathbf{AB}$ ی ماتریسهای ضرایب $\mathbf{A}=(a_{jk})$ و $\mathbf{B}=(b_{jk})$ ی تبدیلات (۵) و(۶)، (باهمین‌ترتیب) ماتریس ضرایب $\mathbf{C}=(c_{jk})$ ی «تبدیل مرکب» (۷) باشد، منجر به‌تعریف زیر می‌شود.

تعریف. ضرب ماتریسها

فرض کنید $\mathbf{A}=(a_{jk})$ ماتریسی $(m\times n)$ و $\mathbf{B}=(b_{jk})$ ماتریسی $(r\times p)$ باشد. حاصل‌ضرب $\mathbf{AB}$ (با همین ترتیب) تنها وقتی تعریف می‌شود که r مساوی n باشد و در این صورت حاصل ضرب ماتریسی $(m\times p)$ است به صورت $\mathbf{C}=(c_{jk})$ که عناصر آن عبارتند از

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ik}. \qquad (8)$$

به‌جای $\mathbf{AA}$ می‌نویسیم $\mathbf{A}^2$ و به‌همین ترتیب. ▲

می‌بینیم‌که c_{jk} حاصلضرب اسکالر (حاصلضرب نقطه‌ای) j امین بردار از ماتریس

اول $\mathbf{A}$، و k امین بردار ستونی ماتریس دوم، $\mathbf{B}$ است؛ به‌عبارت دیگر هرگاه بنویسیم

$$\mathbf{B}=(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_p) \text{ و } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

به طوری که a_1، ...، a_m بردارهای سطری $\mathbf{A}$ و b_1، ...، b_p بردارهای ستونی $\mathbf{B}$ باشند خواهیم داشت

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_1\cdot b_1 & a_1\cdot b_2 & \cdots & a_1\cdot b_p \\ a_2\cdot b_1 & a_2\cdot b_2 & \cdots & a_2\cdot b_p \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_m\cdot b_1 & a_m\cdot b_2 & \cdots & a_m\cdot b_p \end{pmatrix} \qquad (9)$$

بنابراین، فرآیند ضرب ماتریسی به صورت **ضرب سطرها درستونها** بیان می‌شود. شکل ۱۴۰ را ببینید.

مثال ۲. ضرب ماتریسها

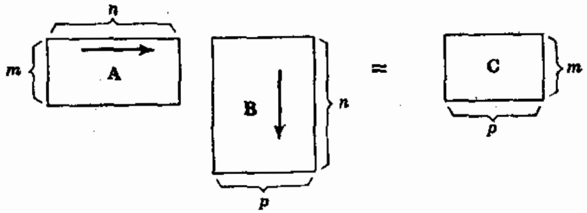
فرض کنید

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

درآن صورت بنابه (۸) حاصلضرب $\mathbf{AB}$ عبارت است از

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}.$$

درحالی که حاصلضرب $\mathbf{BA}$ تعریف شده نیست. ▲



شکل ۱۴۰. ضرب ماتریسی $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$

ضرب‌ماتریس در بردار وضرب ماتریسی بردارها را می‌توان با مثالهای زیر توضیح داد.

مثال ۳

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۴ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۱ \\ -۵ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱۹ \\ ۴ \\ -۹ \end{pmatrix}$$

مثال ۴

$$(۳ \quad ۶ \quad ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{pmatrix}=(۱۹), \qquad \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{pmatrix}(۳ \quad ۶ \quad ۱)$$

$$=\begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۱ \\ ۶ & ۱۲ & ۲ \\ ۱۲ & ۲۴ & ۴ \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ضرب سمت چپ متناظر است باضرب نقطه‌ایی که در بخش ۵.۶ تعریف شد. ▲

درستی محاسبات دستی را می‌توان با استفاده از مجموع عناصر ستونها امتحان کرد. درمثال ۲ داشتیم

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۵ & ۳ & ۱ \\ ۶ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۷ & ۲ & ۶ \\ ۵۶ & ۳۶ & ۱۶ \end{pmatrix}$$

مجموع ۳ ۶ ۵   ۶۳ ۳۸ ۲۲

امتحان :

$$۳\times۱+۶\times۵+۵\times۶=۶۳$$

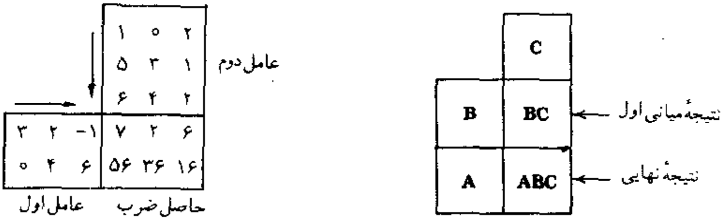
$$۳\times۰+۶\times۳+۵\times۴=۳۸$$

$$۳\times۲+۶\times۱+۵\times۲=۲۲$$

شکل ۱۴۱ آرایشی از ماتریسهای **A** و **B**ی مثال ۲ وحاصل‌ضرب **AB**ی آنها را نشان می‌دهد که برای محاسبات دستی مناسب است. توضیح آنکه هرعنصر c_{jk} از ماتریس حاصل‌ضرب در محل تقاطع آن سطر از ماتریس اولی و آن ستون از ماتریس

آخری که برای محاسبهٔ c_{jk} به‌کار رفته‌اند قرار می‌گیرد. تعمیم روش مرتب کردن‌فوق‌برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب سه ماتریس و یا بیشتر کار ساده‌ای است (شکل ۱۴۱).

نتیجهٔ میانی اول عامل دوم
نتیجهٔ نهایی حاصل ضرب عامل اول



شکل ۱۴۱. ضرب ماتریسی

قضیهٔ ۱ (خواص ضرب ماتریسی)

(الف) ضرب ماتریسی انجمنی است و نسبت به‌جمع ماتریسها پخش‌پذیر است، یعنی

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B}=k(\mathbf{AB})=\mathbf{A}(k\mathbf{B}) \qquad \text{(نوشته‌می‌شود } k\mathbf{AB} \text{ یا } \mathbf{A}k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad \text{(نوشته می‌شود } \mathbf{ABC})$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC} \tag{۱۰}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$$

مشروط بر آنکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ چنان باشندکه عبارات سمت چپ تعریف شده باشند. (k هرعددی می‌تواند باشد.)

(ب) ضرب ماتریسی **جابه‌جایی‌نیست**، یعنی هرگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهایی باشند که هم $\mathbf{AB}$ و هم $\mathbf{BA}$ درمورد آنها تعریف شده باشند آنگاه

$$\text{درحالت کلی } \mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}\,.$$

(پ) قانون حذف درحالت‌کلی صادق نیست، یعنی

$$\mathbf{AB}=0 \text{ **الزاماً ایجاب نمی‌کندکه** } \mathbf{A}=0 \text{ یا } \mathbf{B}=0$$

اثبات. اثبات قسمت (الف) به‌خواننده واگذار می‌شود. درستی (ب) را با توجه به‌مثال ۴ (بالا) یا از مثال زیر نیزمی‌توان استفاده کرد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

اما

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

درستی (پ) را می‌توان با مثال زیر اثبات کرد:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$ ▲

خواص (ب) و (پ) کاملا غیر معمولیند زیرا درضرب معمولی اعداد چنین خواصی وجود ندارند و بنابراین باید درمورد آنها دقت بیشتری کرد. خاصیت (پ) به تفصیل در بخش ۸.۷ بررسی می‌شود. خواننده می‌تواند با استفاده از مثال فوق نشان دهد که $\mathbf{AB}=۰$ نتیجه نمی‌دهد $\mathbf{BA}=۰$.

خاصیت (ب) ایجاب‌می‌کندکه ترتیب عوامل درضرب ماتریسی به‌دقت مراعات شود؛ بنابه‌این خاصیت فقط دربعضی موارد معین رابطهٔ $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ صادق است. برای‌رعایت دقت می گوییم در ضرب $\mathbf{AB}$ ماتریس $\mathbf{A}$ **پیش‌ضرب** ماتریس $\mathbf{B}$ است و یا ماتریس $\mathbf{B}$ **پس ضرب** ماتریس $\mathbf{A}$ است.

هرماتریس قطری‌که تمام عناصر روی قطر آن برابر باشند **ماتریس اسکالر** نامیده می‌شود. بنابراین یك ماتریس اسکالر به‌صورت

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} k & ۰ \dots ۰ \\ ۰ & k \dots ۰ \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\ \cdot \\ ۰ & ۰ \dots k \end{pmatrix}$$

است که در آن k هرعددی می‌تواند باشد. هر گاه $\mathbf{S}$ ماتریسی n سطری و $\mathbf{A}$ یك ماتریس $(n\times n)$ باشد آنگاه

$$\mathbf{AS}=\mathbf{SA}=k\mathbf{A}; \qquad (۱۱)$$

یعنی، ضرب ماتریس مربعی n سطری $\mathbf{A}$ دریك ماتریس اسکالر n سطری همانند ضرب ماتریس $\mathbf{A}$ در یك عدد است و $\mathbf{S}$ با هرماتریس $(n\times n)$ جابه‌جا شونده است. اثبات این مطلب بـه خواننده واگذار می‌شود. به خصوص در مورد ماتریس n سطری یکهٔ $\mathbf{I}$ (ر. ك. بخش ۳.۷) داریم

$$\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}.$$

ترانهش حاصل ضرب. ترانهاد حاصل‌ضرب چند عامل برابر با حاصل ضرب ترانهادهای

آن عوامل با ترتیب معکوس است یعنی

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (۱۲)$$

اثبات این مطلب را که از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می‌شود، به‌خواننده وا گذار می‌کنیم.

بردارهای ستونی حاصل ضرب. هرگاه $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ بردارهای ستونی ماتریس $\mathbf{B}$ باشند و حاصل ضرب $\mathbf{AB}$ تعریف شده باشد، آنگاه از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می‌شود که ماتریس حاصل ضرب $\mathbf{AB}$ دارای بردارهای ستونی $\mathbf{Ab}_1, \ldots, \mathbf{Ab}_p$ است یعنی

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{Ab}_1 \ \mathbf{Ab}_2 \ \cdots \ \mathbf{Ab}_p) \qquad (۱۳)$$

تبدیلات خطی. می‌توان بااستفاده ازتعریف ضرب ماتریسی‌تبدیل خطی (۵) را به‌صورت سادهٔ زیر نوشت:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (۵')$$

که درآن $\mathbf{A} = (a_{jk})$ و

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، (۶) را می‌توان به صورت زیرنوشت:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{w} \qquad (۶')$$

که درآن $\mathbf{w}$ ماتریسی ستونی با عناصر $w_1, \ldots, w_p$ است. باقراردادن (۶′) در (۵′) وبا استفاده از خاصیت انجمنی ضرب ماتریسی (ر. ك. قضیهٔ ۱) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{w} \qquad (۷')$$

واین با (۷) تطبیق می‌کند.

یادآور می‌شویم که می‌توان این ملاحظات راتعمیم داد وازاین موقعیت برای‌تعریف مفاهیمی که از اهمیت عمومی برخوردارند استفاده کرد. فرض‌کنید X و Y فضاهای‌برداری باشند (ر. ك. بخش ۴.۶). به‌هر بردار $\mathbf{x}$ در X بردار یکتای $\mathbf{y}$ در Y را نسبت می‌دهیم دراین صورت می‌گوییم که یك **نگاشت** (یا **تبدیل** یا **عملگر**) از X به Y داده شده است. چنین نگاشتی را بایك حرف بزرگ، مثلاً F، نشان می‌دهند. بردار $\mathbf{y}$ در Y که به بردار $\mathbf{x}$ در X نسبت داده می‌شود، **نقش** x نام دارد و با $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ [یا $F\mathbf{x}$، بدون پرانتز] نشان داده می‌شود. به‌طور کلی هرگاه S زیرمجموعه‌ای از X باشد مجموعهٔ نقشهای همهٔ

عناصر S را **نقش** S می‌نامند و با $F(S)$ نشان می‌دهند.

F را **یك به یك** نامند اگر بردارهای متفاوت در X دارای نقشهای متفاوتی در Y باشند. نگاشت F را **پوششی** یانگاشت X **بر روی** Y نامند هرگاه هر بردار $\mathbf{y}$ در Y نقش حداقل یك بردار از X باشد. نگاشت F را **دوسویی** نامند اگر F هم یك به‌یك و هم پوششی باشد.

$\mathbf{F}$ را **نگاشت خطی** و یا **تبدیل‌خطی** نامند هرگاه به‌ازای هر بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{z}$ در X و به‌ازای هراسکالر α داشته باشیم

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{z})=F(\mathbf{x})+F(\mathbf{z}) \tag{۱۴}$$

$$F(\alpha\mathbf{x})=\alpha F(\mathbf{x})$$

مثلا طبق این تعریف‌عمومیتر، (۵) و (۶) تبدیل خطی هستند.

تا اینجا X و Y هرفضای برداری دلخواهی می‌توانستند باشند. ازاین به‌بعد فرض می‌کنیم $X=R^n$ ، فضای برداری تمام n تاییهای مرتب از اعـداد حقیقی و $Y=R^m$ ، فضای برداری تمام m تاییهای مرتب از اعداد حقیقی باشند.

فرض کنیدکه $\mathbf{e}_{(۱)}$ ، . . . ، $\mathbf{e}_{(n)}$ پایه‌ای برای $X=R^n$ باشد. دراین صورت هر بردار $\mathbf{a}$ در X نمایشی یکتا به‌صورت زیر دارد:

$$\mathbf{x}=x_۱\mathbf{e}_{(۱)}+\cdots+x_n\mathbf{e}_{(n)}\ ,$$

که می‌توانیم آن را به‌شکل $\mathbf{x}=(x_۱\ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}}$ بنویسیم. هرگاه F تبدیلی خطی از X به Y باشد درآن صورت

$$F(\mathbf{x})=F(x_۱\mathbf{e}_{(۱)}+\cdots+x_n\mathbf{e}_{(n)})=x_۱F(\mathbf{e}_{(۱)})+\cdots+x_nF(\mathbf{e}_{(n)}).$$

بنابراین هرتبدیل خطی از $X=R^n$ به $Y=R^m$ به‌طور یکتا با نقشهای عناصر پایهٔ X معین می‌شود.

روابط (۵) و ('۵) نشان می‌دهند که هرماتریس یك تبدیل خطی‌را مشخص‌می‌کند. بالعکس، فرض کنید $\mathbf{e}_{(۱)}$، . . .، $\mathbf{e}_{(n)}$ پایه‌ای باشد از $X=R^n$ به‌طوری که تمام مؤلفه‌های هر $\mathbf{e}_k$ صفر باشند، غیر از k امین مؤلفهٔ آن‌که ۱ است، یعنی

$$\mathbf{e}_{(۱)}=\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ \vdots\\ ۰\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_{(۲)}=\begin{pmatrix}۰\\ ۱\\ \vdots\\ ۰\end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{(n)}=\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ \vdots\\ ۱\end{pmatrix}$$

همین‌طور برای $Y=R^m$ پایه‌ای مانند $\mathbf{g}_{(۱)}$ ، . . . ، $\mathbf{g}_{(m)}$ انتخاب می‌کنیم به طوری که تمام مؤلفه‌های $g_{(j)}$ غیراز j امین مؤلفهٔ آن برابر صفرباشند، و j امین مؤلفهٔ برابر ۱

باشد، یعنی

$$\mathbf{g}_{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}_{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\mathbf{g}_{(m)}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

بدین ترتیب اگر F تبدیلی خطی از X به Y باشد، ماتریسی $(m\times n)$ مانند A پیدا می‌شود به‌طوری که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در X و نقش آن $\mathbf{y}=F(\mathbf{x})$ را می‌توان نوشت

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}\,.$$

در واقع F با نقشهای $\mathbf{y}_{1}=F(\mathbf{e}_{(1)})$ ، . . . ، $\mathbf{y}_{(n)}=F(\mathbf{e}_{(n)})$ معین می‌شود ؛ اگر بنویسیم $\mathbf{y}_{(j)}=(\eta_1^{(j)},\ldots,\eta_m^{(j)})^{\mathrm{T}}$ و اگر قرار دهیم $\mathbf{y}_{(1)}=\mathbf{A}\,\mathbf{e}_{(1)}$ ، یعنی

$$\begin{pmatrix}\eta_1^{(1)}\\\vdots\\\eta_m^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

خواهیم توانست عناصر اولین ستون $\mathbf{A}$ ، یعنی $a_{11}=\eta_1^{(1)}$ و $a_{21}=\eta_2^{(1)}$ . . . وغیره را تعیین کنیم. از $\mathbf{y}_{(2)}=\mathbf{A}\,\mathbf{e}_{(2)}$ عناصر دومین ستون $\mathbf{A}$ را معین می کنیم و به‌همین ترتیب درمورد بقیهٔ ستونها. گوییم که ماتریس $\mathbf{A}$ تبدیل خطی F را نسبت به‌پایه‌هایی که دربالا ذکر شد نمایش می‌دهد. منظور از چنین نمایشی این است که موضوع مورد مطالعه را با موضوع دیگری که خواص آن برای ما آشکارتر است عوض کنیم.

مثال ۵. تبدیلات خطی

ماتریسهای

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$$

اگر به‌تبدیل مختصات دکارتی درصفحه تعبیرشوند به‌ترتیب انعکاسی نسبت به $x_2=x_1$ ، انعکاس نسبت به‌محور x_1 ، انعکاس نسبت به‌مبدأ و کشیدگی (درصورتی که $a>1$ ، یا فشردگی درصورتی که $0<a<1$) درامتداد x_1 را نمایش می‌دهند.

مثال ۶. تبدیلات خطی

مبحث انتهایی این بخش ساده‌تر از آن است که دراولین نگاه به‌نظر می‌رسد. برای مشاهدهٔ

این موضوع ماتریس $\mathbf{A}$ راکه نمایش دهندهٔ تبدیل خطیی است که (x_1, x_2) را بر $(2x_1-5x_2, 3x_1+4x_2)$ می‌نگارد پیدا کنید.
چون

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ به‌ترتیب بر } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

نگاشته می‌شوند، با توجه به‌آنچه گفته شد به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

برای امتحان نتیجه می‌نویسیم

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

خواننده می‌تواند $\mathbf{A}$ را مستقیماً نیز ، با نوشتن تبدیل داده شده به‌صورت زیر ، به‌دست آورد :

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2$$
$$y_2 = 3x_1 + 4x_2$$

مسائل بخش ۴.۷

فرض کنید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

از عبارات زیر آنهایی را که تعریف شده هستند پیدا کنید.

۱. $\mathbf{AB}$ ، $\mathbf{A^TB}$ ، $\mathbf{BA}$ ، $\mathbf{B^TA}$

۲. $\mathbf{BC}$ ، $\mathbf{B^TC}$ ، $\mathbf{CB}$ ، $\mathbf{C^TB}$

۳. $\mathbf{A^2}$ ، $\mathbf{B^2}$ ، $\mathbf{C^2}$

۴. $\mathbf{AA^T}$ ، $\mathbf{A^TA}$

۵. $\mathbf{BB^T}$ ، $\mathbf{B^TB}$

۶. $\mathbf{CC^T}$ ، $\mathbf{C^TC}$

۷. $\mathbf{C^2}$ ، $\mathbf{C^4}$ ، $\mathbf{C^4 - 3C^2 + 2I}$

۸. $\mathbf{BCA}$ ، $\mathbf{B^TCA}$

۹. $\mathbf{A}^{T}\mathbf{C}\mathbf{A}$

۱۰. ماتریسهای مربعی دوسطری حقیقیی را بیابید (هرچند تا که می‌توانید) که مجذور آنها برابر $\mathbf{I}$، ماتریس یکه، باشد.

۱۱. **(ماتریس خود توان)**. ماتریس $\mathbf{A}$ را خود توان نامند اگر $\mathbf{A}^{2}=\mathbf{A}$. مثالهایی، غیر از ماتریس صفر یا یکه، برای ماتریس خود توان ارائه دهید.

۱۲. فرض کنید $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BA}$ را پیدا کنید.

۱۳. **(دوران)**. نشان دهید که تبدیل خطی $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ با ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

عبارت است از دوران دستگاه مختصات دکارتی x_1x_2 درصفحه وحول مبدأ درجهت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۱۴. $\mathbf{A}$ را به‌قسمی بیابید که $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ نمایش دهندهٔ دورانی درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت درصفحه با زاویهٔ 45° باشد.

۱۵. نشان دهید که درمسئله ۱۳،

$$\mathbf{A}^{n}=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

مفهوم هندسی این نتیجه چیست؟

۱۶. تعبیری هندسی (نظیرمثال ۵) برای تبدیل خطی با هریك از ماتریسهای‌زیر ارائه‌دهید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
$(a>1)$.

۱۷. هریك ازتبدیلات زیر رابا استفاده از ماتریس نمایش دهید وتبدیل مرکبی را بیابید که y_1 و y_2 را برحسب w_1 و w_2 بیان می‌کند.

$$x_1 = w_1 + w_2 \qquad\qquad y_1 = 2x_1 - x_2$$
و
$$x_2 = w_1 - w_2 \qquad\qquad y_2 = -x_1 + 2x_2$$

۱۸. تعبیری هندسی (نظیر مثال ۵) از تبدیل خطی $\mathbf{x} = \mathbf{B}\,\mathbf{w}$ ارائه دهید، درصورتی که داشته باشیم

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

تبدیل مرکب $\mathbf{y} = \mathbf{AB}\,\mathbf{w}$ راکه درآن $\mathbf{A}$ همان ماتریس مسئله ۱۳ است پیدا کنید. نشان دهید که $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. این از نظر هندسی چه مفهومی دارد؟

۱۹. (**جبر انجمنی**). جبرانجمنی حقیقی (یا مختلط) چنین تعریف می‌شود که مجموعه‌ای است مانند A با عناصر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ . . . به قسمی که (الف) A یك فضای برداری حقیقی (یامختلط) باشد (ر.ك. بخش ۴.۶)، (ب) روی عناصر A یك ضرب تعریف شده باشد به‌طوری که با هرزوج مرتب از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در A عنصری یکتا از A نظیرشود، این عنصر را به‌صورت $\mathbf{AB}$ می‌نویسیم و آن را حاصلضرب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌نامیم، این ضرب در(۱۰) صدق می‌کند. نشان دهید که مجموعهٔ تمام ماتریسهای $(n \times n)$ حقیقی (با n مشخص) یك جبر انجمنی است.

۲۰. آیا ماتریسهای متقارن حقیقی (3×3) تشکیل فضای برداری می‌دهند؟ آیا این ماتریسها تشکیل جبر انجمنی می‌دهند؟

۵.۷ دستگاههای معادلات خطی. روش حذفی گاوس*

یك دستگاه m معادلهٔ خطی (یامجموعهٔ m معادلهٔ خطی همزمان) با n مجهول x_1، . . . ، x_n عبارت از مجموعه معادلاتی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

a_{ik} ها اعداد مفروضی هستند که **ضرایب** دستگاه نامیده می‌شوند. b_i ها نیزاعداد مفروضی هستند. هرگاه b_i ها همگی صفرباشند آنگاه (۱) را **دستگاه همگن** می‌نامند. درصورتی که دست‌کم یکی از b_i ها غیرصفر باشد، درآن صورت (۱) را **دستگاه ناهمگن** نامند.

---

* Gauss

جواب (۱) مجموعه‌ای از اعداد x_1 ، . . . ، x_n است که درتمام m معادله صادق باشد. **بردار جواب** (۱) برداری مانند $\mathbf{x}$ است که مؤلفه‌هایش تشکیل جوابی برای (۱) بدهند. هرگاه‌دستگاه (۱) همگن باشد، حداقل‌دارای‌جواب بدیهی $x_1 = 0$ ، . . . ، $x_n = 0$ است.

از تعریف ضرب ماتریسی . . ی ذیریم که m معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت معادلهٔ برداری

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (۲)$$

نوشت که درآن **ماتریس ضرایب** $\mathbf{A} = (a_{ik})$ عبارت است از ماتریس $(m \times n)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. فرض می‌کنیم که ضرایب a_{ik} همگی صفر نباشند، بنابراین $\mathbf{A}$ ماتریس صفر نیست. توجه داشته باشید که $\mathbf{x}$ دارای n مؤلفه است درحالی که $\mathbf{b}$ دارای m مؤلفه است. ماتریس

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \\ a_{m1} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

را **ماتریس افزودهٔ** دستگاه (۱) می‌نامند. می‌بینیم که $\mathbf{B}$ از اضافه کردن ستون $\mathbf{b}$ به $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید. ماتریس $\mathbf{B}$ دستگاه (۱) راکاملا مشخص می‌کند زیرا تمام اعدادی را که در (۱) وجود دارند شامل می‌شود.

مثال ۱. تعبیر هندسی. وجود جوابها

اگر $m = n = 2$ باشد دومعادله با دومجهول x_1 و x_2 داریم:

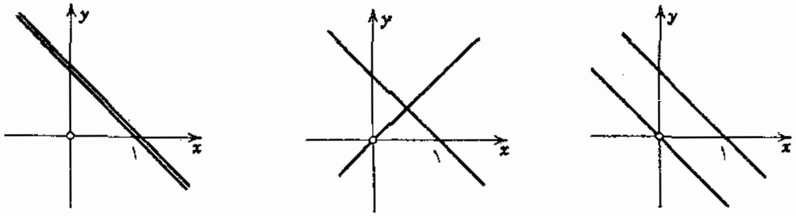
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

هرگاه x_1 و x_2 را به‌مختصات درصفحهٔ x_1x_2 تعبیر کنیم آنگاه هریك از این دو معادله یك خط راست را نمایش می‌دهد و $(x_1 \,,\, x_2)$ جواب دستگاه است اگر وتنها اگرنقطهٔ P با مختصات x_1 و x_2 روی هردوخط قرار گیرد. بنابراین سه‌حالت زیرممکن است:

(الف) هرگاه خطوط موازی باشند جوابی وجود ندارد؛

(ب) هرگاه دوخط متقاطع باشند دقیقاً یك جواب وجود دارد؛
(پ) هرگاه دوخط برهم منطبق باشند بینهایت جواب وجود دارد.
به‌عنوان مثال

حالت (الف)	حالت (ب)	حالت (پ)
$x+y=1$	$x+y=1$	$x+y=1$
$x+y=0$	$x-y=0$	$2x+2y=2$



هرگاه دستگاه همگن باشد حالت (الف) نمی‌تواند اتفاق افتد زیرا درآن‌صورت دو خط راست از مبدأ، که مختصات $(0, 0)$ آن جواب بدیهی دستگاه است، می‌گذرند. خواننده می‌تواند سه معادله با سه مجهول را نمایش دهندهٔ سه صفحه درفضا درنظر بگیرد و با روشی مشابه حالات مختلفی راکه ممکن است پیش آیند مورد بحث قرار دهد. ▲

مثال سادهٔ بالا نشان می‌دهدکه دستگاه (۱) ممکن است همیشه جواب نداشته باشد ومسائلی که درارابطه با این موضوع مطرح می‌شوند به‌شرح زیرند. آیا دستگاه مفروض (۱) جوابی دارد؟ تحت چه شرایطی این دستگاه دقیقاً یك جواب دارد؟ درصورتی که‌این دستگاه بیش از یك جواب داشته باشد مجموعهٔ تمام جوابها را چگونه می‌توان مشخص کرد؟ جوابها را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

دراین بخش به بحث دربارهٔ روشی می‌پردازیم که با فرآیند حذف منظمی جوابها را به‌دست می‌دهد، این روش‌را **روش حذفی گاوس** (یا **الگوریتم گاوس**) می‌نامند. ابتدا این فرآیند را با مثالهایی نوعی شرح می‌دهیم. چون هر دستگاه معادلات خطی به وسیلهٔ ماتریس افزوده‌اش کاملا مشخص می‌شود، فرآیند حذف را می‌توان صرفاً با درنظر گرفتن ماتریسها شرح داد. برای مشخص کردن این تناظر، دستگاه معادلات وماتریس افزوده رادر کنار هم خواهیم نوشت.

مثال ۲. روش حذفی گاوس

دستگاه سه معادلهٔ خطی ذیل راکه شامل چهار مجهول است حل کنید

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ اول. حذف x_1 از معادلات دوم وسوم باکم‌کردن

$0.6/3 = 0.2$ برابر معادلهٔ اول از معادلهٔ دوم ،

$1.2/3 = 0.4$ برابر معادلهٔ اول از معادلهٔ سوم.

با این‌کار دستگاه معادلات جدیدی به‌دست می‌آید :

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ دوم. حذف x_2 از سومین معادلهٔ (۴) با تفریق‌کردن

$-1.1/1.1 = -1$ برابر معادلهٔ دوم از معادلهٔ سوم

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

از معادلهٔ دوم داریم $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$. از اینجا و از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود : $x_1 = 2 - x_4$. چون x_3 و x_4 دلخواه هستند ، بینهایت جواب داریم؛ هرگاه مقداری برای x_3 ومقداری برای x_4 انتخاب کنیم ، آنگاه مقادیر متناظر یکتایی برای x_1 و x_2 تعیین می‌شود.

مثال ۳. روش حذفی گاوس درحالتی که جوابی وجود ندارد

اگر روش حذفی گاوس را، که درمثال ۲ توضیح داده شد، در مورد دستگاه معادلاتی که جواب ندارد به‌کار بریم چه اتفاقی می‌افتد؟ جواب آن است که دراین حالت روش‌مزبور به تناقضی منجر می‌شود و به‌این‌ترتیب نشان می‌دهد که دستگاه جواب ندارد. مثلافرض کنید

$$\begin{aligned} ۳x_۱+۲x^۲+x_۳&=۴\\ ۲x_۱+x_۲+x_۳&=۰\\ ۶x_۱+۲x_۲+۴x_۳&=۶ \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۱ & ۰\\ ۶ & ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ اول. حذف $x_۱$ از دومین وسومین معادله با تفریق کردن

$۲/۳$ برابر معادلهٔ اول ازمعادلهٔ دوم،

$۶/۳=۲$ برابر معادلهٔ اول از معادلهٔ سوم.

نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned} ۳x_۱+۲x_۲+x_۳&=۳\\ -\frac{۱}{۳}x_۲+\frac{۱}{۳}x_۳&=-۲\\ -۲x_۲+۲x_۳&=۰ \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۳\\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۲\\ ۰ & -۲ & ۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ دوم. حذف $x_۲$ از معادلهٔ سوم نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} ۳x_۱+۲x_۲+x_۳&=۳\\ -\frac{۱}{۳}x_۲+\frac{۱}{۳}x_۳&=-۲\\ ۰&=۱۲ \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۳\\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۲\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۲ \end{pmatrix}$$

این نشان می‌دهد که دستگاه جوابی ندارد.

مثال ۴. روش حذفی گاوس درحالتی که جوابی یکتا وجود دارد.

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} -x_۱+x_۲+۲x_۳&=۲\\ ۳x_۱-x_۲+x_۳&=۶\\ -x_۱+۳x_۲+۴x_۳&=۴ \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۲ & ۲\\ ۳ & -۱ & ۱ & ۶\\ -۱ & ۳ & ۴ & ۴ \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ اول. حذف x_1 از معادلات ۲ و ۳ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+2x_3&=2 \\ 2x_2+7x_3&=12 \\ 2x_2+2x_3&=2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

مرحلهٔ دوم. حذف x_2 از معادلهٔ ۳ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} -x_1+x_2+2x_3&=2 \\ 2x_2+7x_3&=12 \\ -5x_3&=-10 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

از معادلهٔ آخر شروع کرده به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم $x_3=2$ ، $x_2=-1$ ، $x_1=1$.
می‌بینیم که دستگاه جوابی یکتا دارد. ▲

شکل دستگاه و ماتریسی راکه در آخرین مرحلهٔ روش حذفی گاوس پدید می‌آیند **صورت پلکانی** می‌نامند. بنابراین در مثال ۴ صورتهای پلکانی ماتریس ضریب و ماتریس افزوده عبارتند از

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

روشی راکه دراین مثالها توضیح داده شد **روش حذفی گاوس** یا **الگوریتم گاوس** می‌نامند[1]. این روش را می‌توان بــه منظور حل دستگاه عمومی (۱) بــه‌صورت کلی زیر فرمولبندی کرد.

مرحلهٔ اول. حذف x_1 از معادلات دوم، سوم، ... ، m ام. می‌توانیم فرض کنیم که ترتیب معادلات وترتیب مجهولات درهرمعادله به گونه‌ای است که $a_{11}\neq 0$. بنابراین‌می‌توانیم متغیر x_1 را از معادلات دوم، ... ، m ام حذف کنیم به‌این ترتیب که

a_{21}/a_{11} برابر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم کنیم،

a_{31}/a_{11} برابر معادلهٔ اول را از معادلهٔ سوم کم کنیم،

---

۱. مــا روش حذفی گاوس را بــه صورت کلاسیك آن عرضه کرده‌ایم ؛ بــا روش بناحیه ویچ (Banachiewicz) و چلسکی (Cholesky) می‌توان حجم کارهای محاسباتی را بازهم کاهش داد؛ این روش وسایر روشها درمرجع [C۲] تشریح شده‌اند. همچنین بخش ۹.۱۹ راببینید.

وغیره. بدین ترتیب دستگاه معادلات جدیدی به‌شکل زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n&=b_2^*\\ &\vdots\\ c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n&=b_m^*. \end{aligned} \tag{۵}$$

هرجواب (۱) جوابی از (۵) است و بالعکس، زیرا هرمعادلهٔ دستگاه (۵) از دو معادلهٔ دستگاه(۱) نتیجه شده‌است، وبامعکوس کردن‌فرایند، می‌توان(۱) را از(۵) به‌دست‌آورد.

مرحلهٔ دوم. حذف x_2 از معادلات سوم، ... ، mام در (۵). هرگاه ضرایب c_{22}، ... ، c_{mn} در (۵) همگی صفر نباشند، می‌توانیم معادلات و مجهولات را طوری مرتب کنیم که داشته باشیم $c_{22}\neq 0$. دراین صورت می‌توانیم x_2 را از معادله‌های سوم، چهارم، ... m ام (۵) حذف کنیم به‌این ترتیب که

c_{32}/c_{22} برابر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم کنیم،

c_{42}/c_{22} برابر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ چهارم کم کنیم، وغیره.

اکنون روشن‌است که درمراحل بعدی‌چه باید کرد. درمرحلهٔ سوم x_3 راحذف می‌کنیم، درمرحلهٔ چهارم x_4 را، وبه‌همین ترتیب پیش می‌رویم.

این فرایند تنها وقتی خاتمه می‌پذیرد که یا هیچ معادله‌ای باقی نماند و یا ضرایب تمام مجهولات معادلات باقیمانده صفر باشند. درآن‌صورت دستگاهی به‌صورت‌زیرداریم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ c_{22}x_2+\cdots\cdots+c_{2n}x_n&=b_2^*\\ &\vdots\\ k_{rr}x_r+\cdots+k_{rn}y_n&=\bar{b}_r\\ 0&=\bar{b}_{r+1}\\ &\vdots\\ 0&=\bar{b}_m \end{aligned} \tag{۶}$$

که درآن $r\leqslant m$ (و $a_{11}\neq 0$ ، $c_{22}\neq 0$ ، ... ، $k_{rr}\neq 0$). می‌بینیم که سه حالت زیر ممکن است:

(الف) جوابی نخواهیم داشت هرگاه $r<m$ ویکی ازاعداد b_{r+1} ، ... ، b_m صفرنباشد. این حالت در مثال ۳ که در آن $r=2<m=3$ و $b_{r+1}=b_3=12$ بود تشریح شد.

(ب) دقیقاً یك جواب وجود دارد هرگاه $r=n$ و b_{r+1} ، . . . ، b_m ، اگر وجود داشته باشند، صفر باشند. این جواب، از حل معادلهٔ n ام (۶) نسبت به x_n و سپس حل معادلهٔ $(n-1)$ ام نسبت به x_{n-1} و الی‌آخر، به‌دست می‌آید. مثال ۴ را نیز که در آن $r=n=3$ و $m=3$ ببینید.

(پ) بینهایت جواب وجود دارد هرگاه $n>r$ و b_{r+1} ، . . . ، b_m ، اگر وجود داشته باشند، صفر باشند. دراین‌صورت هریك از این جوابها با انتخاب مقادیر دلخواهی برای مجهولات x_{r+1} ، . . . ، x_n ؛ با حل معادلهٔ r ام نسبت به x_r و سپس حل معادلهٔ $(r-1)$ ام نسبت به x_{r-1} و الی‌آخر، به‌دست می‌آید. مثال۲ این‌حالت راروشن‌می‌کند.

اعمالی‌راکه درروش حذفی گاوس انجام می‌دهیم اعمال مقدماتی می‌نامند.
اعمال مقدماتی که روی معادلات انجام می‌دهیم عبارتند از:

تعویض دومعادله.
ضرب یك معادله دریك ثابت غیرصفر.
افزودن مضرب ثابتی از یك معادله به‌معادلهٔ دیگر.
افزودن مضرب ثابتی ازیك سطر به سطردیگر.

به‌جای معادلات‌می‌توان ماتریسهای افزوده‌را درنظر گرفت (ر.ك. مثال ۲). دراین‌صورت **اعمال سطری مقدماتی ماتریسی** متناظر زیررا داریم:

تعویض دوسطر.
افزودن مضرب ثابتی ازیك سطر به سطر دیگر
ضرب یك سطر دریك ثابت غیرصفر.

دستگاه معادلات خطی S_1 را **معادل** دستگاه معادلات خطی S_2 نامند هرگاه S_1 را بتوان با (تعداد محدودی) اعمال مقدماتی از S_2 به دست آورد. از بحث بالا نتیجه می گیریم

قضیهٔ ۱ (دستگاههای معادل)

دستگاههای معادلات خطی معادل، مجموعه جوابهای یکسانی دارند

ماتریس $\mathbf{A}_1$ را **معادل سطری** ماتریس $\mathbf{A}_2$ نامند، هرگاه $\mathbf{A}_1$ را بتوان با تعدادی متناهی عمل سطری از $\mathbf{A}_2$ به‌دست آورد. بنابراین، ماتریسهای افزودهٔ (۱) و (۶) معادل سطری هستند.

این بحثها ومفاهیم دربخش ۷.۷، که در آن به‌تفصیل دربارهٔ مجموعه جواب‌معادلات خطی چند مجهولی بحث می کنیم، مفید خواهند بود.

مسائل بخش ۵۰۷

دستگاههای معادلات خطی زیر را با روش حذفی گاوس حل کنید.

۱. $\begin{aligned} ۲x+y&=۴ \\ ۵x-۲y&=۱ \end{aligned}$

۲. $\begin{aligned} ۳x+y&=۱۱ \\ x-y&=۵ \end{aligned}$

۳. $\begin{aligned} x+y&=۰ \\ ۳x-۴y&=۱ \end{aligned}$

۴. $\begin{aligned} ۴x-y+z&=۰ \\ x+۲y-z&=۰ \\ ۳x+y+۵z&=۰ \end{aligned}$

۵. $\begin{aligned} -x+y+۲z&=۰ \\ ۳x+۴y+z&=۰ \\ ۲x+۵y+۳z&=۰ \end{aligned}$

۶. $\begin{aligned} ۲x+y+z&=۷ \\ x-y+z&=۰ \\ ۴x+۲y-۳z&=۴ \end{aligned}$

۷. $\begin{aligned} ۴x+۶y+z&=۲ \\ ۲x+y-۴z&=۳ \\ ۳x-۲y+۵z&=۸ \end{aligned}$

۸. $\begin{aligned} ۳x-۷y+z&=۴ \\ x+۵y+z&=۰ \\ ۲x-y+۳z&=-۲ \end{aligned}$

۹. $\begin{aligned} ۳x+y-۲z&=-۳ \\ x-y+۲z&=-۱ \\ -۴x+۳y-۶z&=۴ \end{aligned}$

۱۰. $\begin{aligned} x-۲y+z&=۳ \\ x+۳z&=۱۱ \\ -۲y+z&=۱ \end{aligned}$

۱۱. $\begin{aligned} -۳x+y-z&=۲ \\ ۲x+۳y+z&=۰ \\ x+۵y+۲z&=۶ \end{aligned}$

۱۲. $\begin{aligned} ۹x+۴y+۳z&=-۱ \\ ۵x+y+۲z&=۱ \\ ۷x+۳y+۴z&=۱ \end{aligned}$

۱۳. $\begin{aligned} ۳x-۳y-۷z&=-۴ \\ x-y+۲z&=۳ \end{aligned}$

۱۴. $\begin{aligned} ۷x-۴y-۲z&=-۶ \\ ۱۶x+۲y+z&=۳ \end{aligned}$

۱۵. $\begin{aligned} x-۳y+۲z&=۲ \\ ۵x-۱۵y+۷z&=۱۰ \end{aligned}$

۱۶. $\begin{aligned} ۷w+۲x-۲y-۶z&=۶ \\ w+۳x-۳y-۹z&=-۱۰ \end{aligned}$

۱۷.
$$۳w-۱۵x-۳y-۱۱z=-۲۷$$
$$۵w-۲۵x-۵y-۷z=-۴۵$$

۱۸.
$$۴w+۳x-۹y+z=۱$$
$$-w+۲x-۱۳y+۳z=۳$$
$$۳w-x+۸y-۲z=-۲$$

۱۹.
$$۳w-۶x-y-z=۰$$
$$w-۲x+۵y-۳z=۰$$
$$۲w-۴x+۳y-z=۳$$

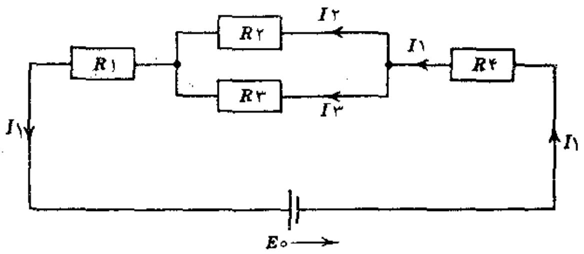
۲۰.
$$w+x+y=۳$$
$$-۳w-۱۷x+y+۲z=۱$$
$$۴w+۸y-۵z=۱$$
$$-۵x-۲y+z=۱$$

۲۱.
$$w-x+۳y-۳z=۳$$
$$-۵w+۲x-۵y+۴z=-۵$$
$$-۳w-۴x+۷y-۲z=۷$$
$$۲w+۳x+y-۱۱z=۱$$

۲۲. با استفاده ازقوانین کیرشهف نشان دهید که معادلات جریانهای $I_۱$ ، $I_۲$ ، $I_۳$ درشکل زیر عبارتند از

$$I_۱-I_۲-I_۳=۰ \ , \ R_۲I_۲-R_۳I_۳=۰ \ , \ (R_۱+R_۴)I_۱+R_۲I_۲=E_۰$$

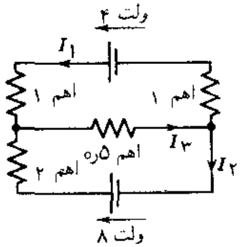
وسپس این جریانها را برحسب $R_۱$ ، $R_۲$ ، $R_۳$ ، $R_۴$ و $E_۰$ تعیین کنید.



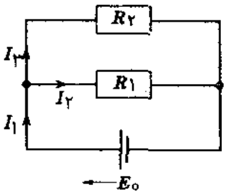
مسئلهٔ ۲۲. شبکه

با استفاده از قوانین کیرشهف جریان را درشبکه‌های زیر پیدا کنید.

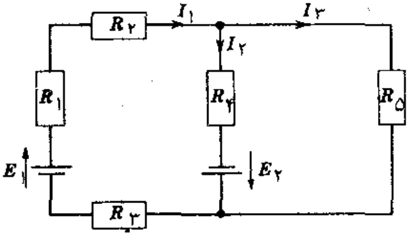
۲۳.



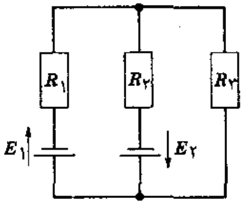
۲۴.



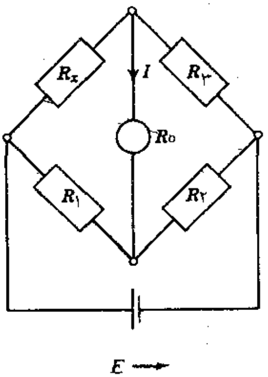
۲۵.



۲۶.



۲۷. (**پل ویتستون** *) نشان دهید که هرگاه درشکل زیر $R_x/R_3 = R_1/R_2$ ، آنگاه $I = 0$. (R_0 مقاومت دستگاهی است که I با آن اندازه گیری می‌شود.)

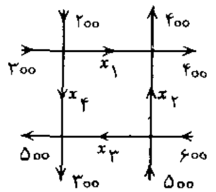


مسئلهٔ ۲۷. پل ویتستون

---

* Wheatstone

۲۸. (جریان ترافیک) روشهای تحلیل مدار الکتریکی درزمینه‌های دیگر نیز کاربرد دارند. به‌عنوان مثال، با استفاده ازمشابه به قانون کیرشهف، جریان ترافیک (تعداد اتومبیلها در ساعت) را در شبکهٔ خیابانهای یکطرفهٔ شکل زیر (در جهتهای مشخص شده) پیدا کنید. آیا جواب یکتاست؟



مسئلهٔ ۲۸. شبکهٔ خیابانهای یکطرفه

۲۹. (عرضه وتقاضا) جواب تعادل $(D=S)$ یك بازار تك‌محصولی راکه با مدل‌خطی زیر مشخص شده است پیدا کنید

$$D = ۱۳ - ۲P$$

$$S = ۳P - ۷$$

دراین روابط D ، S و P به‌ترتیب تقاضا، عرضه وقیمت کالا هستند.

۳۰. جواب تعادل $(D_۲ = S_۲ \text{ و } D_۱ = S_۱)$ یك بازار دو محصولی راکه مدل خطی آن به‌صورت زیر است پیدا کنید.

$$D_۱ = ۲۰ - ۲P_۱ - P_۲ \qquad D_۲ = ۵P_۱ - ۲P_۲ + ۸$$

$$S_۱ = ۴P_۱ - P_۲ + ۲ \qquad S_۲ = ۳P_۲ - ۲$$

که D ، S و P به‌ترتیب معرف تقاضا، عرضه وقیمت هستند و زیرنویسهای ۱ و ۲ به‌ترتیب مشخص کنندهٔ کالای اول ودومند.

۶.۷ مرتبهٔ ماتریس

در بخش قبل چگونگی حل یك دستگاه معادلات خطی را دیدیم ، همچنین می‌دانیم که ممکن است دستگاه جوابی نداشته باشد یا فقط یك جواب و یا بیش از یك جواب داشته باشد . این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان دربارهٔ مسئلهٔ وجود و یکتایی حکم کلی داد. جواب مثبت است و ابزار اصلی برای این‌کار مفهوم رتبهٔ ماتریس است که در اینجا معرفی می‌شود واحکام یاد شده دربخش بعد ارائه خواهد شد.

تعداد بیشینهٔ بردارهای سطری مستقل خطی ماتریس $\mathbf{A}=(a_{jk})$ را **رتبهٔ** ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند و با

$$\operatorname{rank} \mathbf{A}$$

نشان می‌دهند. بنابر تعریف، رتبهٔ ماتریس صفر برابر صفر است (استقلال خطی بردارها دربخش ۴.۶ تعریف شده است.)

مثلا رتبهٔ

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 4 & 9 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

برابر ۲ است زیرا آخرین سطر ترکیبی خطی از دو سطر دیگر (دوبرابر سطراول منهای سطر دوم)، که مستقل خطیند، است.

بعلاوه توجه‌کنیدکه $\operatorname{rank} \mathbf{A}=0$ اگر وتنها اگر $\mathbf{A}=0$ واین مطلب مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود.

درمبحث مربوط به وجود و یکتایی جوابهای دستگاههای معادلات خطی به قضیهٔ زیر احتیاج خواهیم داشت .

قضیهٔ ۱. (رتبه برحسب بردارهای ستونی)

رتبهٔ ماتریسی‌مانند $\mathbf{A}=(a_{jk})$ برابربا تعداد بیشینهٔ بردارهای ستونی‌مستقل‌خطی $\mathbf{A}$ است.

اثبات. فرض‌کنید $\operatorname{rank} \mathbf{A}=r$. دراین صورت، بنا به‌تعریف، $\mathbf{A}$ مجموعه‌ای از r بردارسطری مستقل خطی دارد؛ این بردارها را $\mathbf{v}_{(1)}$، . . . ، $\mathbf{v}_{(r)}$ می‌نامیم؛ تمام‌بردارهای سطری $\mathbf{A}$ کـه آنها را با $\mathbf{a}_{(1)}$، . . . ، $\mathbf{a}_{(m)}$ نمایش می‌دهیم ترکیبهای خطی مستقل مزبورند، یعنی

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{(1)} &= c_{11}\mathbf{v}_{(1)}+c_{12}\mathbf{v}_{(2)}+\cdots+c_{1r}\mathbf{v}_{(r)} \\
\mathbf{a}_{(2)} &= c_{21}\mathbf{v}_{(1)}+c_{22}\mathbf{v}_{(2)}+\cdots+c_{2r}\mathbf{v}_{(r)} \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_{(m)} &= c_{m1}\mathbf{v}_{(1)}+c_{m2}\mathbf{v}_{(2)}+\cdots+c_{mr}\mathbf{v}_{(r)}
\end{aligned}$$

اینها معادلات برداری هستندکه هریك ازآنها، اگر برحسب مؤلفه‌های بردارنوشته شود، معادل با n معادله است. هرگاه مؤلفه‌های $\mathbf{v}_{(1)}$ را با v_{11}، . . . ، v_{1n} و مؤلفه‌های $\mathbf{v}_{(2)}$ را با v_{21}، . . . ، v_{2n} وغیره، نشان دهیم و اگر همین‌کار را درمورد بردارهای سمت چپ انجام دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k}+c_{12}v_{2k}+\cdots+c_{1r}v_{rk} \\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k}+c_{22}v_{2k}+\cdots+c_{2r}v_{rk} \\
&\vdots \\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k}+c_{m2}v_{2k}+\cdots+c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}$$

که n , . . . , ۱ $=k$. این روابط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + v_{rk}\begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

که n , . . . , ۱ $=k$. بردار سمت چپ، kامین بردار ستونی $\mathbf{A}$ است. بدین‌ترتیب، معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که هر بردار ستونی $\mathbf{A}$ ترکیبی خطی از r بردار سمت راست است. پس، تعداد بیشینهٔ بردارهای ستونی مستقل خطی $\mathbf{A}$ نمی‌تواند بیش از r، که بنا به‌تعریف رتبه، تعداد بیشینهٔ بردارهای سطری مستقل خطی $\mathbf{A}$ است باشد.

حال همین نتیجه را می‌توان برای $\mathbf{A}^T$، ترانهاد $\mathbf{A}$، بدست آورد. از آنجا که بردارهای سطری $\mathbf{A}^T$ بردارهای ستونی $\mathbf{A}$ و برداهای ستونی $\mathbf{A}^T$ بردارهای سطری $\mathbf{A}$ هستند، نتیجهٔ فوق بدین معنی است که تعداد بیشینهٔ بردارهای سطری مستقل خطی $\mathbf{A}$ (یعنی r) نمی‌تواند از تعداد بیشینهٔ بردارهای ستونی مستقل خطی $\mathbf{A}$ تجاوز کند. پس، این تعداد باید برابر با r باشد و بدین‌ترتیب اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

حال ببینیم این قضیه دربارهٔ ماتریس $\mathbf{A}$، (۱)، چه می گوید. از آنجا که داریم $\operatorname{rank}\mathbf{A} = ۲$، دوتا از بردارهای ستونی مستقل‌خطی‌اند ودوتای دیگر ترکیبهایی‌خطی ازآنها هستند. درواقع، دو بردار ستونی اول مستقل خطی هستند و

$$\begin{pmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۰ \end{pmatrix} = \frac{۲}{۳}\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۷ \end{pmatrix} + \frac{۲}{۳}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۷ \\ -۷ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۲ \\ ۹ \\ -۵ \end{pmatrix} = \frac{۲}{۳}\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۷ \end{pmatrix} + \frac{۲۹}{۲۱}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۷ \\ -۷ \end{pmatrix}$$

این موضوع رامی‌توان به‌سادگی تحقیق کرد اگرچه مشاهدهٔ مستقیم آن میسر نیست. به‌فرض اینکه $\mathbf{A}^T$ داده شده باشد، ملاحظه می‌کنیم که تعیین رتبه، با استفادهٔ مستقیم از تعریف آن، به‌جزدرمورد ماتریسی که به‌اندازهٔ کافی‌ساده باشد، راه مناسبی نیست. اکنون‌این سؤال پیش‌می‌آید که آیا بدون‌تغییرِدادن رتبهٔ یك ماتریس‌می‌توانیم آن‌را «ساده کنیم» (تبدیل کنیم).

ادعامی‌کنیم که اعمال سطری مقدماتی (بخش ۵.۷) رتبهٔ ماتریس‌را تغییر نمی‌دهند.

در مورد اولین عمل (تعویض جای دو بردار سطری) این امر واضح است. دومین عمل (ضرب یك‌بردار سطری دریك ثابت غیر صفر) نیز رتبه‌را تغییر نمی‌دهد، زیرا تعداد بیشینهٔ بردارهای سطری مستقل خطی را تغییر نمی‌دهد. سرانجام، سومین عمل عبارت است

از جمع c برابر یك بردار سطری، مثل $\mathbf{a}_{(j)}$، با بردار سطری دیگری، مثل $\mathbf{a}_{(i)}$. این عمل ازماتریس $\mathbf{A}$ ماتریسی مانند $\tilde{\mathbf{A}}$ به‌وجودمی‌آوردکه همان بردارهای‌سطری رادارد، به‌استثنای‌بردار j ام که به‌صورت $\tilde{\mathbf{a}}_{(i)}=\mathbf{a}_{(i)}+c\mathbf{a}_{(j)}$ است. بدین‌ترتیب ملاحظه‌می‌شود که فضاهای پدیدآمده (بخش ۴.۶) از بردارهای سطری $\mathbf{A}$ و $\tilde{\mathbf{A}}$ یکسانند. پس هردوی این‌فضاها بعدی‌برابربا r، رتبهٔ $\mathbf{A}$، دارند. ازاین‌روبنابه تعریف، $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{A}}=\operatorname{rank}\mathbf{A}$. ازبخش قبل یادآوری می‌کنیم که ماتریسهای معادل سطری ماتریسهایی هستند که‌می‌توان آنها را با تعدادی متناهی اعمال سطری مقدماتی از یکدیگر به‌دست آورد، نتیجه اینکه

قضیهٔ ۲. ماتریسهای معادل سطری، رتبه‌های مساوی دارند.

این قضیه به ما می‌گوید کــه برای تعیین رتبهٔ ماتریسی مانند $\mathbf{A}$ چه باید بکنیم. درواقع‌باید $\mathbf{A}$ را بااستفاده ازروش‌حذفی گاوس به‌صورت پلکانی (بخش۵.۷) درآوریم، زیرا این عمل، بنابه قضیهٔ ۲، رتبه را تغییر نمی‌دهد و از صورت پلکانی می‌توانیم مستقیماً رتبه‌را تشخیص دهیم. به‌عنوان نمونه، ماتریس (۱) را درنظر می‌گیریم، به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۲ & ۲ \\ -۱ & ۷ & ۴ & ۹ \\ ۷ & -۷ & ۰ & -۵ \end{pmatrix} \qquad \text{(ماتریس داده‌شده)}$$

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۷ & \frac{۱۴}{۳} & \frac{۲۹}{۳} \\ ۰ & -۷ & -\frac{۱۴}{۳} & -\frac{۲۹}{۳} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{سطر ۲ به‌علاوهٔ } \frac{۱}{۳} \text{ سطر ۱} \\ \text{سطر ۳ منهای } \frac{۷}{۳} \text{ سطر ۱} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۷ & \frac{۱۴}{۳} & \frac{۲۹}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad \text{سطر ۳ به‌علاوهٔ سطر ۲}$$

آخرین ماتریس به‌صورت پلکانی است. با توجه به‌بردارهای سطری وبنابه قضیهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم که $\operatorname{rank}\mathbf{A}\leqslant ۲$، وبنابه‌بر قضیهٔ ۱ داریم $\operatorname{rank}\mathbf{A}=۲$، زیرا دو بردار ستونی اول محققاً مستقل خطی هستند.

اهمیت عملی این روش تعیین رتبه از کاربردهایی که در ارتباط باتعیین وابستگی و استقلال خطی بردارها دارد ناشی می‌شود. کلید این کاربرد قضیهٔ زیر است کــه مستقیماً

از تعریف رتبه نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۳ (وابستگی و استقلال خطی)

p بردار $x_{(1)}$، ...، $x_{(p)}$ درفضای برداری R^n (ر.ك. بخش ۴.۷) درصورتی مستقل خطی هستندکه ماتریس با بردارهای سطری $x_{(1)}$، ...، $x_{(p)}$ دارای رتبهٔ p باشند، درصورتی‌که رتبه کوچکتر از p باشد، این بردارها وابستهٔ خطی هستند.

چون هریك ازاین p بردار، n مؤلفهٔ دارد، ماتریس مذکور، که‌آن‌را $\mathbf{A}$ می‌نامیم، p سطر و n ستون دارد؛ وهرگاه $n < p$، بنابرقضیهٔ ۱ داریم $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leqslant n < p$، بنابراین قضیهٔ ۳ به‌قضیهٔ قابل توجه زیر منجر می‌شود.

قضیهٔ ۴

p بردار با n مؤلفه که $n < p$، همیشه وابستهٔ خطی هستند.

به‌عنوان مثال، سه‌بردار ویا بیشتردرصفحه وابستهٔ خطیند وهمین‌طورند چهاربردار یا بیشتردر فضا.

مسائل بخش ۶.۷

رتبهٔ ماتریسهای زیر را تعیین کنید.

۱. $\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۹ \end{pmatrix}$

۲. $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{pmatrix}$

۳. $\begin{pmatrix} ۷ & ۱ & ۰ \\ -۱۴ & -۲ & ۰ \end{pmatrix}$

۴. $\begin{pmatrix} -۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{pmatrix}$

۵. $\begin{pmatrix} ۱ & ۷ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۴ \end{pmatrix}$

۶. $\begin{pmatrix} ۴ & ۲ & ۰ & ۳ \\ ۶ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

۷. $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{pmatrix}$

۸. $\begin{pmatrix} ۳ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۴ & ۸ \end{pmatrix}$

۹. $\begin{pmatrix} ۶ & ۱ & ۸ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۴ & -۱ & -۸ & -۳ \end{pmatrix}$

۱۰. قضیهٔ ۱ را با ذکر مثالی توضیح دهید.

۱۱. نشان دهید که $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

۱۲. نشان‌دهید که درقضیهٔ ۳ می‌توان به‌جای‌عبارت «بردار سطری» عبارت «بردارستونی» را قرار داد.

۱۳. اینکه ماتریسی (۲ × ۲) دارای رتبهٔ ۱ است، ازنظر هندسی چه مفهومی دارد؟ در مورد ماتریسی (۳ × ۳) با رتبهٔ ۲ چه می گویید؟

۱۴. با ذکر مثالی نشان دهید که $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,\mathbf{B}$ نتیجه نمی‌دهد که $\text{rank}\,\mathbf{A}^{۲} = \text{rank}\,\mathbf{B}^{۲}$.

در هریك از حالات زیر مشخص کنید کـه بردارهای داده شده وابستهٔ خطی هستند یـا مستقل خطی.

۱۵. (۲ , ۱) , (۱ , ۲)

۱۶. (۳ , ۴) , (−۹ , −۱۲)

۱۷. (۰ , ۰) , (۲ , −۲)

۱۸. (−۳ , ۷ , ۸) , (۰ , ۲ , ۱)

۱۹. (۲ , ۰ , ۴) , (۳ , ۰ , ۲) , (۸ , ۰ , −۱)

۲۰. (۰ , ۱ , ۰) , (۱ , ۰ , ۰) , (۱ , ۱ , ۰)

۲۱. (۳ , ۲ , ۷) , (۲ , ۴ , ۱) , (۱ , −۲ , ۶)

۲۲. (۱ , ۲ , ۳) , (۴ , −۱ , ۶) , (۵ , ۱ , ۹)

به‌ازای چه مقادیری از k بردارهای زیر وابستهٔ خطیند؟

۲۳. (۱ , ۲) , (۳ , k)

۲۴. (۱ , ۲ , ۳) , (۴ , ۵ , ۶) , (۷ , ۸ , k)

۲۵. (۱ , ۲ , ۳ , ۴) , (۵ , ۶ , ۷ , ۸) , (۹ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲) , (۱۳ , ۱۴ , ۱۵ , k)

۷.۷ دستگاههای معادلات خطی : وجود و خواص عمومی جوابها

حال بااستفاده از مفهوم رتبه که دربخش قبل تعریف شد، می‌توانیم قضیهٔزیر را بیان کنیم.

قضیهٔ بنیادی مربوط به دستگاههای معادلات خطی

(الف) دستگاهی از m معادلهٔ خطی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

با n مجهول x_1 ، . . . ، x_n وقتی و تنها وقتی جواب داردکه ماتریس ضرایب، $\mathbf{A}$ ، وماتریس افزوده، $\mathbf{B}$ ، (همچنین ر.ك. بخش ۵.۷) یعنی

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

دارای رتبه‌های مساوی باشند.

(ب) هرگاه این رتبه، r برابر n باشد، دقیقاً یك جواب وجود دارد.

(پ) هرگاه $r < n$ ، بینهایت جواب وجود داردکه همهٔ آنها با تعیین r مجهول مناسب (که رتبهٔ زیر ماتریس ضرایب آنها باید برابر r باشد برحسب $n-r$ مجهول باقیمانده، که به آنها می‌توان مقادیری دلخواه نسبت داد، به‌دست می‌آیند.

(ت) اگر جوابهایی موجود باشند، تمامی آنها را می‌توان با روش حذفی گاوس به‌دست آورد (ر.ك. بخش ۵.۷). (این روش را می‌توان بدون توجه به رتبه‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌کار برد).

اثبات. **(الف)** می‌توانیم دستگاه (۱) را به‌صورت $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ، یا برحسب بردارهای ستونی $\mathbf{A}$ یعنی $\mathbf{c}_{(1)}$ ، . . . ، $\mathbf{c}_{(n)}$ بنویسیم:

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}. \tag{2}$$

نظر به اینکه $\mathbf{B}$ از افزودن ستون اضافی $\mathbf{b}$ به $\mathbf{A}$ بـه‌دست می‌آید، قضیهٔ ۱ بخش ۶.۷ ایجاب می‌کندکه رتبهٔ $\mathbf{B}$ برابر با $\operatorname{rank}\mathbf{A}$ یا $\operatorname{rank}\mathbf{A}+1$ باشد. حال اگر (۱) دارای‌جوابی‌مانند $\mathbf{x}$ باشد، آنگاه (۲) نشان‌می‌دهدکه $\mathbf{b}$ باید ترکیبی‌خطی از بردارهای ستونی $\mathbf{c}_{(1)} \ldots \mathbf{c}_{(n)}$ باشد. ازاین‌رو رتبهٔ $\mathbf{B}$ نمی‌تواند ازرتبهٔ $\mathbf{A}$ بیشتر باشد، بنابراین $\operatorname{rank}\mathbf{B}=\operatorname{rank}\mathbf{A}$.

بالعکس، هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{B}=\operatorname{rank}\mathbf{A}$ ، آنگاه $\mathbf{b}$ بایدترکیبی‌خطی‌ازبردارهای ستونی $\mathbf{A}$ باشد، مثلا

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{c}_{(1)} + \cdots + \alpha_n\mathbf{c}_{(n)}$$

زیرا درغیر این‌صورت $\text{rank}\,\mathbf{B}=\text{rank}\,\mathbf{A}+1$. اما این بدان مفهوم است که (۱) جوابی مانند $x_1=\alpha_1$ ، . . . ، $x_n=\alpha_n$ دارد.

(ب) هرگاه $\text{rank}\,\mathbf{A}=r=n$ ، آنگاه مجموعهٔ $C=\{\mathbf{c}_{(1)},\ldots,\mathbf{c}_{(n)}\}$ ، بنابه قضیهٔ ۱ از بخش قبل، مستقل خطی است، درنتیجه نمایش $\mathbf{b}$ به‌صورت (۲) یکتاست زیرا

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1+\cdots+\mathbf{c}_{(n)}x_n=\mathbf{c}_{(1)}\bar{x}_1+\cdots+\mathbf{c}_{(n)}\bar{x}_n$$

ایجاب می‌کند که

$$(x_1-\bar{x}_1)\,\mathbf{c}_{(1)}+\cdots+(x_n-\bar{x}_n)\mathbf{c}_{(n)}=0$$

و بنابر استقلال خطی، $x_1-\bar{x}_1=0$ ، . . . ، $x_n-\bar{x}_n=0$ ، بدین‌ترتیب اسکالرهای x_1 ، . . . ، x_n در (۲) به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، یعنی جواب (۱) یکتاست.

(پ) هرگاه $\text{rank}\,\mathbf{A}=\text{rank}\,\mathbf{B}=r<n$ ، بنابر قضیهٔ ۱، بخش ۶.۷، یک مجموعهٔ مستقل خطی K متشکل از r بردارستونی $\mathbf{A}$ وجود دارد به طوری که بقیهٔ $n-r$ بردار ستونی $\mathbf{A}$ ، ترکیبات خطی این بردارها هستند. ستونها و مجهولات را با ^ علامت گذاری می‌کنیم به‌قسمی که $\{\hat{\mathbf{C}}_{(1)},\ldots,\hat{\mathbf{C}}_{(r)}\}$ مجموعهٔ مستقل خطی K باشد، در این‌صورت (۲) چنین می‌شود:

$$\mathbf{c}_{(1)}\hat{x}+\cdots+\hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n=\mathbf{b},$$

$\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}$ ، . . . ، $\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ ترکیبات خطی بردارهای K هستند و بردارهای $x_{r+1}\mathbf{c}_{(r+1)}$ ، . . . ، $\hat{x}_n\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ نیز چنیند. اگر این بردارها را برحسب بردارهای K بنویسیم و عملیات لازم را انجام دهیم، می‌توانیم دستگاه را به‌صورت زیر درآوریم:

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}y_1+\cdots+\hat{\mathbf{c}}_r y_{(r)}=\mathbf{b} \qquad (۳)$$

که درآن $y_j=\hat{x}_j+\beta_j$ و β_j ازجملات $\hat{x}_{(r+1)}\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}$ ، . . . ، $\hat{x}_{(n)}\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ نتیجه می‌شود؛ دراینجا $j=1,\ldots,r$. ازآنجا که دستگاه جواب دارد، y_1 ، y_2 ، . . . ، و y_r ی وجود دارند که در (۳) صدق می‌کنند. چون K مستقل خطی است این اسکالرها یکتا هستند. با انتخاب $\hat{x}_{r+1}$ ، . . . ، $\hat{x}_n$ مقدار β_j و مقدار متناظرآن $\hat{x}_j=y_j-\beta_j$ ، $(j=1,\ldots,r)$ مشخص می‌شود.

(ت) دربخش ۶.۷ نشان‌داده شده‌است ودراینجا برای یادآوری دوباره بیان گردید. بدین ترتیب اثبات به‌اتمام می‌رسد.

این قضیه را می‌توان با استفاده از مثالهای بخش ۵.۷ شرح داد: درمثال ۲ داریم $\text{rank}\,\mathbf{A}=\text{rank}\,\mathbf{B}=2<n=4$ ومی‌توانیم x_3 و x_4 را به دلخواه انتخاب کنیم؛ درمثال ۳، ازآنجا که $\text{rank}\,\mathbf{A}=2<\text{rank}\,\mathbf{B}=3$، جوابی وجود ندارد و درمثال ۴ که $\text{rank}\,\mathbf{A}=\text{rank}\,\mathbf{B}=n=3$ ، جوابی یکتا وجود دارد.

دستگاه (۱) را **همگن** نامند اگرتمام b_j های سمت راست برابرصفرباشند. درغیر

این‌صورت آن را **ناهمگن** گویند (همچنین ر.ك. بخش ۵.۷). ازقضیهٔ بنیادی نتایج زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۲ (دستگاه همگن)

دستگاه معادلات خطی همگن

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=0 \end{aligned} \tag{۴}$$

همیشه دارای **جواب بدیهی** $x_1=0$ ، . . . ، $x_n=0$ است. جوابهای غیربدیهی وقتی و تنها وقتی وجود دارند که رتبهٔ $\mathbf{A}$ کمتر از n باشد. هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r<n$ ، جوابها تشکیل یك فضای برداری $n-r$ بعدی می‌دهند (ر.ك. بخش ۴.۶). بخصوص ، هرگاه $\mathbf{x}_{(1)}$ و $\mathbf{x}_{(2)}$ بردارهای جواب (۴) باشند آنگاه $\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}_{(1)}+c_2\mathbf{x}_{(2)}$ که در آن c_1 و c_2 مقادیرثابت دلخواهی هستند، بردارجواب (۴) است. (این حکم درمورد دستگاههای ناهمگن صادق نیست).

اثبات. اولین گزاره واضح است و با این امر که دریك دستگاه همگن ماتریس ضرایب و ماتریس‌افزوده رتبه‌های یکسانی‌دارند، وفق‌می‌دهد. بردارهای‌جواب تشکیل یك‌فضای برداری می‌دهند زیرا هرگاه $\mathbf{x}_{(1)}$ و $\mathbf{x}_{(2)}$ دوجواب دلخواه ازاین جوابها باشندآنگاه $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)}=0$، $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(2)}=0$ و این ایجاب می‌کند کـه $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{(1)}+\mathbf{x}_{(2)})=\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)}+\mathbf{A}\mathbf{x}_{(2)}=0$ و نیز $\mathbf{A}(c\mathbf{x}_{(1)})=c\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)}=0$ ، کـه در آن c مقداری دلخواه است . هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{A}=r<n$ ، بنا به‌قضیهٔ بنیادی می‌توانیم $n-r$ مجهول مناسب را، که آنها را x_{r+1} ، . . . x_n ، می‌نامیم، به‌طوردلخواه انتخاب کنیم، وازاین طریق تمام‌جوابهای معادله را بـه دست آوریم. نتیجه می‌شودکه پایه‌ای برای جوابها عبارت است از $\mathbf{y}_{(1)}$ ، . . . ، $\mathbf{y}_{(n-r)}$ ، که درآن بردار جواب $\mathbf{y}_{(j)}$ ، $j=1,\ldots,n-r$ ، با انتخاب $x_{r+j}=1$ و مساوی‌صفر گرفتن بقیهٔ x_{r+1} ، . . . ، x_n به‌دست می‌آید؛ بدین‌ترتیب x_1 ، . . . ، x_r متناظر تعیین می‌شوند. پس ثابت می‌شودکه فضای برداری تمام جوابها، بعدی برابر $n-r$ دارد، و اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

متذکر می‌شویم که فضای برداری **تمام** جوابهای (۴) **فضای‌پوچ** ماتریس ضرایب A نام دارد وبعدآن، **پوچی** $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود بااستفاده از این مفاهیم، قضیهٔ ۲ به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\operatorname{rank}\mathbf{A}+(\text{پوچی } \mathbf{A})=n$$

دررابطهٔ بالا، n تعدادمجهولات (تعدادستونهای $\mathbf{A}$) است. هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$،

آنگاه $0 =$ (پوچی A) ، و بنابراین دستگاه فقط جواب بدیهی دارد. هرگاه $\operatorname{rank} \mathbf{A} = r < n$ ، آنگاه $0 < n - r =$(پوچی A)، وازاین‌رو دستگاه جوابهایی غیربدیهی‌دارد که به‌همراه جواب بدیهی‌فضایی برداری با بعد $n - r > 0$ تشکیل می‌دهند.

توجه کنید که در (۴) ، بنا به‌تعریف داریم $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leqslant m$ ، بنابراین درصورتی که $m < n$ ، داریم $\operatorname{rank}\mathbf{A} < n$. پس بنا به قضیهٔ ۲ ، قضیهٔ زیر که از اهمیت عملی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳ (وقتی که تعداد معادلات دستگاه کمتراز تعداد مجهولات آن است)

یك دستگاه معادلات خطی همگنی که تعداد معادلات آن کمتر از تعداد مجهولاتش باشد همواره دارای جوابهای غیربدیهی است.

هر گاه دستگاه ناهمگنی ازمعادلات خطی جواب داشته باشد، تمامی‌آن جوابها را می‌توان به‌ترتیب زیرمشخص کرد.

قضیهٔ ۴ (دستگاه ناهمگن)

هرگاه دستگاه معادلات خطی ناهمگنی‌که به‌صورت (۱) است دارای جوابهایی باشدآنگاه تمامی این جوابها به‌صورت

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$$

هستند که در آن $\mathbf{x}_0$ جواب مشخصی از (۱) است و $\mathbf{x}_h$ می‌تواند هر یك از جوابهای دستگاه همگن متناظر ، (۴) ، باشد.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{x}$ جواب مفروضی برای (۱) و $\mathbf{x}_0$ جواب دلخواهی برای (۱) باشد. دراین صورت $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ ، وبنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0.$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ، یعنی *تفاضل* هرجواب (۱) از هرجواب مشخص‌آن جوابی برای (۴) است، این تفاضل را $\mathbf{x}_h$ می‌نامیم. بنابراین وقتی $\mathbf{x}_h$ تك‌تك جوابهای دستگاه همگن (۴) را اختیارکند تمام جوابهای معادلهٔ (۱) به دست می‌آیند، و اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

۸.۷ معکوس ماتریس

دراین بخش منحصراً ماتریسهای مربعی را درنظرمی گیریم.

معکوس ماتریسی $(n \times n)$ مانند $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ik})$ با A^{-1} نشان داده می‌شود و ماتریسی است $(n \times n)$ به‌طوری که

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \qquad (1)$$

دراینجا $\mathbf{I}$ ماتریس واحد n سطری است.

هرگاه $\mathbf{A}$ معکوس داشته باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ را **ماتریس ناتکین** می‌نامند. اگر $\mathbf{A}$ معکوس نداشته باشد، آن را **ماتریس تکین** نامند.

هرگاه $\mathbf{A}$ معکوس داشته باشد، این معکوس یکتاست.

درواقع، اگر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هردومعکوس $\mathbf{A}$ باشند آنگاه

$$\mathbf{AB}=\mathbf{I}, \quad \mathbf{CA}=\mathbf{I},$$

و به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}=\mathbf{IB}=(\mathbf{CA})\mathbf{B}=\mathbf{C}(\mathbf{AB})=\mathbf{CI}=\mathbf{C},$$

بدین ترتیب یکتایی ثابت می‌شود.

توجه کنید که، به عنوان نتیجه‌ای از اثبات فوق، تنها با اثبات یکی از تساویهای $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ یا $\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ می‌توانیم ادعا کنیم که $\mathbf{B}$ معکوس ماتریس مفروض $\mathbf{A}$ است.

حال به‌مفهوم یك‌ماتریس می‌پردازیم وشرایط وجود معکوس‌ماتریس راپیدامی کنیم. بدین منظور از $\mathbf{A}$ شروع می‌کنیم و **تبدیل خطی** متناظر با آن را در نظر می‌گیریم (بخش ۴.۷):

$$\mathbf{y}=\mathbf{Ax} \tag{۲}$$

دراینجابردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بردارهایی‌ستونی‌با n مؤلفه که به‌ترتیب‌عبارتند از $x_1, \ldots, x_n$ و $y_1, \ldots, y_n$. هرگاه $\mathbf{A}^{-1}$ موجود باشد با پیش ضرب کردن آن خواهیم داشت $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{Ix}=\mathbf{x}$، یعنی تبدیل معکوس

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}, \tag{۳}$$

$\mathbf{x}$ را برحسب $\mathbf{y}$ وماتریس معکوس $\mathbf{A}$، یعنی $\mathbf{A}^{-1}$، نشان می‌دهد.

به‌ازای $\mathbf{y}$ مفروض، معادلهٔ (۲) را می‌توان دستگاهی از n معادلهٔ‌خطی با n مجهول $x_1, \ldots, x_n$ تلقی کرد، و بنابرقضیهٔ بنیادی که در بخش قبل ذکرشد، می‌دانیم این معادله جواب یکتا دارد اگروتنها اگر $\operatorname{rank}\mathbf{A}$ برابر با n، یعنی بزرگترین رتبهٔ ممکن برای یك ماتریس $(n\times n)$، باشد.

قضیهٔ ۱ (وجود معکوس)

ماتریس $\mathbf{A}^{-1}$معکوس ماتریس$(n\times n)$ ی مانند $\mathbf{A}$، وجود دارد اگروتنها اگر $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$. بنابراین، $\mathbf{A}$ ناتکین است هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$ ، و $\mathbf{A}$ تکین است هرگاه $\operatorname{rank}\mathbf{A}<n$.

می‌خواهیم‌نشان‌دهیم که‌درعمل، تعیین $\mathbf{A}^{-1}$، معکوس $\mathbf{A}$ ، به‌حل‌دستگاه‌خطی $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ بازمی‌گردد. یك روش متناسب، روش حذفی گاوس است (بخش ۵.۷). می‌دانیم که با این روش، ازماتریس مربعی مفروض $\mathbf{A}$ ، یك ماتریس مثلثی (صورت پلکانی) تولید می‌شود.

از ماتریس اخیر به‌سادگی می‌توانیم باچند عمل مقدماتی دیگر یك صورت قطری به‌دست آوریم؛ یعنی، می‌توانیم

$\mathbf{Ax}=\mathbf{y}=\mathbf{Iy}$ را به‌صورت $\mathbf{Ix}=\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{y}$

درآوریم؛ درواقع ما کار را ازماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{I}$ شروع کرده به $\mathbf{I}$ و $\mathbf{A}^{-۱}$ ختم کردیم. این تعمیم ضعیف روش حذفی گاوس را گاهی **روش حذفی گاوس ـ ژردان*** می‌نامند. در اینجاکافی است که ترتیب مناسب انجام محاسبات را بامثالی نوعی توضیح دهیم. (نمایش معکوس برحسب دترمینان دربخش ۱۱.۷ ارائه خواهد شد.)

مثال ۱. معکوس ماتریس

معکوس ماتریس زیر، $\mathbf{A}^{-۱}$، را پیدا کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

به‌ترتیب زیرعمل می کنیم،

$$\left(\begin{matrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۴ \end{matrix}\right) \Bigg| \left(\begin{matrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{matrix}\right)$$

وزوج ماتریسهای بعدی را با انجام اعمال سطری مشخص شده روی جفت ماتریس قبل به دست می‌آوریم

$$\left(\begin{matrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{matrix}\right) \Bigg| \left(\begin{matrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{matrix}\right)$$

(سطر ۲)+۳(سطر ۱)
(سطر ۳)−(سطر ۱)

$$\left(\begin{matrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & -۵ \end{matrix}\right) \Bigg| \left(\begin{matrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ -۴ & -۱ & ۱ \end{matrix}\right)$$

(سطر ۳)−(سطر ۲)

تا اینجای کار همان حذف گاوسی است وبا مثال ۴ بخش ۵.۷ سازگار است. در مراحل بعد، روش حذفی گاوس به‌طریقی که گفتیم تعمیم داده می‌شود.

---

* Gauss - Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(سطر ۳) $-\frac{2}{5}$ (سطر ۱) $-$

(سطر ۳) $+\frac{7}{10}$ (سطر ۲) $\frac{1}{2}$

(سطر ۳) $-\frac{1}{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{10}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(سطر ۲) + (سطر ۱)

ماتریس سمت راست معکوس $\mathbf{A}$ است زیرا ، برحسب دستگاههای معادلات خطی ، $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}=\mathbf{Iy}$ را به $\mathbf{x}=\mathbf{Ix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ تحویل کرده‌ایم امتحان جواب:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$. همان‌طور که دراوایل همین بخش، پس‌ازاثبات یکتایی معکوس، متذکر شدیم احتیاجی به‌امتحان $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ نیست. ▲

درانتهای این بخش، چند فرمول مفید دربارهٔ معکوس ماتریسها ارائه می‌دهیم.

درمورد ماتریس (2×2) ی ناتکین داریم

$$(4)\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

که درآن $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ؛ دربخش بعد $\det A$ مورد بحث قرارخواهد گرفت. درواقع، درستی (۱) را به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد.

همین‌طور، درمورد یك ماتریس قطری ناتکین داریم

$$(5) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

عناصر قطر اصلی A^{-1} عکس عناصر A هستند.

مثال ۲. معکوس ماتریس مربعی دوسطری

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/4 & -0/1 \\ -0/2 & 0/3 \end{pmatrix}$$

مثال۳ : معکوس ماتریس قطری

$$A = \begin{pmatrix} -0/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacktriangle$$

معکوس معکوس یك ماتریس خود آن ماتریس است، یعنی

$$(6) \qquad (A^{-1})^{-1} = A.$$

اثبات این مطلب ساده است وبه‌خواننده واگذار می‌شود (مسئلهٔ ۳).

معکوس حاصل‌ضرب AC از ضرب کردن معکوسهای عوامل آن به ترتیب عکس به‌دست می‌آید:

$$(7) \qquad (AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$$

برای اثبات (۷)، از (۱) شروع کرده به‌جای A می‌گذاریم AC، یعنی

$$AC\,(AC)^{-1} = I.$$

با پیش‌ضرب کردن این رابطه در A^{-1} وقرار دادن $A^{-1}A = I$، به‌دست می‌آوریم

$$A\,(AC)^{-1} = A^{-1}$$

چنانچهٔ رابطهٔ بالا را در C^{-1} پیش‌ضرب کنیم، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.
بدیهی است که (۷) را می‌توان به حاصل‌ضرب بیش از ۲ ماتریس نیز تعمیم داد؛ با استقراء به‌دست می‌آوریم

$$(AC\ldots PQ)^{-1}=Q^{-1}P^{-1}\ldots C^{-1}A^{-1} \tag{۸}$$

علاوه‌براینها، اکنون می‌توانیم اطلاعات بیشتری را دربارهٔ این واقعیت عجیب، که در حالت کلی درضرب ماتریسها قانون حذف صادق نیست، به‌دست آوریم؛ می‌دانیم

$AB=0$ ایجاب نمی‌کند که الزاماً $A=0$ ویا $B=0$.

این گزاره را دربخش ۴.۷ (قضیهٔ ۱) بیان کردیم و آن را با مثال زیر روشن ساختیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۹}$$

رتبهٔ هریك از این دوماتریس کوچکتر از $n=2$ است با توجه به این مثال می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۲

هرگاه $A\neq 0$ و $B\neq 0$ ماتریسهایی $(n\times n)$ باشند به‌نحوی که $AB=0$، آنگاه رتبهٔ A و رتبهٔ B هردو از n کوچکترند.

اثبات. فرض کنید $AB=0$ و $\operatorname{rank} A=n$. درآن‌صورت بنابه‌قضیهٔ ۱، A^{-1} وجود دارد و با پیش‌ضرب کردن $AB=0$ در A^{-1} داریم $A^{-1}AB=B=0$، که با $B\neq 0$ تناقض دارد. ▲

توجه کنید که با پس‌وپیش کردن عوامل ضرب در (۹)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

بنابراین هرگاه رتبهٔ A و رتبهٔ B هردو از n کوچکتر باشند و $AB=0$، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $BA=0$.

از اثبات قضیهٔ ۲ همچنین داریم:

قضیهٔ ۳

هرگاه A و B ماتریسهای $(n\times n)$ باشند به‌قسمی‌که $AB=0$، وهرگاه رتبهٔ A برابر n باشد، آنگاه $B=0$.

به‌علاوه، هرگاه داشته باشیم $\mathbf{AB}=0$ وفرض کنیم $\mathbf{B}=\mathbf{S}-\mathbf{T}$، آنگاه

$$\mathbf{AB}=\mathbf{A}(\mathbf{S}-\mathbf{T})=0 \text{ ویا } \mathbf{AS}=\mathbf{AT}.$$

با توجه به‌این مطلب وقضیهٔ ۳، به‌دست می‌آوریم

قضیهٔ ۴

هرگاه $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{S}$ و $\mathbf{T}$ ماتریسهای $(n\times n)$ باشند و $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$ ، آنگاه

$\mathbf{AS}=\mathbf{AT}$ نتیجه می‌دهد $\mathbf{S}=\mathbf{T}$.

مسائل بخش ۸.۷

۱. درستی (۴) را، با نشان دادن اینکه $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ ، تحقیق کنید.

۲. درستی (۵) را تحقیق کنید.

۳. (۶) را ثابت کنید.

معکوس ماتریسهای زیر را پیدا کنید ونتیجه را امتحان کنید.

۴. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ۵. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

۶. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ۷. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

۸. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ۹. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۰. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ۱۱. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

۱۲. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

معکوس تبدیلهای خطی زیر را پیدا کنید.

۱۳.
$$x^* = ۱۹x + ۲y - ۹z$$
$$y^* = -۴x - y + ۲z$$
$$z^* = -۲x + z$$

۱۴.
$$x^* = -۲x - ۲y + ۷z$$
$$y^* = ۴x + ۳y - ۱۲z$$
$$z^* = -x + ۲z$$

۱۵.
$$x^* = x + ۲y + ۵z$$
$$y^* = -y + ۲z$$
$$z^* = ۲x + ۴x + ۱۱z$$

۱۶.
$$x^* = ۲x + ۴y + z$$
$$y^* = x + ۲y + z$$
$$z^* = ۳x + ۴y + ۲z$$

۱۷. نشان دهید که $(\mathbf{A}^{۲})^{-۱} = (\mathbf{A}^{-۱})^{۲}$.

۱۸. معکوس مربع ماتریسهایی را که درمسائل ۷ و ۱۰ آمده‌اند پیدا کنید.

۱۹. نشان دهید که $(\mathbf{A}^{-۱})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-۱}$.

۲۰. نشان دهید که معکوس یك ماتریس متقارن ناتکین ماتریسی متقارن است.

۹.۷ دترمینانهای مرتبهٔ دوم و سوم

بخش حاضر از سایر بخشهای این فصل مستقل است. این بخش مرجعی است برای فصول دیگروهمچنین پیشگفتاری‌است برای بخش بعد، که دترمینانهای کلی وموارد استفادهٔ آنها را مورد بحث قرار می‌دهد.

دترمینان مرتبه دوم را می‌توان درارتباط با دستگاه دومعادلهٔ خطی

$$a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} = b_{۱}$$
$$a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} = b_{۲} \qquad (۱)$$

که درآن $x_{۱}$ و $x_{۲}$ دومجهول دستگاه هستند، به‌ترتیب زیر معرفی واز آن استفاده کرد. برای حل دستگاه، معادلهٔ اول را در $a_{۲۲}$ ومعادلهٔ دوم را در $-a_{۱۲}$ ضرب کرده حاصل‌ضربها را با هم جمع می کنیم، خواهیم داشت

$$(a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲})\, x_{۱} = b_{۱}a_{۲۲} - b_{۲}a_{۱۲}.$$

سپس اولین معادله (۱) را در $-a_{۲۱}$ ودومین معادلهٔ‌آن را در $a_{۱۱}$ ضرب می کنیم ومجدداً حاصل ضربها را با هم جمع می کنیم ونتیجه می گیریم

$$(a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲})\, x_{۲} = a_{۱۱}b_{۲} - a_{۲۱}b_{۱}.$$

هرگاه $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ صفر نباشد، به‌کمك تقسیم می‌توان x_1 و x_2 را به‌دست آورد :

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \tag{۲}$$

مخرج کسرها را به‌صورت

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

نوشته آن را **دترمینان مرتبهٔ دوم** می‌نامند؛ پس

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}. \tag{۳}$$

چهار عدد a_{11} ، a_{12} ، a_{21} ، a_{22} را **عناصر** دترمینان گویند. گفته می‌شود که عناصر واقع بریك خط افقی یك **سطر** و عناصرواقع بریك خط‌قائم یك **ستون** دترمینان راتشکیل می‌دهند.

حال می‌توان جواب (۲)ی دستگاه (۱) را به‌صورت زیر نوشت :

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad (D\neq 0) \tag{۴}$$

که در آن

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

این فرمول را **قاعدهٔ کرامر**[1] نامند. توجه کنید که D_1 از قرار دادن ستونی که عناصرش b_1 و b_2 هستند به‌جای اولین ستون D، و D_2 از قرار دادن همین ستون به جای دومین ستون D به دست‌آمده‌اند.

هرگاه b_1 و b_2 هر دو صفر باشند، دستگاه **همگن** نامیده می‌شود. در این حالت، دستگاه حداقل «جواب‌بدیهی» $x_1=0$ ، $x_2=0$ را داراست. دستگاه جوابهای دیگری دارد اگر و تنها اگر $D=0$.

هرگاه حداقل یکی از دو مقدار b_1 یا b_2 صفر نباشد دستگاه را ناهمگن نامند. در این‌صورت اگر $D\neq 0$، دستگاه دقیقاً یك جواب دارد که از (۴) به‌دست می‌آید.

دترمینان مرتبه سوم در رابطه با دستگاه سه معادلهٔ خطی

---

۱. گابریل کرامر (Gabriel Cramer)، ۱۷۰۴ـ۱۷۵۲، ریاضیدان سویسی؛ که به خاطر تألیف کتابی دربارهٔ نظریهٔ منحنیها، که در ۱۷۵۰ در ژنو منتشر شد، نیز مشهور است.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$(5)\qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

که در آن x_1 ، x_2 و x_3 مجهولات دستگاه هستند، پدیدار می‌شود. برای به‌دست آوردن معادله‌ای که فقط شامل x_1 باشد معادلات دستگاه را به‌ترتیب در مقادیر

$$a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\,,\qquad -(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})\,,\qquad a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}\,,$$

ضرب می‌کنیم ، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان این عبارتها را به‌صورت دترمینانهای مرتبه دوم نوشت :

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad -M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$
$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

باجمع معادلات حاصله به‌دست می‌آوریم

$$(6)\quad (a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31})x_1=b_1M_{11}-b_2M_{21}+b_3M_{31}\,.$$

به‌طریقی مشابه می‌توان معادلاتی به‌دست آورد که فقط شامل x_2 و یا x_3 باشند.
اینک، برای ساده‌تر کردن نماد گذاری، دترمینان **مرتبه سوم** را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$(7)\quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

ملاحظه می‌کنیم

$$D=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}\ ,$$

همان ضریب x_1 در (۶) است و اگر در (۷) دترمینانهای مرتبه‌دوم را بسط دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$(\text{۸}) \qquad D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

بدیهی است دترمینان سمت‌راست (۷) که در a_{i1}، $(i = 1, 2, 3)$ ضرب شده از D باحذف اولین ستون و i امین سطر آن به‌دست آمده است.

می‌بینیم که (۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$Dx_1 = D_1$ که

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

به‌طریق مشابه، معادله‌ای راکه فقط شامل x_2 است می‌توان به‌صورت

$Dx_2 = D_2$ نوشت که

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

و معادله‌ای راکه تنها شامل x_3 است می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$Dx_3 = D_3$ که

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

توجه کنید که عناصر D با همان ترتیبی که در معادلات (۵) ظاهرمی‌شوند، مرتب شده‌اند و D_j، $(j = 1, 2, 3)$ از قراردادن ستونی کــه عناصر آن b_1، b_2 و b_3، جملات سمت راست معادلات (۵) هستند به‌جای j امین ستون D به‌دست می‌آید.

درنتیجه هر گاه $D \neq 0$، آنگاه دستگاه (۵) دارای جواب یکتای زیر است

$$(\text{۹}) \qquad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad \text{(قاعدهٔ کرامر)}$$

اگر (۵) همگن باشد، یعنی $b_1 = b_2 = b_3 = 0$، دستگاه حداقل دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است و جوابهای غیربدیهی وقتی و تنها وقتی وجود دارند که $D = 0$.

اگر (۵) غیرهمگن باشد و $D \neq 0$، دستگاه دقیقاً دارای یك جواب است که آن‌هم از (۹) به‌دست می‌آید.

مثال ۱. قاعدهٔ کرامر

دستگاه زیر را با قاعدهٔ کرامر حل کنید:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - \quad x_2 + 2x_3 &= \quad 2 \\
x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= \quad 5 \\
-x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

دترمینان دستگاه عبارت است از

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 .
$$

دترمینانهایی که در مخرج فرمولهای (۹) ظاهر می‌شوند عبارتند از

$$
D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92 , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,
$$

$$
D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46 .
$$

بنابراین $x_1 = 2$ ، $x_2 = 0$ و $x_3 = -1$. ▲

حال مهمترین خواص دترمینانها را بیان می‌کنیم. اثباتها، بامحاسبهٔ مستقیم از (۷) نتیجه می‌شوند. (دربخش بعد خواهیم دید که دترمینانهای با مرتبهٔ دلخواه n ، خواصی کاملا مشابه دارند.)

(الف) هرگاه جای سطرها وستونهای یك دترمینان را باهم عوض کنیم، بدون آنکه ترتیبشان عوض شود، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. مثال:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 \tag{10}
$$

(ب) هرگاه جای دو سطر (یا دو ستون) یك دترمینان را با هم تعویض کنیم مقدار دترمینان در ۱ − ضرب می‌شود. مثال:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۱۲ \qquad (۱۱)$$

دترمینان مرتبهٔ دومی که از حذف یک‌سطر و یک‌ستون D [ر.ك. (۷)] به‌دست می‌آید **کهاد** عنصری که متعلق به‌آن سطر و ستون است، نامیده می‌شود. مثلا در D کهادهای $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ به‌ترتیب عبارتند از

$$\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} ،$$

همسازهٔ عنصری از D ، که در سطر i ام و ستون k ام واقع است، به‌عنوان $(-۱)^{i+k}$ برابر کهاد آن عنصر تعریف می‌شود. مثلا، همسازه‌های $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ به‌ترتیب عبارتند از

$$- \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} ،$$

علامتهای $(-۱)^{i+k}$ آرایشی به شکل زیر دارند:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

به‌علاوه، ملاحظه می‌کنیم که اکنون می‌توان (۷) را به‌صورت

$$D = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۲۱}C_{۲۱} + a_{۳۱}C_{۳۱} ,$$

نوشت که در آن $C_{i۱}$ همسازهٔ عنصر $a_{i۱}$ است. از اینجا و از خواص **(الف)** و **(ب)** خاصیت زیر را نتیجه می‌گیریم.

(پ) دترمینان D را می‌توان نسبت به‌هریك از سطرها یا ستونهایش بسط‌داد؛ یعنی می‌توان‌آن را به‌صورت مجموع سه‌عنصر از هرسطر (یا ستون)، که هریك در همسازهٔ مربوطه ضرب شده، نوشت. به‌عنوان مثال، بسط D نسبت به‌سطر دومش عبارت است از

$$D = -a_{۲۱} \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۲۲} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۲۳} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix} .$$

از **(پ)** به‌دست می‌آوریم

(ت) عاملی از عناصر هرسطر (یا ستون) را می‌توان جلوی دترمینان قرارداد، مثال:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -1 & 12 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3\times 2 & 1 \\ 3 & 3(-3) & 2 \\ -1 & 3\times 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

از خواص (ب) و (ت) می‌توانیم نتایج زیر را به‌دست آوریم

(ث) هرگاه عناصر متناظر دو سطر (یا ستون) دترمینانی متناسب باشند، مقدار آن دترمینان صفر است.

خاصیت زیر در امر ساده‌تر کردن محاسبهٔ دترمینانها نقشی بنیادی دارد.

(ج) هرگاه عناصر یك سطر (یا ستون) دترمینان را با مضرب ثابتی از عناصر متناظر یك سطر (یا ستون) دیگر جمع‌کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. مثال:

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1\times 7 & 21-3\times 7 & -30+5\times 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42$$

(چ) هرگاه هر یك از عناصر یك سطر (یا ستون دترمینان) به‌صورت یك دو جمله‌ای بیان شده باشد، دترمینان را می‌توان به‌صورت مجموع دو دترمینان نوشت. مثال:

$$\begin{vmatrix} 4x+3 & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

با به‌کار بردن قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب، خاصیت زیر را به‌دست می‌آوریم.

(ح) هرگاه عناصر یك دترمینان توابع مشتقپذیری از یك‌متغیر باشند، مشتق دترمینان را می‌توان به‌صورت مجموع سه دترمینان نوشت،

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p' & q' & r' \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$$

که در آن نشانهٔ پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۹.۷

دترمینانهای زیر را حساب کنید.

۱. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ ۲. $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

۳. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ ۴. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

۵. $\begin{vmatrix} -4 & 18 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ۶. $\begin{vmatrix} 6 & 13 & -2 \\ 5 & 37 & -5 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix}$

۷. $\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix}$ ۸. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

۹. $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$

۱۰. نشان دهید که معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ $P_1:(x_1\,,\ y_1)$ و $P_2:(x_2\,,\ y_2)$ درصفحهٔ xy می‌گذرد، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

و با استفاده از آن، دستور معروف زیر را به‌دست آورید

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}.$$

۱۰.۷ دترمینانهای با مرتبهٔ دلخواه

یك دترمینان با مرتبهٔ دلخواه n کمیتی است اسکالر که به شرح زیر به‌یك ماتریس مربعی n سطری‌منتسب‌شده است. دترمینان مرتبهٔ n را می‌توان به‌طرقی‌متفاوت‌ولی هم‌ارز تعریف کرد. یك طریق، استفاده ازفرایند حل n معادلهٔ خطی n مجهولی است. در مورد $n=2$ و $n=3$ این‌روش را در بخش قبل دیدیم وتعمیم آن به‌حالتی‌که n دلخواه است در بخش بعد شرح داده خواهد شد.

دترمینان کاربردهای متعددی در ریاضیات مهندسی دارد؛ گرچه از اهمیت آن در محاسبات عددی به‌علت غیر عملی بودنش‌کاسته شده است. درواقع، قاعدهٔ‌کرامر (بخشهای ۹.۷ و ۱۱.۷) مسلماً روش عملی مناسبی برای حل عددی دستگاههای معادلات‌خطی‌نیست وبرای مسائل عددی روشهای بهتری وجود دارد (ر.ك. بخشهای ۵.۷ و۹.۱۹تا۱۰.۱۹).

در این بخش دترمینان مرتبه n را تعریف کرده مهمترین خواص آن را بررسی می‌کنیم.

یك دترمینان مرتبهٔ n به‌صورت آرایه‌ای مربعی از n^2 کمیت که بین دو خط قائم محصورشده‌اند نوشته می‌شود،

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

و مقدار معینی دارد که در زیر تعریف شده است. کمیتهای $a_{11},\ldots,a_{nn}$ که عدد (یا گاهی تابع) هستند **عناصر** دترمینان نامیده می‌شوند. خطهای افقی متشکل از عناصر دترمینان **سطر** وخطهای‌قائم **ستون** نام دارند. خط‌مایلی که‌ابتدای‌آن a_{11} وانتهای‌آن a_{nn} است **قطر اصلی** دترمینان خوانده می‌شود.

با حذف سطر i ام و ستون k ام از دترمینان D، یك دترمینان مرتبهٔ $n-1$ ام (آرایه‌ای‌مربعی‌با $n-1$ سطر و $n-1$ ستون‌که بین دوخط‌قائم قرارگرفته‌اند) به‌دست می‌آوریم، این دترمینان **کهاد** عنصر a_{ik} (که به‌سطر و ستون حذف شده تعلق دارد) نامیده می‌شود و آن را با M_{ik} نشان می‌دهند.

حاصلضرب کهاد M_{ik} در $(-1)^{i+k}$ را **همسازهٔ** a_{ik} در D می‌نامند و با C_{ik} نمایش می‌دهند؛ بنابراین

$$C_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}. \qquad (2)$$

به‌عنوان مثال، در دو دترمینان مرتبه سوم

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

داریم

$$C_{۲۲}=-M_{۲۲}=-\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix} \quad ، \quad C_{۱۱}=M_{۱۱}=\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

و غیره.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم دترمینان مرتبه nام را به‌روشی که برای مقاصد عملی مناسبتر است تعریف کنیم.

تعریف. دترمینان مرتبه n

علامت

$$D=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots a_{۲n} \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ a_{n۱} & a_{n۲} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

دترمینان مرتبه n نامیده می‌شود. به‌ازای $n=۱$ این دترمینان همان $a_{۱۱}$ است. به‌ازای $n\geqslant ۲$ ، دترمینان عبارت است از مجموع حاصل ضربهای عناصر هر سطر یا ستون در همسازه‌های نظیر آنها، یعنی

$$D=a_{i۱}C_{i۱}+a_{i۲}C_{i۲}+\cdots+a_{in}C_{in} \quad (i=۱, ۲, \ldots , n) \qquad \text{(۳ الف)}$$

یا

$$D=a_{۱k}C_{۱k}+a_{۲k}C_{۲k}+\cdots+a_{nk}C_{nk} \quad (k=۱ , ۲ , \ldots , n) \qquad \text{(۳ ب)}$$

▲

بدین طریق، D برحسب n دترمینان مرتبهٔ $n-۱$ تعریف می‌شود که هریك ازآنها به‌نوبهٔ خود برحسب $n-۱$ دترمینان مرتبهٔ $n-۲$ تعریف می‌شود و الی‌آخر؛ سرانجام به‌دترمینانهای مرتبه دوم می‌رسیم که درآنها همسازه‌های عناصر خود عنصری از D هستند. می‌بینیم که اگر عناصر D همگی عدد باشند مقدار D نیز یك عدد خواهد بود.

علاوه براین، از تعریف نتیجه می‌شود که می‌توانیم D را نسبت به هرسطر یا ستون **بسط** دهیم، یعنی می‌توانیم در (۳) عناصر هر سطر یا ستون را اختیار کنیم و به‌همین نحو درهمسازه‌های (۳) وغیره. بنابراین باید نشان دهیم که تعریف فوق **عاری از ابهام** است؛

یعنی مقداری که برای D به دست می‌آید بستگی به این ندارد که کدام ستون یا سطر را انتخاب کنیم. اثبات این مطلب درآخر همین بخش ارائه خواهد شد.

برای استفاده‌های بعدی، یادآور می‌شویم که (۳) را می‌توان برحسب کهادها نیز نوشت [ر. ك. (۲)]

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots \text{ یا } n) \tag{۴ الف}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots \text{ یا } n). \tag{۴ ب}$$

مثال ۱

فرض کنید

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

بسط این دترمینان نسبت به‌اولین سطر عبارت است از

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(12-0) - 3(4+4) = -12$$

بسط نسبت به‌اولین ستون عبارت است از

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 - 12 = -12$$

وهمین طور نسبت به‌سطرها وستونهای دیگر. ▲

حال‌ازروی‌تعریف به‌راحتی‌می‌توانیم مهمترین‌خواص دترمینان‌را به‌شرح‌زیر بیان کنیم.

چون نتیجهٔ حاصل از بسط دترمینان نسبت سطرها یا ستونهای مختلف یکسان است، داریم

قضیهٔ ۱ (ترانهش)

هرگاه‌سطرهای یك‌دترمینان‌را، باحفظ ترتیب، به‌جای ستونهای‌آن بنویسیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

قضیهٔ ۲ (ضرب درعدد ثابت)

هرگاه تمام عناصر یك سطر (یا یك ستون) دترمینانی درعامل k ضرب شود، مقداددترمینان جدید k برابر مقدار دترمینان اولیه خواهد بود.

اثبات. دترمینان را نسبت بههمان سطری (یا ستونی) کسه عناصرش در k ضرب شدهاند بسط دهید. ▲

توجه کنید که kD دترمینانی است که از ضرب عناصر فقط یك سطر (یا ستون) D در k حاصل شده است، درحالی که درمورد ماتریسها، $k\mathbf{A}$، ماتریسی است که ازضرب تمام عناصر $\mathbf{A}$ در k بهدست میآید.

قضیهٔ ۲ را میتوان برای سادهکردن یك دترمینان مفروض بـه کار برد؛ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۶\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۱۲\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۲$$ ▲

ازقضیهٔ ۲ ، بهازای $k = ۰$ ، ویا مستقیماً ازبسط دترمینان، داریم

قضیهٔ ۳

هرگاه تمام عناصر یك سطر (یا ستون) دترمینانی صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است.

قضیهٔ ۴

هرگـاه تمام عناصر یك سطر (یا ستون) دترمینانی به صورت دو جملهای باشند ، میتوان دترمینان را بهصورت مجموع دو دترمینان نوشت ، مثلا

$$\begin{vmatrix} a_۱+d_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲+d_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳+d_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_۱ & b_۱ & c_۱ \\ d_۲ & b_۲ & c_۲ \\ d_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

اثبات. دترمینان را نسبت به سطری (یا ستونی) کــه عناصرش دو جمله‌ای هستند ، بسط دهید. ▲

مثالی دیگردر (۱۲)، بخش ۹.۷ ، ارائه شده است. تعمیم قضیهٔ۴ به‌حالتی که عناصر مجموع بیش از دوجمله هستند، واضح است.

قضیهٔ ۵ (تعویض سطرها یا ستونها)

هرگاه دو سطر (یا دو ستون) دلخواه از دترمینانی را با هم عوض کنیم ، مقدار دترمینان در ۱ — ضرب می‌شود.

اثبات. اثبات به‌طریق استقرا انجام می‌شود. می بینیم که قضیه برای دترمینان مرتبه ۲ $= n$ برقرار است. فرض می کنیم قضیه برای دترمینان مرتبه ۱ — n صادق باشد ونشان می‌دهیم که برای دترمینان مرتبه n هم صادق است.

فرض کنید D از مرتبهٔ n بوده و E دترمینان حاصل از جابه‌جاکردن دو سطرآن باشد. D و E را نسبت به سطری، که یکی از دو سطر جابه‌جا شده نیست و آن را سطر i ام نامیده‌اید، بسط دهید. دراین صورت بنابه (۴ الف) داریم

$$D=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik} \quad , \quad E=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}N_{ik}$$

کــه N_{ik} از جابه‌جاکردن دو سطر در M_{ik} ، کهادِ a_{ik} ی دترمینان D ، به دست آمده است. چون این کهادها از مرتبهٔ ۱ — n هستند، بنابه‌فرض استقرا $N_{ik}=-M_{ik}$ ، و از اینجا حکم درمورد سطرها ثابت می‌شود، چراکه

$$E=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}(-M_{ik})=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}=-D\,.$$

درمورد ستونها نیزاثبات به‌همین نحو است. ▲

درشمارهٔ (۱۱) بخش قبل مثالی ارائه شده است.

قضیهٔ ۶. (سطرها یا ستونهای متناسب)

هرگاه عناصر متناظر دوسطر(یادو ستون) یك‌دترمینان با هم متناسب باشند ، مقدار دترمینان صفر است.

اثبات. فرض‌کنید عناصر سطرهای i ام و j ام دترمینان D با هم متناسب باشند ، مثلا $a_{ik}=ca_{jk}$ ، $k=1,\dots,n$. هرگاه $c=0$ ، آنگاه $D=0$. فرض‌کنید $c\neq 0$.

بنا به‌قضیهٔ ۲ داریم

$$D = c\,B$$

و B دترمینانی است که سطرهای iام و jام آن همانندند. این سطرها را با هم جابه‌جا کنید. دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ ۵، B به $-B$ تبدیل می‌شود. ازطرف دیگر، چون‌سطرها همانندند، دترمینان جدید باز همان B است. بنابراین $B=-B$ ، $B=0$ ، و ازآنجا $D=0$. ▲

مثال ۳

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۶ & -۴ \\ ۱ & -۱ & ۳ \\ -۶ & -۱۲ & ۸ \end{vmatrix} = ۰$$

توصیه می‌کنیم که قبل‌ازمحاسبهٔ یك دترمینان آن را ساده‌کنید. بدین منظور می‌توان از قضیهٔ ۲ وقضیهٔ زیر استفاده‌کرد.

قضیهٔ ۷ (جمع‌کردن سطر یا ستون)

هرگاه مضرب ثابتی از عناصر یك سطر (یا ستون) دترمینانی را به‌عناصر متناظرشان دریك سطر (یا ستون) دیگر بیفزاییم، مقدار آن دترمینان تغییری نمی‌کند.

اثبات. قضیهٔ ۴ را در مورد دترمینان حاصل به‌کار برید. با این‌کار مجموعی از دو دترمینان به‌دست می‌آید؛ یکی‌ازاین دترمینانها دترمینان اصلی است ودیگری دارای دوسطرمتناسب است. بنا به‌قضیهٔ ۶، دترمینان دوم برابر صفر است وقضیه به‌اثبات می‌رسد. ▲

مثال ۴

دترمینان زیررا حساب کنید.

$$D = \begin{vmatrix} ۱ & ۲۴ & ۲۱ & ۹۳ \\ ۲ & -۳۷ & -۱ & ۱۹۴ \\ -۲ & ۳۵ & ۰ & -۱۷۱ \\ -۳ & ۱۷۷ & ۶۳ & ۲۳۴ \end{vmatrix}$$

سطردوم‌را به سطرسوم اضافه‌می‌کنیم، سه برابرسطراول را به‌سطرآخرمی‌افزاییم، دو برابرسطراول‌را ازسطردوم کم می‌کنیم ودترمینان حاصل‌را نسبت به‌ستون‌اول بسط می‌دهیم:

$$D=\begin{vmatrix} ۱ & ۲۴ & ۲۱ & ۹۳ \\ ۰ & -۸۵ & -۴۳ & ۸ \\ ۰ & -۲ & -۱ & ۲۳ \\ ۰ & ۲۴۹ & ۱۲۶ & ۵۱۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۸۵ & -۴۳ & ۸ \\ -۲ & -۱ & ۲۳ \\ ۲۴۹ & ۱۲۶ & ۵۱۳ \end{vmatrix}$$

سه برابر سطر اول را با سطر آخر جمع می‌کنیم:

$$D=\begin{vmatrix} -۸۵ & -۴۳ & ۸ \\ -۲ & -۱ & ۲۳ \\ -۶ & -۳ & ۵۳۷ \end{vmatrix}$$

سپس دو برابر ستون دوم را از ستون اول کم کرده دترمینان حاصل را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$D=\begin{vmatrix} ۱ & -۴۳ & ۸ \\ ۰ & -۱ & ۲۳ \\ ۰ & -۳ & ۵۳۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۱ & ۲۳ \\ -۳ & ۵۳۷ \end{vmatrix} = -۵۳۷+۶۹=-۴۶۸$$ ▲

دترمینان عناصر ماتریس مربعی n سطری $\mathbf{A}=(a_{jk})$ را **دترمینان ماتریس A** می‌نامیم و با $\det \mathbf{A}$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین

$$\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{۱۱} \cdots a_{۱n} \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ a_{n۱} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال این قضیهٔ مهم را ثابت می‌کنیم که دترمینان حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی n سطری برابر با حاصل‌ضرب دترمینانهای آن دو ماتریس است. این قضیه در مورد دترمینانها به شکل زیر بیان می‌شود: حاصل ضرب دو دترمینان مرتبهٔ n ام را می‌توان به‌صورت دترمینان مرتبهٔ n امی نوشت که عناصرش همانند عناصر ماتریس حاصل‌ضرب به‌دست می‌آیند.

قضیهٔ ۸ (دترمینان حاصل‌ضرب ماتریسها)

فرض‌کنید $\mathbf{A}=(a_{ik})$ و $\mathbf{B}=(b_{ik})$ ماتریسهای مربعی n سطری باشند. درآن صورت داریم

$$\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}, \tag{۵}$$

که هم ارز است با

$$(5^*)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1n}\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ b_{n1}\cdots b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11}\cdots c_{1n}\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{vmatrix},$$

دراینجا عنصر c_{ik} که در سطر i ام وستون k ام قرار دارد برابر است با

$$(5')\qquad c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk},$$

حاصل ضرب اسکالر بردار سطری i ام دترمینان اول و بردار ستونی k ام دترمینان دوم.

اثبات قضیهٔ۸ به ازای $n=2$. فرض کنید

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\quad و\quad D=D_1D_2.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که

$$(6)\qquad D=D_1D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12}\\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

برای اثبات (۶)، ابتدا دترمینان سمت راست را نسبت به سطر اول بسط دهید و سپس با دو دترمینان حاصل نیز همین کار را بکنید:

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{11} & b_{22}\\ -1 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0\\ -1 & b_{11} & b_{22}\\ 0 & b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})D_2=D_1D_2.$$

حال دترمینان (۶) را به‌ترتیب زیر تبدیل می کنیم. a_{11} برابرسطر سوم و a_{12} برابر سطر چهارم را به سطراول اضافه می کنیم تا سطراول به‌صورت زیردرآید:

$$0\quad 0\quad a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\qquad a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$$

اینك a_{21} برابرسطرسوم و a_{22} برابرسطرچهارم را باسطردوم جمع‌می کنیم تا به صورت

زیر درآید:

$$0 \quad 0 \quad a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \qquad a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}.$$

درمجموع داریم

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

چنانچه این دترمینان را نسبت به‌ستون اول بسط دهیم و آنگاه دترمینان مرتبه سوم حاصل را نیز نسبت به‌سطراولش بسط دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$D=D_1D_2=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix},$$

که به‌ازای $n=2$ همان رابطهٔ (۵*) است.

اثبات قضیهٔ ۸ وقتی n دلخواه است. مراحل اثبات کاملا شبیه مراحل اثبات در حالت $n=2$ است. مانند گذشته، فرض کنید $D_1=\det \mathbf{A}$ ، $D_2=\det \mathbf{B}$ و $D=D_1D_2$. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$(6^*) \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

برای اثبات این رابطه، ابتدا دترمینان را نسبت به سطر اول بسط دهید ، سپس دترمینانهای مرتبه $2n-1$ حاصل را نسبت به‌سطرهای اولشان بسط دهید و به‌همین ترتیب تا آخر. بعداز n مرحله، نتیجه به‌صورت زیراست:

$$(\cdots)\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

که درآن (...) دترمینان D_1 را برحسب حاصل‌ضرب عناصرش نشان می‌دهد. بنابراین در(*۶)، D به‌صورت زیرتبدیل می‌شود. به‌اولین سطر

a_{11} برابر $(n+1)$ امین سطر ،

a_{12} برابر $(n+2)$ امین سطر ،

....

a_{1n} برابر $2n$ امین سطر ،

را اضافه کنید ، درنتیجه اولین سطرچنین خواهد شد :

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{n \text{ عنصر اول}} \quad \underbrace{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}}_{c_{11}=(n+1)\text{ امین عنصر}} \quad \ldots \quad \underbrace{a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn}}_{c_{1n}=\text{آخرین عنصر}}$$

با تبدیل دومین، سومین، ...، n امین سطر به طریقی مشابه، به‌دست می‌آوریم

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

که درآن c_{ik} ازرابطهٔ (′۵) به‌دست می‌آید. چنانچه این‌دترمینان را نسبت به‌اولین ستون بسط دهیم، و دترمینان مرتبه $(2n-1)$ حاصل را نیز نسبت به ستون اولش بسط دهیم و همین طور تاآخر، نتیجه عبارت است ازهمان دترمینان سمت راست (*۵)که در $(-1)^n$ ضرب شده است و ، اگر n فرد باشد، دترمینان یك دفعهٔ دیگر باید در $(-1)^n$ ضرب شودزیرا دراین‌صورت درهرکدام از n بسط متوالی، همسازهٔ عنصر -1 ، دراولین‌ستون دترمینانی که باید بسط داده شود، منهای یك برابرکهاد این عنصر است. ازاین‌رو هرگاه n فرد باشد، دترمینان در عامل $(-1)^n(-1)^n=+1$ ضرب می‌شود و هرگاه n زوج باشد، در $(-1)^n=+1$ ضرب می‌شود. بدین ترتیب اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

مثال ۵

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ ۶ & ۱۰ & ۱۴ \\ ۴ & ۷ & ۹ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۹ & ۴ & ۱۸ \\ ۴۶ & ۱۰ & ۷۶ \\ ۲۹ & ۷ & ۴۹ \end{vmatrix}$$

اثبات اینکه تعریف دترمینان نامبهم است. باید نشان دهیم تعریف دترمینان D ، که در

ابتدای این بخش بیان شد، نامبهم است؛ یعنی مقدار D بستگی به نحوهٔ انتخاب سطر یا ستون ندارد.

درمورد دترمینان مرتبه دوم

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

این امر واضح است زیرا دراین صورت(۳) فقط چهارحالت دارد که عبارتند از بسط دترمینان نسبت به

سطر اول : $D = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21})$ ،

سطر آخر : $D = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}a_{11}$ ،

ستون اول : $D = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12})$ ،

ستون آخر: $D = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}a_{11}$.

می بینیم که برای D همیشه یك مقدار به‌دست می آید، مقداری که با (۳) بخش ۹.۷ سازگار است.

حال ثابت می کنیم تعریفی که از دترمینان D با مرتبهٔ دلخواه n ارائه دادیم به یك مقدار D منجر می‌شود و بستگی به نحوهٔ انتخاب سطر یا ستون ندارد.

اول ثابت می کنیم که مقدار D بستگی به نحوهٔ انتخاب **سطر** ندارد.

اثبات با استقرا انجام می‌پذیرد. این حکم درمورد دترمینان مرتبه دوم صادق است (قبلا دیدیم). فرض می کنیم این حکم درمورد دترمینان مرتبه $n-1$ صادق باشد و ثابت می کنیم که درمورد دترمینان مرتبه nام D نیز صادق است.

بدین‌منظور، D را برحسب دوسطردلخواه، مثلا سطرهای i ام و j ام، بسط می‌دهیم ونتایج را مقایسه می کنیم. فرض می کنیم $i < j$ ، این فرض کلیت مسئله را ازبین نمی برد.

بسط اول. D را برحسب i امین سطر بسط می‌دهیم. جملهٔ نوعی این بسط عبارت است از

$$a_{ik}C_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{۷}$$

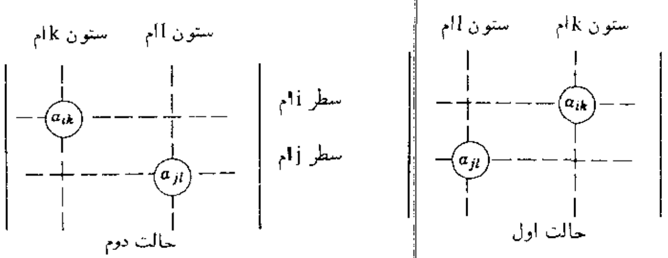
کهاد M_{ik} ، مربوط به‌عنصر a_{ik} ی D ، دترمینانی است با مرتبهٔ $(n-1)$. بنابه فرض استقرا این‌دترمینان رامی‌توان نسبت به هرسطرش بسط داد وما آن‌را نسبت به سطر متناظر با j امین سطر D بسط می‌دهیم. این سطر شامل عناصر a_{jl} $(l \neq k)$ است و درواقع این سطر $(j-1)$ امین سطر M_{ik} است، زیرا M_{ik} شامل عناصر i امین سطر D نیست، و $i < j$. دوحالت زیرمشخص می‌شود.

حالت الف. هرگاه $l < k$ ، آنگاه عنصر a_{jl} به l امین ستون M_{ik} متعلق است

(ر. ك. شكل ۱۴۲). از این‌رو جملهٔ شامل a_{jl} دراین بسط عبارت است از

$$a_{jl} \cdot (\text{همسازهٔ } a_{jl} \text{ در } M_{jk}) = a_{jl} \cdot (-1)^{(j-1)+l} M_{ikjl} \qquad (8)$$

کـه در آن M_{ikjl} عبارت است از کهاد a_{jl} در M_{ik}. چون این کهاد با حذف سطر و ستون مربوط به a_{jl} از M_{ik} به‌دست می‌آید، می‌توان گفت این کهاد، با حذف سطرهای iام و jام و ستونهای kام و lام از D، به دست آمده است. بسطهای M_{ik} را در بسطهای D قرارمی‌دهیم. دراین صورت‌از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که جملات‌این نمایش D به‌صورت زیر خواهند بود:



شکل ۱۴۲. دو حالت بسط D

$$a_{ik}a_{jl} \cdot (-1)^{b} M_{ikjl} \qquad (l < k). \qquad (\text{۹ الف})$$

که در آن

$$b = i + k + j + l - 1.$$

حالت ب. اگر $l > k$، تنها تفاوت این است‌که a_{jl} متعلق بـه $(l-1)$ امین ستون M_{ik} است، زیرا M_{ik} شامل عناصر k امین ستون D نیست، و $l > k$. به‌همین دلیل یك علامت‌منهای اضافی‌در (۸) پیدا می‌شود و بنابراین، به‌جای (۹الف) به‌دست می‌آوریم

$$-a_{ik}a_{jl} \cdot (-1)^{b} M_{ikjl} \qquad (l > k) \qquad (\text{۹ ب})$$

که b همان مقدار پیشین را دارد.

بسط دوم. اینك D را ابتدا نسبت به j امین سطر بسط می‌دهیم. جملهٔ نوعی بسط عبارت است از

$$a_{jl}C_{jl} = a_{jl} \cdot (-1)^{j+l} M_{jl}. \qquad (10)$$

بنابـه فرض استقرا می‌توانیم‌کهاد M_{jl} ی عنصر a_{jl} در D را نسبت به i امین سطر آن بسط دهیم ومی‌دانیم‌که این سطر متناظر با i امین سطر D است زیرا $j > i$.

حالت الف. هرگاه $k > l$، عنصر a_{ik} به $(k-1)$ امین ستون M_{ik} متعلق‌است،

زیرا M_{jl} شامل عناصر l امین ستون D نیست، و $l < k$ (ر.ك. شکل ۱۴۲). از این‌رو دراین بسط، جمله‌ای که شامل a_{ik} باشد به‌صورت زیر است

$$a_{ik}\cdot(M_{jl} \text{ در } a_{ik} \text{ همسازهٔ}) = a_{ik}\cdot(-1)^{i+(k-1)}M_{ikjl}\,, \qquad (11)$$

که درآن کهاد M_{ikjl} از a_{ik} در M_{jl}، با حذف سطرهای i ام و j ام وستونهای k ام و l ام D به‌دست آمده است [وبنابراین، همانند M_{ikjl} در (۸) می‌باشد واز این‌رو نمادگذاری ما تناقضی ندارد]. بسطهای M_{jl} را در بسطهای مربوط به D قرار دهیم. از (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که جملات عبارت حاصله همانند (۹ الف) است وقتی که $l < k$.

حالت ب. هرگاه $k < l$، آنگاه a_{ik} متعلق به kامین ستون M_{jl} است، یك علامت منفی اضافی به‌دست‌می‌آوریم، ونتیجه با آنچه‌که در (۹ ب) دیدیم سازگاراست.

تا اینجا نشان داده‌ایم‌که دوبسط D از جملات یکسانی تشکیل یافته‌اند، واین‌حکم قضیه را دربارهٔ سطرها ثابت می‌کند.

اثبات حکم دربارهٔ ستونها کاملا به همین نحو است؛ اگر D را بر حسب دو ستون اختیاری، مثلا ستون k ام وستون l ام، بسط دهیم درمی‌یابیم که جملهٔ عمومی‌شامل $a_{jl}a_{ik}$ کاملا مثل‌قبل است. این مطلب‌نشان می‌دهد کــه نه‌تنها تمام بسطهای ستونی D به‌یك‌مقدار منجر می‌شوند بلکه همچنین نشان می‌دهد که مقدار مشترك آنها با مقدارمشترکی که ازبسط سطری D برحسب سطرهایش به‌دست می‌آید برابر است.

این مطلب اثبات را تمام می‌کند ونشان می‌دهد که تعریف ما از دترمینان مرتبه nام عاری از ابهام است.

مسائل بخش ۱۰.۷

دترمینانهای زیر را محاسبه کنید

۱.
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۰ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۶ \end{vmatrix}$$

۲.
$$\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۴ & -۲ \\ -۵ & -۸ & ۴ & -۲ \\ ۸ & ۱۶ & -۶ & ۱۵ \\ -۲ & ۸ & -۳ & ۷ \end{vmatrix}$$

.۳
$$\begin{vmatrix} b^۲+c^۲ & a^۲ & a^۲ \\ b_۲ & c^۲+a^۲ & b^۲ \\ c^۲ & c^۲ & a^۲+b^۲ \end{vmatrix}$$

.۴
$$\begin{vmatrix} b^۲+c^۲ & ab & ca \\ ab & c^۲+a^۲ & bc \\ ca & bc & a^۲+b^۲ \end{vmatrix}$$

.۵ ثابت کنید کـه تعریف دترمینان D از مرتبهٔ n به‌یك مقدار برای D منجر می‌شود و نحوهٔ انتخاب ستون تأثیری دراین مقدارندارد [ر. ك. (۳ ب)]. راهنمایی. شیوه‌ای تقریباً شبیه‌آنچه درمورد سطر درمتن درس به‌کار برده شده اعمال کنید.

.۶ اثبات قضیهٔ ۲ را به‌تفصیل بنویسید.

.۷ اثبات قضیهٔ ۴ را به‌تفصیل بنویسید.

.۸ نشان دهید $\det(k\mathbf{A})=k^n\det\mathbf{A}$، که در آن $\mathbf{A}$ یك ماتریس مربعی n سطری است.

.۹ نشان دهید که سه نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ وقتی وتنها وقتی بر یك استقامتند که

$$\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ .$$

.۱۰ نشان دهید که معادلهٔ دایره‌ای که از سه نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ درصفحهٔ xy می‌گذرد، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x^۲+y^۲ & x & y & ۱ \\ x_۱^۲+y_۱^۲ & x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲^۲+y_۲^۲ & x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳^۲+y_۳^۲ & x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ .$$

۱۱.۷ ارتباط رتبه با دترمینانها. قاعدهٔ کرامر

چنانکه در بخش ۷.۷ دیدیم، رتبهٔ ماتریس مفهوم بسیار مهمی است. از بخش ۶.۷ می‌دانیم که رتبهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ تعداد بیشینهٔ بردارهای سطری یا ستونی مستقل خطی $\mathbf{A}$ است. جالب، یا شاید تعجب‌آور، است که با استفاده از دت[illegible] [illegible]یم رتبه یك ماتریس را مشخص کنیم. از این خصوصیت [illegible] برای تعریف رتبه استفاده می‌شود. ما با فرض $\operatorname{rank}\mathbf{A} > 0$ (زیرا $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 0$، اگر وتنها اگر $\mathbf{A} = 0$؛ ر.ك. بخش ۶.۷) ارتباط رتبه و دترمینان را به‌صورت زیر فرمولبندی می کنیم.

قضیهٔ ۱ (ارتباط رتبه با دترمینان)

ماتریسی $(m \times n)$ مانند $\mathbf{A} = (a_{jk})$ دارای رتبهٔ $r \geqslant 1$ است اگر وتنها اگر $\mathbf{A}$ زیر-ماتریسی $(r \times r)$ با دترمینان غیرصفر داشته باشد ضمن آنکه دترمینان هرزیرماتریس‌مربعی $\mathbf{A}$ که $r+1$ سطر یا بیشتر دارد (درصورت وجود) صفر باشد.

درحالت خاص، هرگاه $\mathbf{A}$ یك ماتریس مربعی باشد، $\mathbf{A}$ ناتکین است و بنابراین معکوس $\mathbf{A}$ یعنی $\mathbf{A}^{-1}$ وجود دارد، اگر وتنها اگر

$$\det \mathbf{A} \neq 0 .$$

اثبات. نکتهٔ اصلی اثبات این است که اعمال سطری مقدماتی (بخش ۵.۷)، کــه رتبه را تغییر نمی‌دهند (بنا بر قضیهٔ ۲ بخش ۶.۷)، خاصیت صفر بودن یا نبودن دترمینان‌را نیزتغییر نمی‌دهند زیرا دترمینان

(الف) در -1 ضرب می‌شود هرگاه دوسطر آن را با هم جابه‌جا کنیم (قضیهٔ ۵، بخش ۱۰.۷)،

(ب) در $c \neq 0$ ضرب می‌شود هرگاه یك سطر آن را در $c \neq 0$ ضرب کنیم (قضیهٔ ۲، بخش ۱۰.۷)،

(پ) در ۱ ضرب می‌شود هرگاه مضربی از یك سطر آن را با سطر دیگری از آن جمع کنیم (قضیهٔ ۷، بخش ۱۰.۷).

فرض کنید $\tilde{\mathbf{A}}$ دارای صورت پلکانی $\mathbf{A}$ باشد (ر.ك. بخش ۵.۷). $\mathbf{A}$ دارای r بردار سطری غیر صفر (که اولین r بردارسطریند) است اگر وتنها اگر $\operatorname{rank}\mathbf{A} = r$ فرض کنید $\tilde{\mathbf{R}}$ زیرماتریسی $(r \times r)$ از $\tilde{\mathbf{A}}$ باشد که از r^2 عنصری که درعین‌حال هم دراولین r سطر وهم در اولین r ستون $\tilde{\mathbf{A}}$ واقعند تشکیل شده است. از آنجا که $\tilde{\mathbf{R}}$ مثلثی است و تمام عناصر روی قطر آن مخالف صفرند، $\det \tilde{\mathbf{R}} \neq 0$. چون $\tilde{\mathbf{R}}$ به‌کمك اعمال‌مقدماتی از $\mathbf{R}$ که زیرماتریسی $(r \times r)$ از $\mathbf{A}$ که‌با R متناظراست‌به‌دست‌آمده، $\det \mathbf{R} \neq 0$. به‌همین‌ترتیب درمورد $\mathbf{S}$، زیرماتریس مربعی $\mathbf{S}$ که $r+1$ سطر یا بیشتر دارد (اگر

وجود داشته باشد)، $\det \mathbf{S} = 0$ ، زیرا $\bar{\mathbf{S}}$ ، زیرماتریسی از $\bar{\mathbf{A}}$ که متناظر با $\mathbf{S}$ است، باید شامل یك سطر صفر باشد درنتیجه بنابه قضیهٔ ۳ بخش ۱۰.۷ ، $\det \mathbf{S} = 0$. بدین‌ترتیب حکم قضیه درمورد ماتریس $(m \times n)$ ثابت می‌شود.

هرگاه $\mathbf{A}$ مربعی باشد، مثلا $(n \times n)$ ، حکم اثبات شدهٔ فوق ایجاب می‌کند که $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ اگر وتنها اگر $\mathbf{A}$ زیرماتریسی $(n \times n)$ با دترمینان مخالف‌صفر داشته باشد؛ اما این بدان معنی است که باید داشته باشیم $\det \mathbf{A} \neq 0$. ▲

اکنون بااستفاده ازاین قضیه قاعدهٔ کرامررا، که جوابهای دستگاههای معادلات‌خطی را بـه صورت خـارج قسمتهایی از دترمینانها نمایش می‌دهد ، استنتاج می‌کنیم. برای محاسبات عددی فرمولهای دیگر مناسبترند (ر. ك. بخشهای ۵.۷، ۹.۱۹ تا ۱۱.۱۹)، اما قاعدهٔ کرامر بعضی مواقع، مثلا هنگامی که معادلات شامل پارامتر باشند، مورد توجه است.

قضیهٔ کرامر (حل معادلات خطی به‌وسیلهٔ دترمینان)

هرگاه $D = \det \mathbf{A}$ دترمینان دستگاهی از n معادلهٔ خطی

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

با n مجهول x_1 ، . . . ، x_n ، صفر نباشد ، دستگاه دقیقاً یك جواب دارد. این جواب از فرمولهای

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \qquad \text{(قاعدهٔ کرامر)} \tag{2}
$$

به‌دست می‌آید. دراین فرمولها D_k دترمینانی است‌که از قرار دادن ستونی‌کـه عناصر آن b_1 ، . . . ، b_n هستند به‌جای ستون k ام در D به‌دست می‌آید.

پس اگر (۱) همگن باشد و $D \neq 0$ ، دستگاه فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = 0$، $x_2 = 0$ ، . . . ، $x_n = 0$ است. اما اگر $D = 0$ ، دستگاه همگن جوابهای‌غیربدیهی نیزدارد.

اثبات. از قضیهٔ ۱ وقضیهٔ بنیادی بخش ۷.۷ نتیجه می‌شودکه (۱) جوابی یکتا دارد زیرا

$$
D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

ایجاب می‌کندکه $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$. حال (۲) را ثابت می‌کنیم. D را نسبت به k امین

ستون بسط می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$D=a_{1k}C_{1k}+a_{2k}C_{2k}+\cdots+a_{nk}C_{nk} \tag{۳}$$

که در آن C_{ik} همسازهٔ عنصر a_{ik} در D است. اگر اعداد دیگری به‌جای عناصر k امین ستون D قرار دهیم دترمینان جدیدی مانند $\tilde{D}$ به‌دست می‌آوریم. واضح است که بسط این دترمینان‌نسبت به k امین ستون به‌صورت(۳) خواهد بود که درآن به‌جای a_{1k} ، . . . ، a_{nk} عناصر جدید قرار گرفته‌اند و همسازه‌های C_{ik} تغییری نکرده‌اند. در حالت خاص، اگر عناصر a_{1l} ، . . . ، a_{nl} از l امین ستون D را به عنوان عناصر جدید انتخاب کنیم $(l\neq k)$ دراین صورت بسط $\tilde{D}$ ، دترمینان جدید، چنین می‌شود :

$$a_{1l}C_{1k}+a_{2l}C_{2k}+\cdots+a_{nl}C_{nk}=0 \qquad (l\neq k), \tag{۴}$$

زیرا D دارای دوستون همانند است و برابر صفر می‌شود (ر. ك. قضیهٔ ۶ بخش ۱۰.۷). اگر اولین معادلــه از معادلات (۱) را در C_{1k} دومی را در C_{2k} ، . . . ، و آخری را در C_{nk} ضرب کرده معادلات حاصله را با هم جمع کنیم، ابتدا به دست می‌آوریم

$$C_{1k}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+\cdots+C_{nk}(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$
$$=b_1C_{1k}+\cdots+b_nC_{nk}$$

عبارت سمت چپ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$x_1(a_{11}C_{1k}+\cdots+a_{n1}C_{nk})+\cdots+x_n(a_{1n}C_{1k}+\cdots+a_{nn}C_{nk}).$$

از (۳) نتیجه می‌شودکه عامل x_k دراین نمایش برابر D است ، واز (۴) نتیجه می‌شود که عامل x_l ، $l\neq k$ ، برابر صفر است. پس

$$x_kD=b_1C_{1k}+b_2C_{2k}+\cdots+b_nC_{nk}.$$

نظر به اینکه $D\neq 0$ پس از تقسیم داریم

$$x_k=\frac{1}{D}(b_1C_{1k}+b_2C_{2k}+\cdots+b_nC_{nk})=\frac{D_k}{D} \tag{۵}$$

که درآن $k=1, \ldots, n$ ، واین با (۲) مطابقت دارد.

به‌علاوه،هر گاه‌مانند گذشته $D\neq 0$و(۱)همگن باشدآنگاه $D_1=0$ ، . . . ، $D_n=0$ وبنابراین‌از (۲) جواب بدیهی به‌دست می‌آید. هر گاه $D=0$ و (۱) همگن باشدآنگاه بنابه قضیهٔ ۱ ، $A<n$ و از این‌رو بنابه قسمت (پ) قضیهٔ بنیادی (بخش ۷.۷) جوابهای غیر بدیهی وجود دارند. ▲

مثالی دراین مورد دربخش ۹.۷ آمده است.

حال متذکر می‌شویم که می‌توان (اگرچه درعمل مشکل است) قاعدهٔ کرامر را در مورد دستگاههای m معادلهٔ خطی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}$$

با n مجهول به‌کاربرد. هرگاه ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ و ماتریس افزودهٔ $\mathbf{B}$ هردو دارای‌رتبهٔ r باشند، بنابه قضیهٔ بنیادی می‌دانیم که می‌توان مقادیر دلخواهی را به $n-r$ مجهول مناسب، که آنها را x_{r+1}، ...، x_n می‌نامیم، نسبت داد بــه طوری که زیرماتریس ضرایب سایرمجهولات x_1، ...، x_r دارای رتبهٔ r باشد. بدین‌ترتیب، بنابه‌تعریف‌رتبه، ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای r بردار سطری مستقل خطی هستند، مثلا این بردارهامی‌توانند اولین r بردار سطری (در صورت لزوم پس از بازآرایی) باشند، و هرگاه $r<m$، آنگاه هریك ازبردارهای‌سطری دیگرترکیبی‌خطی ازآنهاست. نتیجه اینکه $m-r$ معادلهٔ متناظر را می‌توان با اعمال مقدماتی به‌صورت $0=0$ تحویل‌کرد. ازاین مطلب و قضیهٔ ۱ بخش ۵.۷ مشاهده می‌کنیم کــه می‌توان آن$m-r$ معادله را از دستگاه حذف‌کرد. حالا می‌توانیم دستگاه تحویل یافته را به‌صورت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r&=b_1-(a_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{1n}x_n)\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r&=b_2-(a_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{2n}x_n)\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r&=b_r+(a_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+a_{rn}x_n) \end{aligned}$$

بنویسیم (که درآن هرگاه $r=n$، عبارات سمت راست عبارتند از b_1، ...، b_r) و آن را نسبت به x_1، ...، x_r با قاعدهٔ کرامر حل کنیم.

مثال ۱. قاعدهٔ کرامر

دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3-\ 5x_4&=8\\ 2x_1+5x_2+5x_3-18x_4&=9\\ 4x_1-\ x_2-\ x_3+\ 8x_4&=7 \end{aligned}$$

ماتریس ضرایب وماتریس افزوده دارای رتبهٔ۲ هستند. می‌توانیم آخرین معادله را حذف کنیم (چرا؟) ودستگاه تحویل یافته را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$۳x_۱+۲x_۲=۸-۲x_۳+۵x_۴$$
$$۲x_۱+۵x_۲=۹-۵x_۳+۱۸x_۴ .$$

با استفاده از قاعدهٔ کرامر نتیجه می‌شود $x_۱=۲-x_۴$ و $x_۲=۱-x_۳+۴x_۴$ ، که $x_۳$ و $x_۴$ اختیاری هستند. ▲

حال به‌عنوان نتیجه‌ای مهم از قضیهٔ کرامر، می‌توانیم عناصر معکوس یك ماتریس را به‌ترتیب زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۳ (معکوس ماتریس)

معکوس ماتریس $(n\times n)$ ناتکین $\mathbf{A}=(a_{jk})$ عبارت است از

$$\mathbf{A}^{-۱}=\frac{۱}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱}\cdots A_{n۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲}\cdots A_{n۲} \\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ A_{۱n} & A_{۲n}\cdots A_{nn}\end{pmatrix} \qquad (۶)$$

که در آن A_{jk} همسازهٔ a_{jk} در $\det \mathbf{A}$ است. (درست توجه کنید که در $\mathbf{A}^{-۱}$، همسازهٔ $\mathbf{A}_{jk}$ همان محلی را اشغال می‌کند که a_{kj} (و نه a_{jk}) در $\mathbf{A}$ اشغال می‌کند.

اثبات. سمت‌راست (۶) را با $\mathbf{B}$ نمایش‌داده نشان می‌دهیم که $\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ همچنانکه در بخش ۸.۷ در رابطه با یکتایی معکوس خاطر نشان کردیم ایـن ایجاب می‌کند که $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-۱}$. می‌نویسیم

$$\mathbf{BA}=\mathbf{G}=(g_{kl}). \qquad (۷)$$

دراینجا، بنابه‌تعریف ضرب ماتریسی

$$g_{kl}=\sum_{s=۱}^{n}\frac{A_{sk}}{\det \mathbf{A}}a_{sl}=\frac{۱}{\det \mathbf{A}}\sum_{s=۱}^{n}\mathbf{A}_{sk}a_{sl} . \qquad (۸)$$

به‌ازای $l=k$ ، مجموع اخیر همان بسط $D=\det \mathbf{A}$ نسبت به k امین ستون است. بنابراین

$$g_{kk}=\frac{۱}{\det \mathbf{A}}\sum_{s=۱}^{n}A_{sk}a_{sk}=\frac{۱}{\det \mathbf{A}}\det \mathbf{A}=۱$$

به‌ازای $l\neq k$ ، این بسطی مشابه ازدترمینان D است، که از قراردادن l امین ستون D ،

به جای k امین ستون آن حاصل شده است ، بنابراین $\bar{D}$ دارای دو ستون همانند بوده و صفر است:

$$g_{kl}=\frac{1}{\det \mathbf{A}}\sum_{s=1}^{n}A_{sk}a_{sl}=\frac{1}{\det \mathbf{A}}\bar{D}=0 \qquad (k\neq l).$$

پس در (۷) داریم $\mathbf{BA}=\mathbf{G}=\mathbf{I}$ ، و بنابراین $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. ▲

مسائل بخش ۷.۱۱

با استفاده از قضیهٔ ۱ ، رتبهٔ هریك از ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

۱. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

۲. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

۳. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -12 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

۴. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$

۵. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

۶. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

با استفاده از قاعدهٔ کرامر و روش حذفی گاوس (بخش ۷.۵) دستگاههای زیررا حل کنید.

۷.
$$\begin{aligned} 7x+3y&=13 \\ 3x+7y&=17 \end{aligned}$$

۸.
$$\begin{aligned} -x-2y&=-5 \\ 5x+4y&=1 \end{aligned}$$

۹.
$$\begin{aligned} x-3y&=-10 \\ 10x-5y&=0 \end{aligned}$$

۱۰.
$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x+5y+3z&=1 \\ -x+2y+z&=2 \end{aligned}$$

۱۱.
$$\begin{aligned} 2x+y+2z&=-1 \\ x+z&=-1 \\ -x+3y-2z&=7 \end{aligned}$$

۱۲.
$$\begin{aligned} x-y+2z&=2 \\ 3x+y-z&=3 \\ 2x+2y-3z&=1 \end{aligned}$$

۱۳. فرمولهای کلی جواب (۱) بهازای $n=۲$ را، که ازروش حذفی گاوس (بخش۵.۷) بهدست می‌آید، بنویسید و آنها را با فرمولهای مربوط به قاعدهٔ کرامرمقایسه کنید.

۱۴. بـه ازای چه مقادیری از λ دستگاه زیر جواب غیربدیهی دارد؟ (در بخش ۱۳.۷ خواهیم دید که این مسئله از نظرکاربردی بسیار مهم است.)

$$(a_{۱۱}-\lambda)\,x_۱+\qquad a_{۱۲}\,x_۲=۰$$
$$a_{۲۱}x_۱+(a_{۲۲}-\lambda)\,x_۲=۰$$

با استفاده از قضیهٔ ۳، معکوس ماتریسهای زیر را بیابید. جواب را امتحان کنید.

۱۵. $\begin{pmatrix} -۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ **۱۶.** $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

۱۷. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ **۱۸.** $\begin{pmatrix} ۰٫۵ & -۰٫۱ & ۰٫۵ \\ ۰ & ۰٫۲ & ۰ \\ -۰٫۵ & ۰٫۳ & -۱٫۵ \end{pmatrix}$

۱۹. $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & c \\ ۰ & b & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ **۲۰.** $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$

۲۱. آیا می‌توانیددرمورد بهدست آوردن معکوس درمسئله ۱۶، استدلالی هندسی ارائه دهید؟

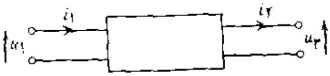
۲۲. رابطهٔ (۴)، بخش ۸.۷، را از قضیهٔ ۳ی همین بخش بهدست آورید.

۲۳. رابطهٔ (۵)، بخش ۸.۷، را از قضیهٔ ۳ بهدست آورید.

۲۴. (الف) ثابت کنید که حاصل ضرب دو ماتریس $(n\times n)$ تکین است اگر و تنها اگر حداقل یکی از دو ماتریس تکین باشد. (ب) ثابت کنید کـه مجموع دو ماتریس $(n\times n)$ ناتکین می‌تواند تکین باشد، ومجموع دوماتریس تکین‌می‌تواندناتکین‌باشد.

۲۵. با استفاده از $\mathbf{A}^{-۱}$ داده شده در (۶)، نشان دهید که $\mathbf{AA}^{-۱}=\mathbf{I}$.

شبکهٔ چهارسر. یك شبکهٔ چهارسر (نظیر شکل زیر) درنظر بگیرید کـه در آن یك سیگنال ورودی به‌یك جفت از سرها اعمال شده وسیگنال خروجی از دوسر دیگر گرفته‌شده‌است.



شبکهٔ چهارسر

فرض کنید که شبکه خطی است؛ یعنی، جریانهای i_1 و i_2 توابعی خطی از u_1 و u_2 هستند:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\
i_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 .
\end{aligned} \tag{11}
$$

۲۶. نشان دهید که (۱۱) را می‌توان به‌صورت $\mathbf{i}=\mathbf{A}\mathbf{u}$ نوشت که در آن

$$\mathbf{i}=\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

و $\mathbf{u}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{i}$.

۲۷. نشان دهید که پتانسیل و شدت جریان ورودی را می‌توان به صورت توابع خطی از پتانسیل و شدت جریان خروجی بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= t_{11}u_2 + t_{12}i_2 \\
i_1 &= t_{21}u_2 + t_{22}i_2
\end{aligned} \tag{12}
$$

یا $\mathbf{v}_1=\mathbf{T}\mathbf{v}_2$ که در آن $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$، و «ماتریس انتقال» $\mathbf{T}$ عبارت است از

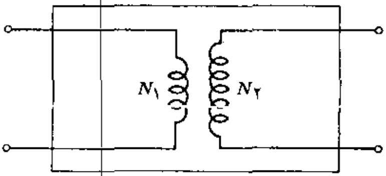
$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{a_{21}}\begin{pmatrix} -a_{22} & 1 \\ -\det\mathbf{A} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

راهنمایی. برای تحقیق رابطهٔ آخر از (۱۱) شروع کنید؛ ابتدا u_1 را برحسب u_2 و i_2 بنویسید، سپس i_1 را برحسب u_2 و i_2 بنویسید؛ وسرانجام، فرمولهای حاصل‌را با(۱۲) مقایسه کنید.

۲۸. $\mathbf{A}$ را برحسب عناصر $\mathbf{T}$ بیان کنید.

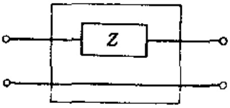
درهریك‌ازحالات زیر نشان دهید که ماتریس انتقال داده شده، $\mathbf{T}$، متناظر با شبکهٔ چهارسر مربوط است.

۲۹.



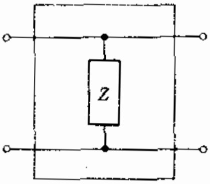
$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} N_1/N_2 & 0 \\ 0 & N_2/N_1 \end{pmatrix}$$

۳۰.



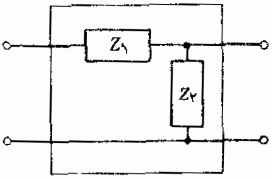
$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۳۱.



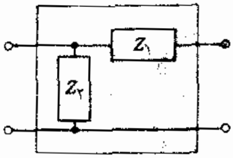
$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix}$$

۳۲.



$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

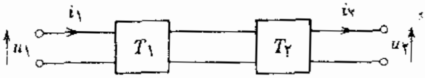
۳۳.



$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1+Z_1/Z_2 \end{pmatrix}$$

۳۴. هرگاه دو شبکهٔ چهارسر، به‌نحوی که درشکل مشخص شده ، به‌طور زنجیره‌ای به‌هم وصل شده باشند ، ثابت کنید کـه شبکهٔ حاصل را می‌توان شبکهٔ چهارسری در نظر گرفت که در آن $\mathbf{v}_1=\mathbf{T}\mathbf{v}_2$ ، اگر

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2.$$



شبکه‌های چهارسر زنجیره‌ای

۳۵. بـا به‌کار بـردن نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۴ ، ماتریس مسئلهٔ ۳۲ را از ماتـریسهای مسائل ۳۰ (به‌ازای $Z=Z_1$) و ۳۱ (به‌ازای $Z=Z_2$) به‌دست آورید. ماتریس مسئلهٔ ۳۳ را از ماتریسهای مسائل ۳۰ و ۳۱ به‌دست آورید.

۱۲.۷ صورتهای دوخطی، درجه دوم، هرمیتی و ضدهرمیتی

صورتهای دوخطی، درجه دوم، هرمیتی وضدهرمیتی گاه به گاه درکاربردها ظاهر می‌شوند، بنابراین مهندسین باید اطلاعاتی دربارهٔ آنها داشته باشند. این صورتها همچنین در بخش ۱۴.۷ مورد نیاز خواهند بود.

عبارتی به‌شکل

$$B=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j y_k \qquad (1)$$

را (که در آن a_{jk} ها عددند) یك صورت دو خطی از $2n$ متغیر x_1 ، . . . ، x_n و y_1 ، . . . ، y_n می‌نامند. اگر B را باز کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} B= \quad & a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{1n}x_1y_n \\ & +a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+\cdots+a_{2n}x_2y_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & +a_{n1}x_ny_1+a_{n2}x_ny_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n\,. \end{aligned} \qquad (1')$$

ماتریس مربعی n سطری $\mathbf{A}=(a_{jk})$ را ماتریس ضرایب این صورت نامند. با درنظر گرفتن بردارهای

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

بنابه‌تعریف ضرب ماتریس می‌توانیم B را به‌صورت زیر بنویسیم

$$B=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} \qquad (2)$$

که درآن $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}=(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ ترانهاد $\mathbf{x}$ است.

مثال ۱. حاصل ضرب داخلی

هرگاه $\mathbf{A}$ ماتریس یکهٔ $\mathbf{I}$ باشد، آنگاه

$$B=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\,\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\,;$$

یعنی دراین حالت B حاصلضرب داخلی (حاصلضرب اسکالر) بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ که حقیقی فرض شده‌اند است. ▲

هرگاه $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ ، آنگاه (۱) را یك **صورت درجه دوم** از n متغیر x_1 ، . . . ، x_n

می‌نامند. چنانچه این صورت را با Q نمایش دهیم، داریم

$$Q=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k. \tag{۳}$$

اگر Q را باز کنیم و جملات متناظر $a_{jk}x_jx_k$ و $a_{kj}x_kx_j$ را کنار هم بنویسیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}Q=a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})\,x_1x_2+\cdots&+(a_{1n}+a_{n1})x_1x_n\\ +a_{22}x_2^2\qquad\qquad +\cdots&+(a_{2n}+a_{n2})\,x_2x_n\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+a_{nn}x_n^2.\end{aligned}$$

حال می‌توانیم قرار دهیم

$$\frac{1}{2}(a_{jk}+a_{jk})=c_{jk}$$

دراین صورت خواهیم داشت $c_{kj}=c_{jk}$ و $c_{jk}+c_{kj}=a_{jk}+a_{kj}$ به‌طوری که‌می‌توان نوشت

$$Q=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\,x_jx_k.$$

هر گاه $\mathbf{A}$ حقیقی باشد، آنگاه ماتریس ضرایب $\mathbf{C}=(c_{jk})$ در نمایش جدید یك ماتریس متقارن حقیقی است (ر. ك. بخش ۳.۷). این مطلب نشان می‌دهد که هر صورت درجه دوم حقیقی Q از n متغیر x_1 ، . . . ، x_n را می‌توان به صورت

$$Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{x}$$

نوشت که در آن $\mathbf{C}$ یك ماتریس متقارن حقیقی است. خواننده می‌تواند ثابت کند که تناظر بین صورتهای Q و ماتریسهای متقارن $\mathbf{C}$ یك به‌یك است؛ یعنی به هرصورت درجه دوم Q دقیقاً یك ماتریس متقارن $\mathbf{C}$ نظیر می‌شود و بالعکس.

مثال ۲. صورت درجه دوم

صورت درجه دوم

$$Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}=2x_1^2+x_1x_2-3x_2^2$$

دارای ماتریس ضرایب

$$\mathbf{A}=(a_{jk})=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

است. بنابراین ماتریس ضرایب متقارن متناظر عبارت است از

$$C=\frac{۱}{۲}(A+A^T)\begin{pmatrix} ۲ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -۳ \end{pmatrix} . \quad \blacktriangle$$

حال نمادگذاری زیر را معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A=(a_{jk})$ ماتریسی دلخواه باشد. درآن صورت $\bar{A}$ معرف ماتریس $(\bar{a}_{jk})$ است که از تعویض هر عنصر a_{jk} با مزدوج مختلط آن a_{jk} در A به‌دست می‌آید.

ماتریس مربعی $A=(a_{jk})$ را که ترانهاد ومزدوج مختلط آن با هم برابرند:

$$A^T=\bar{A} \quad (\text{یعنی،}\ a_{kj}=\bar{a}_{jk}) \tag{۴}$$

را **ماتریس هرمیتی**[1] می‌نامند.

از (۴) می‌بینیم که عناصر قطر اصلی یك ماتریس هرمیتی همیشه حقیقی هستند. به‌علاوه، هرگاه تمام عناصر ماتریس هرمیتی A حقیقی باشند آنگاه (۴) به‌صورت $A^T=A$ در می‌آید که نشان می‌دهد هر ماتریس هرمیتی حقیقی ماتریسی متقارن است، و بنابراین ماتریسهای هرمیتی تعمیمی طبیعی از ماتریسهای متقارن حقیقی هستند.

صورت

$$H=\bar{x}^T Ax \qquad (\text{A هرمیتی است})$$

را **صورت هرمیتی** می‌نامند؛ در اینجا n مؤلفهٔ بردار x می‌توانند متغیرهایی حقیقی یا مختلط باشند. واضح است که این تعمیمی از صورت درجه دوم حقیقی است.

از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می‌شود که

$$H=\sum_{j=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} a_{jk}\bar{x}_j x_k .$$

مثال ۳. صورت هرمیتی

ماتریس

$$A=\begin{pmatrix} ۲ & ۳+i \\ ۳-i & ۱ \end{pmatrix}$$

---

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite)، ۱۸۲۲–۱۹۰۱، ریاضیدان فرانسوی که به‌خاطر کارهایش درجبر و نظریهٔ اعداد مشهور است.

هرمیتی است وصورت هرمیتی متناظر با آن عبارت است از

$$H=\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=(\bar{x}_۱ \quad \bar{x}_۲)\begin{pmatrix} ۲ & ۳+i \\ ۳-i & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

$$=۲\bar{x}_۱x_۱+(۳+i)\,\bar{x}_۱x_۲=(۳-i)\,\bar{x}_۲x_۱+\bar{x}_۲x_۲$$

$$=۲|x_۱|^۲+|x_۲|^۲+۲\mathrm{Re}\,[(۳+i)\,\bar{x}_۱x_۲]$$

که درآن Re نشان‌دهندهٔ قسمت حقیقی است. عبارت آخر نشان می‌دهد که به‌ازای هر بردار $\mathbf{x}$ مقدار H عددی حقیقی است. حال ثابت می‌کنیم که هر صورت هرمیتی دارای خاصیت جالب توجه زیراست. ▲

قضیهٔ ۱. (صورت هرمیتی)

به‌ازای هربردار $\mathbf{x}$ مقدار صورت هرمیتی $H=\bar{\mathbf{x}}^{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ ($\mathbf{A}$ هرمیتی است) عددی حقیقی است.

اثبات. با استفاده از (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\bar{H}=\overline{(\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x})}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{x}}=\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{x}}\,.$$

عبارت سمت راست یك اسکالر است. بنابراین ، ترانهش، مقدار آن را تغییر نمی‌دهد. با استفاده از رابطهٔ (۱۲) بخش ۴.۷ داریم

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{x}}=(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}=\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=H\cdot$$

بنابراین $\bar{H}=H$ ، که به مفهوم حقیقی بودن H است و بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

ماتریس مربعی $\mathbf{A}=(a_{jk})$ راکه درمورد آن داریم

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\bar{\mathbf{A}} \quad (\text{یعنی}\ \ a_{kj}=-\bar{a}_{jk}) \tag{۵}$$

ماتریس ضد هرمیتی می‌نامند. بدیهی است که این تعمیمی از یك ماتریس ضد متقارن حقیقی است، زیرا هر گاه تمام عناصر یك ماتریس ضد هرمیتی $\mathbf{A}$ حقیقی باشند آنگاه(۵) به‌شکل $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{A}$ درمی‌آید؛ یعنی دراین صورت $\mathbf{A}$ یك ماتریس متقارن ضد حقیقی است (ر. ك. بخش ۳.۷).

صورت

$$S=\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{x} \qquad (\mathbf{A}\ \text{ضد هرمیتی است}) \tag{۶}$$

را صورت ضد هرمیتی می‌نامند. خواننده می‌تواند قضیهٔ زیر را اثبات کند.

قضیهٔ ۲. (صورت ضد هرمیتی)
مقدار یك صورت ضد هرمیتی به‌ازای هر x یك عدد موهومی محض و یا صفر است.

مسائل بخش ۱۲.۷

۱. نشان دهید که هرماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت مجموع یك ماتریس هرمیتی و یك ماتریس ضد هرمیتی نوشت.

۲. هر گاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای هرمیتی n سطری، و a و b اعداد حقیقی باشند، نشان دهید که $\mathbf{C}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ یك ماتریس هرمیتی است.

۳. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دوماتریس ضدهرمیتی باشند. تحت چه‌شرایطی $\mathbf{C}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ یك ماتریس ضد هرمیتی است؟ (a و b عددند.)

۴. نشان دهید که عناصر قطر اصلی یك ماتریس ضد هرمیتی موهومی محض و یا صفرند.

صورتهای درجه دوم. ماتریس متقارن حقیقی $\mathbf{C}$ را بـه قسمی بیابید که $Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$ برابر باشد با

۵. $6x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2$ ۶. $(x_1-x_2)^2$

۷. $5x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$ ۸. $(x_1+x_2)^2-x_3^2$

۹. $(x_1-x_2+x_3)^2$ ۱۰. $x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+6x_2x_3+2x_3^2$

۱۱. نشان دهید که هر گاه روی متغیرهای یك صورت درجه دوم $Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$ یك تبدیل خطی، مثل $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$، انجام شود، آنگاه خواهیم داشت $Q=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$، که در آن $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{P}$.

۱۲. صورت درجه دوم $Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$ ($\mathbf{C}$ متقارن است) را با سه متغیر x_1، x_2، x_3 درنظر بگیرید. $\partial Q/\partial x_1$، $\partial Q/\partial x_2$، $\partial Q/\partial x_3$ را بیابید و نشان دهید که اینها مؤلفه‌های بردار $2\mathbf{C}\mathbf{x}$ هستند.

۱۳. **(معین بودن)** صورت درجه دوم‌حقیقی $Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$ وماتریس متقارن آن $\mathbf{C}=(c_{jk})$ را **معین مثبت** نامند هر گاه‌به‌ازای‌جمیع مقادیر $(x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0)$

داشته باشیم $Q > 0$. شرط لازم وکافی برای معین و مثبت بودن آن است که تمام دترمینانهای

$$C_1 = c_{11}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \cdots, C_n = \det \mathbf{C}$$

مثبت باشند (ر.ك. مرجع [C۴]). نشان دهید صورتی که در مسئلهٔ ۵ دیدیم معین مثبت است.

۱۴. معین مثبت بودن صورتهای ذکر شده در مسائل ۶ و ۱۰ را بیازمایید.

صورتهای هرمیتی $H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ را پیدا کنید، هر گاه

۱۵. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

۱۶. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

۱۷. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5+i \\ 5-i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

۱۸. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$ (a و c حقیقی هستند)

۱۹. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2i \\ i & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

۲۰. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

صورتهای ضد هرمیتی $S = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ را پیدا کنید، هر گاه

۲۱. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix}$

۲۲. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۵i & ۲+i \\ -۲+i & i \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} ۲i \\ ۳ \end{pmatrix}$

۲۳. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۲i & ۴ \\ -۴ & ۰ \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$

۲۴. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} i\alpha & \mu+i\nu \\ -\mu+i\nu & i\beta \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} -i \\ ۴ \end{pmatrix}$

۲۵. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۱۳۰۷ مقادیر ویژه بردارهای ویژه

از لحاظ کاربردهای مهندسی، مسائل مقدارویژه ازجمله مهمترین مسائل مربوط به‌ماتریسها هستند، و تعداد مقالات تحقیقی دربارهٔ روشهای عددی متناظر برای کامپیوتر بسیار زیاد است. مفاهیم اساسی به‌شرح زیرند.

فرض کنید $\mathbf{A}=(a_{jk})$ یك ماتریس مربعی n سطری باشد و معادلهٔ برداری

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \qquad (۱)$$

را، که در آن λ یك عدد است، درنظر بگیرید.

بدیهی است که بردارصفر $\mathbf{x}=۰$ به‌ازای هرمقدار λ جوابی برای (۱) است. مقداری از λ را که به‌ازای آن (۱) دارای جوابی مانند $\mathbf{x}\neq ۰$ باشد **مقدار ویژه** یا **مقدار مشخصه** (یا ریشهٔ راکد) ماتریس $\mathbf{A}$ نامند. جوابهای متناظر $\mathbf{x}\neq ۰$ معادلهٔ (۱) را **بردارهای ویژه** یا **بردارهای مشخصهٔ** $\mathbf{A}$ ی نظیر مقدار ویژهٔ λ می‌نامند. مجموعه مقادیر ویژه را **طیف** $\mathbf{A}$ نامند. بزرگترین قدرمطلق مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ را **شعاع طیفی** $\mathbf{A}$ نامند.

مسئلهٔ تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ یك ماتریس را مسئلهٔ مقدار ویژه[۱] نامند. مسائلی از این نوع در ارتباط با کاربردهای فیزیکی و فنی مطرح می‌شوند. بنابراین، دانشجو باید آن دسته از ایده‌ها و مفاهیم بنیادی را که در این رشته از ریاضیات اهمیت دارند بداند. درطول دودههٔ گذشته روشهای متنوع جدیدی برای تعیین تقریبی مقادیرویژه ابداع شده‌اند وروشهایی هم که ازپیش شناخته شده بودند به‌صورتی که برای استفاده در

---

۱. به‌عبارت دقیقتر : مسئلهٔ مقدار ویژهٔ جبری، زیرا مسائل مقدار ویژهٔ دیگری وجود دارند که یك معادلهٔ دیفرانسیل (بخشهای ۸.۴ و ۳.۱۱) یا یك معادلهٔ انتگرالی را دربر می‌گیرند.

حسابگرهای الکترونیکی مناسب باشند در آمده‌اند. به‌مراجع [C۳] و [C۱۵] ضمیمهٔ ۱ رجوع کنید.

حال به‌ذکر دومسئلهٔ ساده که به‌معادله‌ای به‌صورت (۱) منجر می‌شوند، می‌پردازیم.

مثال ۱. دستگاه مرتعش

حرکت قائم دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۳ (که در آن میرایی وجود ندارد و جرم فنرها ناچیزند) از دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیلی زیر تبعیت می کند:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -3y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ \ddot{y}_2 &= -2(y_2 - y_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

در این‌معادله‌ها $y_1(t)$ و $y_2(t)$ تغییرمکانهای دو جرم هستند و $y_1 = 0$ و $y_2 = 0$ با وضعیت تعادل ایستا متناظرند. طرز به‌دست‌آوردن این معادلات شبیه نحوهٔ به‌دست آوردن معادله‌ای است که دربخش ۶.۲ داشتیم. دستگاه بالا را می‌توان به‌صورت

$$\ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2$$

$$\ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2$$

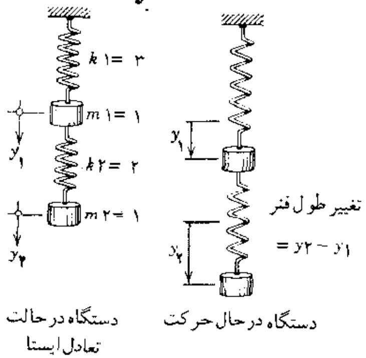
و یا به‌صورت یك معادلهٔ برداری تنها

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

که در آن $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$، $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ نوشت.

برای حل این معادله قرار می‌دهیم

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}. \qquad (3)$$



شکل ۱۴۳. مثال ۱

در نتیجه خواهیم داشت

$$\omega^2 \mathbf{x} e^{\omega t} = \mathbf{A}\mathbf{x} e^{\omega t}$$

و یا

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \qquad (\lambda = \omega^2).$$

پس، برای اینکه (۳) جواب غیرصفری برای (۲) باشد، بایستی $\lambda = \omega^2$ مقدار ویژه‌ای برای $\mathbf{A}$ باشد و بردار $\mathbf{x}$ ی که در (۳) آمده است بردار ویژهٔ متناظر آن باشد.

مثال ۲. تبدیل خطی

تبدیل خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (\text{A حقیقی است})$$

آیا برداری حقیقی مانند $\mathbf{x} \neq 0$ وجود دارد که بردار $\mathbf{y}$ متناظر با آن حقیقی بوده وهمان جهت و امتداد $\mathbf{x}$ را داشته باشد؟ به‌عبارت دیگر می‌خواهیم برداری مانند $\mathbf{x}$ را به‌قسمی پیدا کنیم که

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \qquad (\lambda \text{ حقیقی و مثبت است})$$

آشکار است که چنین برداری وقتی و تنها وقتی وجود دارد که $\mathbf{A}$ دارای مقدار ویژهٔ حقیقی مثبتی باشد. در این‌صورت $\mathbf{x}$ بردار ویژهٔ متناظر به‌آن مقدار ویژه است. ▲

حال (۱) را درنظر می‌گیریم. هرگاه $\mathbf{x}$ بردار دلخواهی باشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A}\mathbf{x}$، درحالت کلی، مستقل خطی هستند. هرگاه $\mathbf{x}$ بردار ویژه باشد، آنگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A}\mathbf{x}$ وابستهٔ خطی هستند؛ بدین ترتیب مؤلفه‌های متناظر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A}\mathbf{x}$ با هم متناسبند و ضریب تناسب عبارت ازمقدار ویژهٔ λ است.

حال نشان می‌دهیم که هر ماتریس مربعی n سطری حداقل ۱ وحداکثر n مقدار ویژهٔ متمایز (حقیقی یا مختلط) دارد.

برای این منظور (۱) را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n .
\end{aligned}$$

پس از انتقال جملات سمت‌راست به‌سمت‌چپ، خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
(a_{۱۱}-\lambda)x_۱ + \quad a_{۱۲}x_۲ \quad + \cdots + \quad a_{۱n}x_n \quad &= ۰ \\
a_{۲۱}x_۱ \quad + (a_{۲۲}-\lambda)x_۲ + \cdots + \quad a_{۲n}x_n \quad &= ۰ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n۱}x_۱ \quad + \quad a_{n۲}x_۲ \quad + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= ۰ .
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

و با نماد ماتریسی،

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=۰ .$$

بنا به‌قضیهٔ کرامر که دربخش ۱۱.۷، ذکر شد این دستگاه همگن معادلات خطی وقتی و تنها وقتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ضرایب آن صفر باشد:

$$
(۵)\quad D(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} a_{۱۱}-\lambda & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}-\lambda & \cdots & a_{۲n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=۰ .
$$

$D(\lambda)$ را **دترمینان مشخصه** و (۵) را **معادلهٔ مشخصهٔ** متناظر با ماتریس $\mathbf{A}$ نامند. با بسط $D(\lambda)$ یك‌چندجمله‌ای درجه n ام برحسب λ به‌دست‌می‌آوریم. این چندجمله‌ای را **چند۔جمله‌ای مشخصهٔ** متناظر با $\mathbf{A}$ نامند. بدین‌ترتیب قضیهٔ مهم زیر را به‌دست آورده‌ایم.

قضیهٔ ۱. (مقادیر ویژه)

مقادیر ویژهٔ ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با (۵) هستند.

مقدار ویژه‌ای را که ریشهٔ مرتبه m ام چندجمله‌ای مشخصهٔ است مقدار ویژهٔ **مرتبه** m ام ماتریس متناظر نامند.

به‌مجرد اینکه مقادیرویژه تعیین گردیدند بردارهای‌ویژهٔ متناظر را می‌توان ازدستگاه (۴) به‌دست آورد. چون دستگاه همگن است، پیداست که هرگاه $\mathbf{x}$ بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$ باشد، آنگاه $k\mathbf{x}$ نیز، که در آن k مقداری ثابت و غیرصفر است، بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$، متناظر با همان مقدار ویژه، است.

مثال ۳. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس زیر را معین کنید:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}.$$

معادلهٔ مشخصه

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۴ \\ ۱ & ۲-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^{۲}-۷\lambda+۶=۰$$

دارای ریشه‌های $\lambda_{۱}=۶$ و $\lambda_{۲}=۱$ است. به‌ازای $\lambda=\lambda_{۱}$ دستگاه (۴) به‌شکل زیر در می‌آید:

$$-x_{۱}+۴x_{۲}=۰$$
$$x_{۱}-۴x_{۲}=۰ .$$

بنابراین $x_{۱}=۴x_{۲}$، و

$$\mathbf{x}_{۱}=\begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

یك بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$، متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda_{۱}$، است. به‌همین طریق درمی‌یابیم که بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$، متناظر با $\lambda_{۲}$، عبارت است از

$$\mathbf{x}_{۲}=\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_{۱}$ و $\mathbf{x}_{۲}$ بردارهای مستقل خطی هستند.

مثال ۴. مقادیر ویژهٔ مختلط

ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad (a \text{ و } b \text{ حقیقی، و } b\neq ۰)$$

دارای مقادیر ویژهٔ مختلط مزدوج $\lambda_{۱}=a+ib$ و $\lambda_{۲}=a-ib$ است. بردارهای ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$\mathbf{x}_{۱}=\begin{pmatrix} ۱ \\ i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x}_{۲}=\begin{pmatrix} ۱ \\ -i \end{pmatrix}$$

هر گاه $b=۰$، آنگاه $\lambda_{۱}=\lambda_{۲}=a$؛ ماتریس $\mathbf{A}$ در این حالت فقط یك مقدار ویژه دارد (که از مرتبهٔ دوم است)، و هربردار $\mathbf{x}\neq \mathbf{۰}$ ی که دو مؤلفه داشته باشد بردار ویژه‌ای از $\mathbf{A}$ است.

مثال ۵

ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -۲ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & -۶ \\ -۱ & -۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱ = ۵$ و $\lambda_۲=\lambda_۳=-۳$ است. بردار

$$\mathbf{x}_۱=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

یك بردار ویژهٔ $\mathbf{A}$ متناظر، با مقدار ویژهٔ ۵ ، است و بردارهای

$$\mathbf{x}_۲=\begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad و \quad \mathbf{x}_۳=\begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

دوبردار ویژهٔ دیگر $\mathbf{A}$ ، متناظربا مقدار ویژهٔ ۳ــ ، هستندکه مستقل خطیند. این‌امر بااین واقعیت‌که به‌ازای $\lambda = -۳$ ماتریس $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ دارای رتبهٔ ۱ بوده وبنابراین، طبق‌قضیهٔ ۲ بخش ۷.۷ ، پایه‌ای برای جوابهای دستگاه متناظر با (۴) است. دستگاه متناظر بـا (۴) عبارت است از

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۰$$

$$۲x_۱ + ۴x_۲ - ۶x_۳ = ۰$$

$$-x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۰ ,$$

که از دو بردار مستقل خطی تشکیل شده است. ▲

مثال ۵ نشان می‌دهدکه به‌یك مقدار ویژه ممکن‌است چند بردار مستقل خطی مربوط شود. حداکثر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر بـا مقدار ویژهٔ λ را **چندبارگی** (هندسی) λ می‌نامند.

مسائل بخش ۱۳۰۷

۱. آیا ماتریسهایی وجود دارند که هیچ مقدار ویژه‌ای نداشته باشند؟

مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

۲. $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ **۳.** $\begin{pmatrix} ۸ & -۴ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$

۴. $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ **۵.** $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

۶. $\begin{pmatrix} -۴ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}$ **۷.** $\begin{pmatrix} ۶ & ۸ \\ ۸ & -۶ \end{pmatrix}$

۸. $\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$ **۹.** $\begin{pmatrix} ۱٫۵ & ۲ \\ ۲ & -۱٫۵ \end{pmatrix}$

۱۰. $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ **۱۱.** $\begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{pmatrix}$

۱۲. $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{pmatrix}$ **۱۳.** $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

مقادیر ویژهٔ ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

۱۴. $\begin{pmatrix} ۱۳ & ۰ & -۱۵ \\ -۳ & ۴ & ۹ \\ ۵ & ۰ & -۷ \end{pmatrix}$ **۱۵.** $\begin{pmatrix} ۲۶ & ۲ & ۴ \\ -۲ & ۲۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۲۸ \end{pmatrix}$

۱۶. $\begin{pmatrix} ۱٫۵ & -۱ & -۲ \\ -۰٫۴ & ۱٫۲ & ۰٫۴ \\ -۰٫۳ & -۰٫۶ & -۰٫۲ \end{pmatrix}$

۱۷. نشان دهید که مقادیر ویژهٔ ماتریس مثلثی $\mathbf{A}$ برابربا عناصر قطر اصلی $\mathbf{A}$ هستند.

۱۸. نشان دهید که $\mathbf{A}^T$، ترانهاد $\mathbf{A}$، دارای همان مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ است.

۱۹. نشان‌دهید که هرگاه $\mathbf{A}$ دارای عناصر حقیقی باشد، آنگاه یا مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ حقیقیند ویا دوبه‌دو مزدوج مختلطند.

۲۰. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{A}$ یك ماتریس مربعی n سطری و n فرد باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ حداقل یك مقدار ویژهٔ حقیقی دارد.

۲۱. نشان دهید که جملهٔ ثابت $D(\lambda)$ برابر با $\det \mathbf{A}$ است.

۲۲. نشان دهید که $\lambda = ۰$ مقدار ویژه‌ای برای ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ است اگر وتنها اگر $\mathbf{A}$ تکین باشد.

۲۳. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$ ، . . . ، λ_n باشد، آنگاه $k\mathbf{A}$ مقادیر ویژهٔ $k\lambda_۱$ ، . . . ، $k\lambda_n$ را داراست. با استفاده ازاین مطلب ، مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ ۳ را به‌کمك مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ ۶ پیدا کنید.

۲۴. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$ ، . . . ، λ_n باشد، آنگاه $\mathbf{A}^m$ (m یك عدد صحیح نامنفی است) مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱^m$ ، . . . ، λ_n^m را داراست.

۲۵. نشان دهید که هرگاه $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$ ، . . . ، λ_n باشد، آنگاه

$$k_m\mathbf{A}^m+k_{m-۱}\mathbf{A}^{m-۱}+\cdots+k_۱\mathbf{A}+k_۰\mathbf{I}$$

دارای مقادیر ویژهٔ زیر است:

$$k_m\lambda_j^m+k_{m-۱}\lambda_j^{m-۱}+\cdots+k_۱\lambda_j+k_۰ \qquad (j=۱,\ldots,n)$$

۱۴.۷ مقادیر ویژهٔ ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی

ماتریس مربعی $\mathbf{A}=(a_{jk})$ راکه درمورد آن داریم

$$\mathbf{A}^{\mathsf T}=\bar{\mathbf{A}}^{-۱} \qquad (۱)$$

ماتریس یکانی می‌نامند.

ماتریس یکانی حقیقی $\mathbf{A}$ **ماتریس متعامد** نامیده می‌شود. برای چنین ماتریسی، (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{A}^{\mathsf T}=\mathbf{A}^{-۱}, \qquad (۲)$$

یعنی ماتریس متعامد ماتریسی حقیقی است‌که معکوس و ترانهاد آن با هم برابرند.

دسته بردارهای $\mathbf{x}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{x}_n$ راکه در رابطهٔ

$$(۳) \qquad \bar{\mathbf{x}}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k=\delta_{jk}=\begin{cases} ۰ & j\neq k \\ ۱ & j=k \end{cases} \qquad (j,k=۱,\ldots,n)$$

صدق می‌کنند، **دستگاه یکانی** نامند.

بدیهی است که هرگاه این بردارها حقیقی باشند، آنگاه $\bar{\mathbf{x}}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ حاصل‌ضرب داخلی (حاصل‌ضرب اسکالر) $\mathbf{x}_j$ و $\mathbf{x}_k$ به معنای معمولی اصطلاح است، و شرط(۳) بدین‌مفهوم‌است که $\mathbf{x}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{x}_n$ بردارهای‌یکهٔ متعامدند. از این‌رو یك دستگاه یکانی از بردارهای حقیقی، دستگاهی‌از بردارهای یکهٔ متعامد (دو به دوعمود برهم) است.

قضیهٔ ۱ (ماتریس یکانی)

بردارهای ستونی (و همچنین بردارهای سطری) یك ماتریس یکانی، تشکیل یك دستگاه یکانی می‌دهند.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریسی یکانی با بردارهای ستونی $\mathbf{a}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{a}_n$ باشد. درآن صورت از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A}=\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{a}}_۱^{\mathrm{T}}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \bar{\mathbf{a}}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\mathbf{a}_۱\cdots\mathbf{a}_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{a}}_۱^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۱ & \bar{\mathbf{a}}_۱^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۲\cdots & \bar{\mathbf{a}}_۱^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_n\\ \bar{\mathbf{a}}_۲^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۱ & \bar{\mathbf{a}}_۲^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۲\cdots & \bar{\mathbf{a}}_۲^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_n\\ \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot\\ \bar{\mathbf{a}}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۱ & \bar{\mathbf{a}}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_۲\cdots & \bar{\mathbf{a}}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_n\end{pmatrix}=\mathbf{I}$$

بنابراین

$$\bar{\mathbf{a}}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_k=\begin{cases} ۰ & j\neq k,\\ ۱ & j=k.\end{cases}$$

این مطلب نشان می‌دهد که بردارهای ستونی ماتریس یکانی تشکیل دستگاه یکانی می‌دهند. از (۱) نتیجه می‌شود که معکوس ماتریس یکانی $\mathbf{A}$ ، یعنی $\mathbf{A}^{-۱}$ ، یکانی است (ر.ك. مسئلهٔ ۹)، علاوه براین، بردارهای ستونی $\mathbf{A}^{-۱}$ ، مزدوج بردارهای سطری $\mathbf{A}$ هستند؛ بنابراین بردارهای سطری $\mathbf{A}$ یك دستگاه یکانی تشکیل می‌دهند. ▲

مفهوم قضیهٔ ۱ در رابطه با ماتریسهای متعامد این است که بردارهای سطری (و نیز بردارهای ستونی) یك ماتریس متعامد $\mathbf{A}=(a_{jk})$ تشکیل دستگاهی از بردارهای یکانی متعامد می‌دهند؛ یعنی

$$\sum_{m=1}^{n} a_{jm}a_{km}=\delta_{jk}\,. \tag{۴}$$

ماتریسهای متعامد از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا **تبدیلات متعامد**، یعنی تبدیلات خطی $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ با ماتریس ضرایب متعامد، دارای خاصیت زیرند.

قضیهٔ ۲ (تبدیل متعامد)

تبدیل متعامد، حاصلضرب داخلی

$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ وبنابراین نرم $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$

را ناوردا باقی‌می‌گذارد. بخصوص، درفضای سه بعدی اقلیدسی تبدیل متعامد طول هربردار و زاویهٔ بین هردو بردار را حفظ می‌کند؛ لذا این تبدیل یك دوران است (که گاه با یك انعکاس ترکیب شده)، و ماتریس ضرایب دوران یك دستگاه مختصات دکارتی، ماتریسی متعامد است.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{A}$ متعامد باشد و $\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{y}$. با استفاده از (۲)ی همین بخش و (۱۲) بخش ۴.۷، به دست می‌آوریم

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

▲

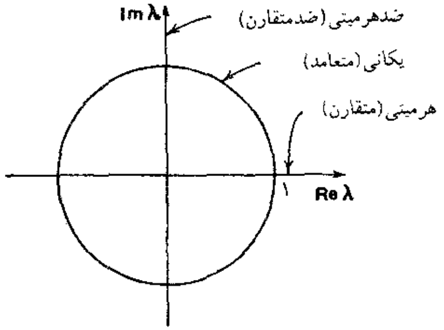
حال مقادیر ویژهٔ ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی را در نظر می گیریم و مشخصات عمومی نشان داده شده درشکل ۱۴۴ را ثابت می کنیم.

قضیهٔ ۳ (مقادیر ویژه)

(الف) مقادیر ویژهٔ ماتریس هرمیتی حقیقیند.
(ب) مقادیر ویژهٔ ماتریس ضد هرمیتی موهومی محض یا صفرند.
(پ) مقادیر ویژهٔ ماتریس یکانی دارای قدر مطلق ۱ هستند.

اثبات. (الف) و **(ب)** فرض کنید λ یکی از مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ باشد. در این صورت بنا به تعریف، برداری مانند $\mathbf{x}\neq 0$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. پس داریم

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}^{T}\lambda\mathbf{x}=\lambda\overline{\mathbf{x}}^{T}\mathbf{x}\,.$$



شکل ۱۴۴. وضعیت مقادیر ویژهٔ ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی درصفحهٔ مختلط λ.

چون $\mathbf{x} \neq 0$، نتیجه می‌شود که $\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} \neq 0$ و می‌توان با تقسیم به دست آورد

$$\lambda = \frac{\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}}.$$

مخرج کسر حقیقی است. هر گاه $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد، صورت نیز حقیقی است. (قضیهٔ ۱ بخش ۱۲.۷) وبنابراین λ حقیقی خواهد بود. اگر $\mathbf{A}$ ضد هرمیتی باشد، صورت کسر موهومی محض و یا صفر است (قضیهٔ ۲ بخش ۱۲.۷) و بنابراین λ نیز موهومی محض یا صفر خواهد بود.

(**پ**). فرض کنید $\mathbf{U}$ یکانی، λ مقدار ویژه‌ای از $\mathbf{U}$ و $\mathbf{x}$ بردار ویژهٔ متناظر با آن باشد. دراین صورت

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \qquad (۵)$$

با گرفتن ترانهاد مزدوج از طرفین رابطهٔ اخیر و با استفاده از (۱۲) بخش ۴.۷ به دست می‌آوریم

$$(\overline{\mathbf{U}}\,\overline{\mathbf{x}})^T = \overline{\mathbf{x}}^T\,\overline{\mathbf{U}}^T = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T$$

چون$\mathbf{U}$ یکانی‌است، $\overline{\mathbf{U}}^T = \overline{\mathbf{U}}^{-1}$، و رابطهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{\mathbf{x}}^T\,\overline{\mathbf{U}}^{-1} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T \qquad (۶)$$

حال طرفین (۶) را ازسمت چپ درطرفین (۵) ضرب می کنیم :

$$\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda\bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

دراین رابطه داریم $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}=\mathbf{I}$ و $\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$. بنابراین رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{\mathbf{x}}^T\bar{\mathbf{x}}=|\lambda|^2\bar{\mathbf{x}}^T\bar{\mathbf{x}}.$$

چون $\mathbf{x}\neq 0$، نتیجه می‌شود که $\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\neq 0$. لذا باید داشته باشیم $|\lambda|^2=1$. بنابراین $|\lambda|=1$، واثبات تمام می‌شود. ▲

یك حالت خاص مهم قضیهٔ ۳ عبارت است از

قضیهٔ ۴

مقادیر ویژهٔ ماتریس متقارن، حقیقی هستند. مقادیر ویژهٔ ماتریس ضد متقارن موهومی محض ویا صفرند. مقادیر ویژهٔ ماتریس متعامد دارای قدر مطلق ۱ هستند و یا حقیقیند یا دو به دو مزدوج مختلط.

روشهای عددی مربوط به مسائل مقدار ویژهٔ ماتریسی در بخشهای ۱۳.۱۹ و ۱۴.۱۹، که ازسایر بخشهای فصل ۱۹ مستقلند، آمده‌اند؛ بنابراین می‌توان آنها را همین حالا نیز مطالعه کرد.

مسائل بخش ۱۴.۷

نشان دهید که ماتریسهای زیر متعامدند.

۱. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

۲. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۳. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۴. تبدیل $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ را که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۱ است ومؤلفه‌های $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ مختصات دکارتی هستند، تعبیر هندسی کنید.

۵. مسئلهٔ ۴ را حل کنید. با این فرض که $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۲ باشد.

۶. نشان دهید که هر گاه $\mathbf{A}$ متعامد باشد، آنگاه $\det\mathbf{A}$ برابر ۱+ یا ۱− است. چند مثال ارائه دهید.

نشان دهید که ماتریسهای زیر یکانی هستند ومقادیر ویژه وبردارهای ویژهٔ آنها را معین کنید.

$$\text{.۷} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{.۸} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & i\sqrt{2/3} \\ -i\sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

۹. نشان دهید که معکوس یك ماتریس یکانی، یکانی است. درستی این مطلب را درمورد مسئلهٔ ۷ تحقیق کنید.

۱۰. نشان دهید که حاصل ضرب دوماتریس یکانی n سطری، یکانی است. درستی این‌مطلب را درمورد ماتریسهای مسائل ۷ و ۸ تحقیق کنید.

۱۱. نشان دهید بردارهای ویژهٔ یك ماتریس متقارن حقیقی که با مقادیر ویـژهٔ متفاوتی متناظر باشند متعامدند. مثالی ارائه دهید.

۱۲. (**تبدیل تشابه**) تبدیل خطی $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ را که در آن $\mathbf{A}$ مربعی است درنظر بگیرید و فرض کنید $\mathbf{x}=\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ ، $\mathbf{y}=\mathbf{T}\bar{\mathbf{y}}$ که درآن $\mathbf{T}$ ناتکین است. دراین صورت نشان دهید

$$\bar{\mathbf{y}}=\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{که درآن} \quad \bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

(این تبدیل کـه $\mathbf{A}$ را بـه $\bar{\mathbf{A}}$ تبدیل می‌کند تبدیل تشابه نام دارد و $\mathbf{A}$ و $\bar{\mathbf{A}}$ را ماتریسهای مشابه گویند.)

۱۳. نشان دهید که هرگاه $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ ، که درآن $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی دلخواهی است، آنگاه $\det\bar{\mathbf{A}}=\det\mathbf{A}$. راهنمایی . از (۵) بخش ۷.۱۰ استفاده کنید.

۱۴. $\mathbf{A}$ را ماتریس مربعی‌مفروضی بگیرید وفرض کنید $\mathbf{X}$ ماتریسی باشد که $\mathbf{x}_1$ ، . . . ، $\mathbf{x}_n$، بردارهای ستونی آن ، بردارهای ویژهٔ $\mathbf{A}$ متناظر بـا λ_1 ، . . . ، λ_n، مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ ، باشند . نشان دهید

$$\mathbf{A}\mathbf{X}=(\lambda_1\mathbf{x}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{x}_n)=\mathbf{X}\mathbf{D}$$

که درآن $\mathbf{D}$ ماتریس قطری‌است که عناصر روی قطر اصلی آن λ_1 ، . . . ، λ_n هستند.

۱۵. هرگاه درمسئلهٔ ۱۴ $\mathbf{x}_i$ ها مستقل خطی باشند، نشان دهید که $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{D}$.

۱۶. (اثر) مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس مربعی $\mathbf{C}=(c_{ik})$ را اثر $\mathbf{C}$ می‌نامند، وبا $\operatorname{tr}\mathbf{C}$ نشان می‌دهند*. بنابراین

$$\operatorname{tr}\mathbf{C}=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{nn}.$$

فرض کنید $\mathbf{A}=(a_{ik})$ و $\mathbf{B}=(b_{ik})$ دوماتریس مربعی n سطری باشند. نشان‌دهید که

$$\operatorname{tr}\mathbf{AB}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{li}=\operatorname{tr}\mathbf{BA}\,.$$

---

* tr مخفف trace (اثر) است. ـ م.

۱۷. هرگاه داشته باشیم $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$، نشان دهیدکه $\operatorname{tr}\bar{\mathbf{A}}=\operatorname{tr}\mathbf{A}$.

۱۸. نشان دهیدکه مقادیر ویژهٔ ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ یکسان هستند.

۱۹. اگر $\mathbf{x}$ بردار ویژه‌ای از $\mathbf{A}$ باشدکه متناظر با مقدار ویژهٔ λ است، نشان دهیدکه $\mathbf{y}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ بردار ویژه‌ای از $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ است‌که متناظر با همان مقدار ویژهٔ λ است.

۲۰. درستی حکم مسئلهٔ ۱۸ را درمورد ماتریسهای زیر تحقیق کنید:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۴ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \text{ و } \bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \text{ که درآن } \mathbf{T}=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix}.$$

۲۱. (**ماتریس نرمال**). بنا به تعریف، ماتریس نرمال ماتریسی است مربعی‌که با ترانهاد مزدوج مختلط خودش تعویضپذیر باشد، یعنی

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}=\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}.$$

نشان دهیدکه ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی ویکانی نرمال هستند.

ماتریسهای زیر تحت چه شرایطی نرمالند؟

۲۲. $\begin{pmatrix} ۰ & b \\ c & ۰ \end{pmatrix}$

۲۳. $\begin{pmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & b \\ c & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

۲۴. (**ماتریس تصادفی**). بنا به تعریف، ماتریس تصادفی یك ماتریس مربعی حقیقی با عناصر نامنفی است ومجموع عناصر هر سطر آن ۱ است. نشان دهیدکه درهرماتریس تصادفی یکی ازمقادیر ویژه برابر ۱ است.

۲۵. عناصر یك ماتریس‌تصادفی ممکن‌است احتمال باشند؛ مثلا، احتمال مربوط به حرکت مردم ازیك شهر به حومهٔ آن وبالعکس. ماتریس

		وضعیت نهایی	
		شهر	حومه
وضعیت اولیه	شهر	۰٫۹۵	۰٫۰۵
	حومه	۰٫۰۲	۰٫۹۸

را درنظربگیریدکه درآن وضعیت نهایی به‌معنی وضعیت دریك سال بعد است. فرض کنید $(C\,,\,S)=(۱۰۰۰۰۰\,,\,۱۰۰۰۰۰)$ حالت اولیه باشدکه درآن C به مفهوم

شهر و S به معنی حومه است. پس از یك سال وضعیت چگونه خواهد بود؟ پس از دوسال چه؟ (ازافزایش جمعیت صرف‌نظر کنید.)

۱۵.۷ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

دستگاههای معادلات دیفرانسیل درمسائل مهندسی مختلفی مطرح می‌شوند. دربخشهای ۱.۳ و ۱۳.۷ ایده‌ای ازاین موضوع ارائه گردید. دستگاههای ساده‌تر را می‌توان بدون‌استفاده ازماتریسها حل‌کرد (ر. ك. بخش ۱.۳). با این همه، برای دستگاههای بزرگ ویا برای بحث در خواص عمومی جوابهـا و گسترش یك نظریهٔ سیستماتیك، استفاده از ماتریسها ارزشمند ومناسب است.

دراین بخش نقش ماتریسهـا و مقادیر ویژه را در ارتباط با دستگاههـای معادلات دیفرانسیل خطی تشریح خواهیم‌کرد.

مثال ۱. دستگاه مرتعش

معادلات حرکت دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۵ را تعیین‌کنید به‌نحوی که درشرایط اولیهٔ زیر صدق کنند:

$$y_1(0)=1 \ , \ y_2(0)=2 \ , \ \dot y_1(0)=-2\sqrt{6} \ , \ \dot y_2=\sqrt{6}$$

این دستگاه را در مثال ۱ بخش ۱۳.۷ بررسی کـردیم، و می‌دانیم‌که دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوطه را می‌توان چنین نوشت:

$$\ddot y = \mathbf{A}\, y$$

که درآن

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

با جایگزین کردن $\mathbf{y}=\mathbf{x}e^{\omega t}$ وحذف $e^{\omega t}$، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \qquad (\lambda=\omega^2)$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+7\lambda+6=0 .$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=-6$. اینها مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ هستند.

بردارهای ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

به‌ازای $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = -6$ به ترتیب داریم $\omega_1 = \pm i$ و $\omega_2 = \pm i\sqrt{6}$. بنابراین یکی ازجوابها برابر است با

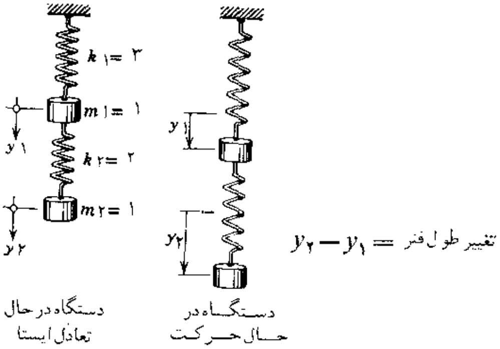
$$(1) \quad \mathbf{y}(t) = a_1 \mathbf{x}_1 \cos t + b_1 \mathbf{x}_1 \sin t + a_2 \mathbf{x}_2 \cos \sqrt{6}\, t + b_2 x_2 \sin \sqrt{6}\, t$$

که درآن a_1، b_1، a_2، b_2 ثابتهایی دلخواه هستند. معادلهٔ بالا را برحسب مؤلفه‌ها به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(2) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos \sqrt{6}\, t + b_2 \sin \sqrt{6}\, t \\ y_2(t) &= 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{2} a_2 \cos \sqrt{6}\, t - \frac{1}{2} b_2 \sin \sqrt{6}\, t \end{aligned}$$

و این ازشکل x_1 و x_2 معلوم می‌شود. بنابر (۱) وشرایط اولیهٔ $y_1(0) = 1$ و $y_2(0) = 2$، که به صورت برداری نوشته شده‌اند، داریم

$$\mathbf{y}(0) = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



شکل ۱۴۵. دستگاه مکانیکی مثال ۱

بنابراین $a_1 = 1$ و $a_2 = 0$. با قراردادن این مقادیر در (۱) و مشتقگیری از آن نتیجه می‌شود

$$\dot{y}(t) = -\mathbf{x}_1 \sin t + b_1 \mathbf{x}_1 \cos t + b_2 \sqrt{6}\, \mathbf{x}_2 \cos \sqrt{6}\, t$$

ازاین رابطه و دو شرط اولیهٔ دیگر، یعنی $\dot{y}_1(0) = -2\sqrt{6}$ و $\dot{y}_2(0) = \sqrt{6}$، به دست می‌آوریم

$$\dot{y}(0) = b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \sqrt{6}\, \mathbf{x}_2 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_2 \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

ازاین‌رو $b_1 = 0$ و $b_2 = -2$. جواب مسئله چنین است:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1 \cos t - 2\mathbf{x}_2 \sin \sqrt{6}\, t,$$

که برحسب مؤلفه‌ها به صورت زیر درمی‌آید:

$$y_1(t) = \cos t - 2\sin \sqrt{6}\, t$$

$$y_2(t) = 2\cos t + \sin \sqrt{6}\, t$$

طریق دیگر بررسی دستگاه معادلات مزبور تحویل آن به یك معادلـه است. این موضوع‌را دربخش ۱.۳ دیدیم، وجواب (۲)ی بالا باجواب (۹) آن بخش مطابقت دارد.

راه سوم ــ که دراین مورد چندان سودمند نیست امـا دراصل بسیار مهم است ــ عبارت است‌ازتبدیل دستگاه داده شده به دستگاه بزرگتری ازمعادلات مرتبه‌اول. این‌عمل بسیارساده‌است. تنهاکاری که بایدانجام‌دهیم این است که قراردهیم $y_1 = y_3$ و $\dot{y}_2 = y_4$. دراین صورت $\dot{y}_1 = y_3$ ، $\dot{y}_2 = y_4$ ، وجمعاً چهارمعادلهٔ مرتبهٔ اول زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ \dot{y}_3 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_4 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{3}$$

این معادلات را می‌توان به صورت $\dot{\bar{\mathbf{y}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}}$، نوشت‌که درآن

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (۴)$$

پس ازقراردادن $\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{x}}e^{\tilde{\lambda} t}$ و $\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\lambda}\mathbf{x}e^{\lambda t}$ ، خواهیم داشت

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}.$$

ازاین معادله، معادلهٔ مشخصهٔ زیر نتیجه می‌شود،

$$\tilde{\lambda}^4+7\tilde{\lambda}^2+6=0\,.$$

بنابراین $\tilde{\lambda}^2$ برابربا ۱− ویا ۶− است و لذا چهار مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ عبارتند از i ، $-i$ ، $i\sqrt{6}$ ، $-i\sqrt{6}$. بردارهای ویژهٔ متناظر برابرند با

$$\tilde{\mathbf{x}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \\ -2i \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ i\sqrt{6} \\ -i\sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -i\sqrt{6} \\ i\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

جواب متناظر (۳) عبارت است از

$$\tilde{\mathbf{y}}=c_1\tilde{\mathbf{x}}_1e^{it}+c_2\tilde{\mathbf{x}}_2e^{-it}+c_3\tilde{\mathbf{x}}_3e^{i\sqrt{6}t}+c_4\tilde{\mathbf{x}}_4e^{-i\sqrt{6}t}\,.$$

وبرحسب مؤلفه‌ها می‌توان نوشت

$$y_1=c_1e^{it}+c_2e^{-it}+c_3e^{i\sqrt{6}t}+c_4e^{-i\sqrt{6}t}\,.$$

$$y_2=2c_1e^{it}+2c_2e^{-it}-\frac{1}{2}c_3e^{i\sqrt{6}t}-\frac{1}{2}c_4e^{-i\sqrt{6}t}$$

و $y_3=y_1'$ ، $y_4=y_2'$. پس می‌توان نوشت

$$y_1 = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos\sqrt{6}\, t + b_2 \sin\sqrt{6}\, t$$

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{2} a_2 \cos\sqrt{6}\, t - \frac{1}{2} b_2 \sin\sqrt{6}\, t$$

که با نتیجهٔ (۲) مطابقت دارد. ▲

دستگاه مرتبه اول (۳) دراین مثال به شکل زیر است:

$$y'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k + h_j(t) \qquad j = 1, \ldots, n$$

حال چندکلمه‌ای دربارهٔ نظریهٔ عمومی برای چنین دستگاههایی صحبت می‌کنیم. معمولا a_{jk} ها به t بستگی دارند اما، برای سادگی، فرض می‌کنیم که آنها ثابت باشند. (درمثال ۱ داریم $h_j = 0$.) دستگاه را به صورت ماتریسی می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}. \qquad (5)$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{A}$ دارای n بردار ویژهٔ مستقل خطی $\mathbf{x}_1$ ، . . . ، $\mathbf{x}_n$ باشد. (مثلا، این شرط در مورد ماتریس متقارن، که اغلب به علت وجود تقارن در مسائل پیش می‌آیـد، صادق است.) فرض‌کنید λ_1 ، . . . ، λ_n معرف بردارهای ویژهٔ متناظر باشند. (توجه داشته باشید که ممکن است بعضی از این مقادیر با هم برابرباشند.) آنگاه داریم

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \ , \ \ldots, \ \mathbf{A}\mathbf{x}_n = \lambda_n \mathbf{x}_n$$

ویا، اگر بخواهیم این معادلات را به صورت یك معادلهٔ ماتریسی تنها بنویسیم، خواهیم داشت

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{A}\mathbf{x}_n) = (\lambda_2 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_4 \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \lambda_n \mathbf{x}_n).$$

با معرفی

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n),$$

که ازبردارهای ستونی $\mathbf{x}_1$ ، . . . ، $\mathbf{x}_n$ تشکیل یافته است. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{X}, \qquad (6)$$

که درآن $\mathbf{D}$ ماتریسی قطری است کـه عناصر روی قطر اصلی آن λ_1 ، . . . ، λ_n هستند. برای واردکردن $\mathbf{X}$ در (۵) فرض می‌کنیم

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z} \qquad (7)$$

که آنگاه $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\dot{\mathbf{z}}$ و (۵) چنین می‌شود:

$$\mathbf{X}\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{z}+\mathbf{h}.$$

به فرض آنکه $\mathbf{X}$ ناتکین باشد، به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{z}+\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}.$$

چون بنا به (۶) داریم $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{D}$ ، به سادگی به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{D}\mathbf{z}+\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}. \qquad (۸)$$

اگر $\mathbf{D}\mathbf{z}$ را به سمت چپ برده، رابطه را برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم، خواهیم داشت

$$\dot{z}_j-\lambda_j z_j=r_j(t) \qquad (j=1,\dots,n), \qquad (۸^*)$$

که در آن، بنا به تعریف ضرب ماتریسی، $r_j(t)$ ترکیبی خطی، با ضرایب ثابت، از $h_1(t)$ ، . . . ، $h_n(t)$ است. بنابربخش ۷.۱، جواب (*۸) عبارت است از

$$z_j(t)=e^{\lambda_j t}\left(\int e^{-\lambda_j t}r_j(t)dt+c_j\right) \qquad (۹)$$

که درآن c_j ثابتی دلخواه است. مانند بخش ۷.۱ می‌توانیم با در نظر گرفتن یك شرط اولیه به c_j مقدار یکتایی نسبت دهیم .

$$\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0. \qquad (۱۰)$$

در واقع، بنا به (۷)، ازاین شرط نتیجه می‌شود

$$\mathbf{z}(t_0)=\mathbf{z}_0=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}_0.$$

و یا، برحسب مؤلفه‌ها، $z_j(t_0)=z_{0j}$ ، که درآن z_{0j} عبارت از j امین مؤلفهٔ بردارثابت $\mathbf{z}_0$ است.

با توجه به چگونگی پیدا کردن جواب عمومی یك معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول دربخش ۷.۱، می‌بینیم که نتیجه را می‌توانیم به ترتیب زیر فرمولبندی کنیم.

قضیهٔ وجود ویگانگی برای دستگاهها

فرض‌کنید $\mathbf{h}(t)$ که در رابطهٔ (۵) معرفی شد دافاصلهٔ $\alpha<t<\beta$ پیوسته بوده t_0 نقطهٔ مفروض دلخواهی دآن فاصله باشد. فرض‌کنید $\mathbf{A}$ دارای مجموعه‌ای از n بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد. در این صورت مسئله با مقدار اولیهٔ (۵) ، (۱۰) درآن فاصله دارای جواب یکتای $\mathbf{y}(t)$ است.

می‌توان ثابت کرد که ماتریسهای متقارن حقیقی و کلیتر از آن ماتریسهای هرمیتی حائز این شرط هستند، و نظر به اینکه در بیشتر کاربردها با ماتریسهای هرمیتی سروکار داریم، این قضیه از اهمیت عملی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

درکاربردها، اغلب دانستن این نکته مهم است که وقتی $t \to \infty$ آیا جواب به‌سمت صفر میل می‌کند یا نه. این مسئلهٔ پایداری جوابهاست. بحث ما منجر به نتیجهٔ زیرمی‌شود. هرگاه در (۵)، $\mathbf{h}=0$، آنگاه در (۸) داریم $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}=0$، لذا در (۸*) داریم $r_j=0$ و در(۹) $z_j=c_j e^{\lambda_j t}$؛ پس می‌توان نتیجه گرفت:

قضیهٔ ۲ (پایداری)

تمام جوابهای دستگاه (۵)، با $\mathbf{h}=0$، وقتی $t \to \infty$ به سمت ۰ میل می‌کنند اگر وتنها اگر تمام مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ دارای قسمتهای حقیقی منفی باشند.

مثال سادهٔ زیر حالت خاصی از استدلال کلی بالا را بررسی می‌کند:

مثال ۲

مسئلهٔ با مقدار اولیه‌ای راکه ازمعادلات

$$\dot{y}_1=5y_1+8y_2+1$$

$$\dot{y}_2=-6y_1-9y_2+t$$

وشرایط اولیهٔ $y_1(0)=4$ ، $y_2(0)=-3$ تشکیل شده است حل کنید.

با نمادگذاری ماتریسی داریم $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{h}$ ، که درآن

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

معادلهٔ مشخصه مقادیر ویژهٔ $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=-3$ را به دست می‌دهد. بردارهای ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

و رابطهٔ (۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{D}\mathbf{z}+\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}$$

که درآن

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}=\begin{pmatrix} 4+4t \\ -3-4t \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{Dz}$ را به سمت چپ می‌بریم، معادله را برحسب مؤلفه‌ها می‌نویسیم و از (۹) استفاده می‌کنیم:

$\dot{z}_1+z_1=4+4t$ ، جواب: $z_1=c_1e^{-t}+4t$.

$\dot{z}_2+3z_2=-3-4t$ ، جواب: $z_2=c_2e^{-3t}-\frac{5}{9}-\frac{4}{3}t$

ازاینجا به دست می‌آوریم

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{z}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5+24t \\ 5-15t \end{pmatrix}.$$

بنا به شرایط اولیه،

$$\mathbf{y}(0)=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5/9 \\ 5/9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

نتیجه می‌شود $c_1=4$ ، $c_2=5/9$. بنابراین جواب مسئلهٔ ما عبارت است از

$$y_1=4e^{-t}+\frac{5}{9}e^{-3t}-\frac{5}{9}+\frac{8}{3}t.$$

$$y_2=-3e^{-t}-\frac{5}{9}e^{-3t}+\frac{5}{9}-\frac{5}{3}t.$$

وبدین‌ترتیب مثال بالا استدلال ما را، که منجر به قضیهٔ وجود ویگانگی شد، روشن می‌کند (مطالب قبلی را ببینید).

مسائل بخش ۱۵۰۷

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

۱.
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= 4y_1 - 2y_2 \\ \dot y_2 &= y_1 + y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=3,\ y_2(0)=2$$

۲.
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= 3y_1 + 4y_2 \\ \dot y_2 &= 4y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=3$$

۳.
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= y_1 + 2y_2 \\ \dot y_2 &= -8y_1 + 11y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=1,\ y_2(0)=1$$

۴.
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= y_2 \\ \dot y_2 &= y_1 + 3y_3 \\ \dot y_3 &= y_2 \end{aligned} \quad y_1(0)=2,\ y_2(0)=0,\ y_3(0)=2$$

۵.
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= 3y_1 \\ \dot y_2 &= 5y_1 + 4y_2 \\ \dot y_3 &= 3y_1 + 6y_2 + y_3 \end{aligned} \quad y_1(0)=2,\ y_2(0)=-10,\ y_3(0)=-27$$

۶. در مثال ۱، نمودار جوابهایی را که در شرایط اولیهٔ $y_1(0)=1$ ، $y_2(0)=2$ ، $\dot y_1(0)=0$ ، $\dot y_2(0)=0$ صدق می‌کنند رسم کنید.

۷. نشان دهید که به ازای مقادیر عمومی m_1 ، m_2 ، k_1 ، k_2 دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۵ ازمعادلهٔ $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ تبعیت می‌کند، که درآن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

۸. نشان دهید که به ازای هر مقدار مثبتی از k_1 ، k_2 ، m_1 ، m_2 مقادیر ویژهٔ ماتریسی که درمسئلهٔ ۷ دیدیم حقیقی ومنفیند. ازاین موضوع راجع به حرکت دستگاه چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جوابهای معادلات دیفرانسیل مسئلهٔ ۷ را پیدا کنید، با این فرض که

۹. $m_1 = m_2 = 1$، $k_1 = 9$، $k_2 = 6$، $y_1(0) = -2$، $y_2(0) = 1$، $\dot{y}_1(0) = 0$، $\dot{y}_2(0) = 0$.

۱۰. $m_1 = m_2 = 1$، $k_1 = 6$، $k_2 = 4$، $y_1(0) = 0$، $y_2(0) = 0$، $\dot{y}_1(0) = \sqrt{2}$، $\dot{y}_2(0) = 2\sqrt{2}$

۱۱. درمثال ۱، مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ را به دست آورید.

۱۲. (**ارتعاشات**) نشان دهید که درشکل زیر ارتعاشات قائم دستگاه مکانیکی (جرم فنرها ومیرایی ناچیز فرض می‌شوند) از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر تبعیت می کند:

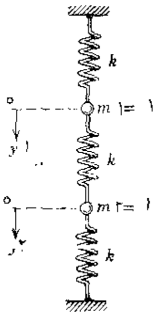
$$\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2 - y_1)$$

$$\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - ky_2$$

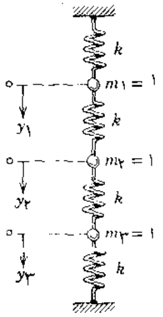
یعنی $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ که درآن $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix}$.

۱۳. برای حل معادلهٔ برداری مسئلهٔ ۱۲، قرارمی‌دهیم $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}$. نشان‌دهید که این عمل منجر به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ می‌شود که درآن $\lambda = \omega^2$. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را پیدا کنید. جواب معادلهٔ برداری را به‌قسمی پیدا کنید که درشرایط اولیهٔ $y_1(0) = 1$، $y_2(0) = 1$، $\dot{y}_1(0) = \sqrt{3k}$، $\dot{y}_2(0) = -\sqrt{3k}$ صدق کند.

۱۴. در مسئلهٔ ۱۲، مقادیر ویـژه حقیقی و منفی هستند. نشان دهید که هر گاه فنرها را با فنرهایی که دارای ثابتهای فنر (مثبت) دلخواه k_1، k_2، k_3 هستند، تعویض کنیم بازهم مقادیر ویژه حقیقی ومنفی خواهند بود.



مسئلهٔ ۱۲ (دستگاه درحالت تعادل ایستا)



مسئلهٔ ۱۵ (دستگاه درحالت تعادل ایستا)

۱۵. نشان دهید که ارتعاشات قائم دستگاه مکانیکی نشان داده شده در شکل از $\ddot{\mathbf{y}}=\mathbf{A}\mathbf{y}$ تبعیت می‌کنند، در این معادله

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_5 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) \end{pmatrix}$$

و با قراردادن $\mathbf{y}=\mathbf{x}e^{\omega t}$ در آن به نتیجهٔ $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ می‌رسیم که $\lambda=\omega^2$.

۱۶. تحقیق کنید که ضرایب

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0\ ,$$

معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ درمسئلهٔ ۱۵، مثبت هستند و نتیجه بگیرید که مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ باید حقیقی ومنفی باشند. در رابطه با حرکت دستگاه مکانیکی مسئلهٔ ۱۵، این نتیجه چه مفهومی دارد؟

۱۷. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس مسئلهٔ ۱۵ باشد و $k_1=k_2=k_3=k_4=k$. نشان دهید که ماتریس متناظر $\mathbf{B}=(1/k)\mathbf{A}+2\mathbf{I}$ دارای مقادیر ویژهٔ ۰، $\sqrt{2}$، و $-\sqrt{2}$ است. از اینجا نتیجه بگیرید که $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژهٔ $-2k$ ، $(-2+\sqrt{2})k$ ، و $(-2-\sqrt{2})k$ است.

۱۸. قضیهٔ ۲ را به تفصیل اثبات کنید.

۱۹. درستی تمام مراحل مثال ۲ را تحقیق کنید.

۲۰. مثال ۲ را، ازطریق تبدیل دستگاه مربوطه به یك معادله، حل کنید.

۸

حساب دیفرانسیل برداری. میدانهای برداری

میدانهای برداری را می‌توان برحسب توابع برداری معین کرد (بخش ۱.۸)؛ این میدانها دارای کاربردهای فیزیکی و هندسی گوناگونی هستند. مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل را می‌توان به‌نحوی ساده و طبیعی به‌توابع برداری توسعه داد (بخش ۲.۸). توابع برداری برای نمایش و بررسی منحنیها (بخشهای ۳.۸ تا ۵.۸) و به خاطر کاربردشان در مکانیك (بخش ۶.۸) مفیدند. مفاهیمی که ازنظر فیزیکی و هندسی در ارتباط با میدانهای برداری و اسکالر اهمیت دارند عبارتند از گرادیان (بخش ۸.۸)، دیورژانس (بخش ۱۰.۸) و تاو (بخش ۱۱.۸). (قضایای انتگرالی مربوطه درفصل ۹ مورد بررسی قرار خواهند گرفت).

پیشنیاز این فصل: فصل ۶.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذفند: ۴.۸ تا ۶.۸ و ۹.۸.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت C.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۸ میدانهای اسکالر و میدانهای برداری

تابع اسکالر تابعی است که درهر نقطه از مجموعهٔ معینی از نقاط فضا تعریف شده باشد و مقادیرش اعدادی حقیقی باشند که فقط به‌نقاط فضا بستگی داشته مستقل ازانتخاب دستگاه مختصات باشند. دراکثر کاربردها D، قلمرو تعریف تابع اسکالر f، یك‌منحنی، یك‌رویه

یا یك ناحیه درفضای سه‌بعدی است. تابع f به‌هرنقطهٔ D عددی حقیقی نسبت می‌دهد و گوییم که در D یك **میدان اسکالر** داده شده است.

هر گاه‌مختصات x ، y ، z را به‌کاربریم، آنگاه f را می‌توان برحسب‌این‌مختصات به‌صورت $f(x, y, z)$ نوشت، اما باید همواره درنظر داشت که مقدار f در هر نقطهٔ P مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است. برای نشان دادن این‌مطلب مرسوم است که به جای $f(x, y, z)$ بنویسند $f(P)$. ممکن‌است تابع f به پارامترهایی مانند زمان نیز بستگی داشته باشد.

مثال ۱. تابع اسکالر

$f(P)$ ، فاصلهٔ هرنقطهٔ P از یك نقطهٔ ثابت P_0 درفضا ، تابعی است اسکالر که D، قلمرو آن ، تمام فضاست. $f(P)$ درفضا یك میدان اسکالر تعریف می‌کند. اگـر یك دستگاه مختصات دکارتی را در نظر بگیریم و P_0 دارای مختصات x_0 ، y_0 ، z_0 باشد آنگاه f از فرمول معروف

$$f(P)=f(x, y, z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

به‌دست می‌آید که درآن x ، y ، z مختصات P هستند. چنانچه این دستگاه مختصات را با دستگاه مختصات‌دیگری‌عوض کنیم آنگاه‌مقادیرمختصات P و P_0 عموماً عوض می‌شوند ولی $f(P)$ همان مقدار قبلی را خواهد داشت. از این‌رو $f(P)$ تابعی است اسکالر. کسینوسهای هادی خطی که از P و P_0 می گذرد اسکالر نیستند زیرا مقادیر آنها بستگی به‌انتخاب دستگاه مختصات دارد.

مثال ۲. میدانهای اسکالر

T ، دمای داخل یك جسم B ، تابعی اسکالر است. این تابع یك‌میدان اسکالر یعنی میدان دما در B را تعریف می‌کند. تابع T ممکن است بـه زمان و یا پارامتر دیگری بستگی داشته باشد. مثالهای دیگری از میدان اسکالر عبارتند از فشار داخل ناحیه‌ای کـه سیال تراکم‌پذیری در آن جریان دارد، وچگالی هوای جو زمین. ▲

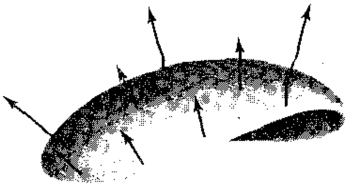
اگر به هر نقطهٔ P از مجموعهٔ معینی از نقاط فضا (مثلا نقاط یك منحنی، یك‌رویه، یا یك ناحیهٔ سه‌بعدی) برداری‌مانند $\mathbf{v}(P)$ مربوط شود، آنگاه گوییم یك **میدان برداری** در آن نقاط تعریف شده است و $\mathbf{v}(P)$ را یك **تابع برداری** می‌نامیم. چندمثال تشریحی در شکلهای ۱۴۶ تا ۱۴۹ نشان داده شده است.

با درنظر گرفتن مختصات دکارتی x ، y ، z می‌توان نوشت

$$\mathbf{v}(x, y, z)=v_1(x, y, z)\mathbf{i}+v_2(x, y, z)\mathbf{j}+v_3(x, y, z)\mathbf{k},$$

اما باید به‌خاطر داشت که $\mathbf{v}$ فقط به‌نقاط دامنهٔ تعریف خود بستگی دارد ودرهریك از این نقاط برداری تعریف می کندکه مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.

شکل ۱۴۶. میدان بردارهای مماس بر یك منحنی



شکل ۱۴۷. میدان بردارهای عمود بر یك رویه

مثال ۳. میدان برداری (میدان سرعت)

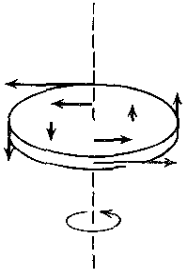
$\mathbf{v}(P)$ ، بردار سرعت یك جسم درحال دوران B در هر لحظه یك میدان برداری تشکیل می‌دهد که اصطلاحاً میدان‌سرعت دوران نامیده می‌شود. هر گاه یك‌دستگاه‌مختصات‌دکارتی انتخاب کنیم که مبدأ آن روی محور دوران باشد، آنگاه خواهیم داشت (ر.ك. مثال ۳ بخش ۸.۶)

$$\mathbf{v}(x\,,\,y\,,\,z)=\mathbf{w}\times(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}) \qquad (1)$$

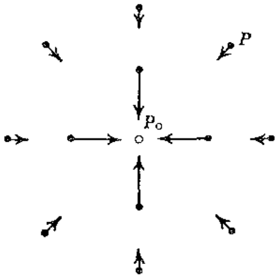
که درآن x ، y ، z مختصات نقطهٔ دلخواه P از B درلحظهٔ مورد نظر است . چنانچه مختصات طوری باشند که محور z ها محور دوران باشد و $\mathbf{w}$ درجهت مثبت محور z ها باشد آنگاه $\mathbf{w}=\omega\mathbf{k}$ و

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}=\omega(-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j})\,.$$

مثالی از یك جسم در حال دوران و میدان سرعت مربوط به آن در شکل ۱۴۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۴۸. میدان سرعت یك جسم در حال دوران



شکل ۱۴۹. میدان گرانشی

مثال ۴. میدان برداری (میدان نیرو)

فرض کنید ذرهٔ A به‌جرم M درنقطهٔ P_0 ثابت شده باشد و فرض کنید ذرهٔ B به‌جرم m بتواند در نقاط گوناگون P قرار گیرد، در این‌صورت A، B را جذب می‌کند. طبق **قانون گرانش نیوتون**، جهت نیروی گرانشی متناظر $\mathbf{p}$ از P بـه طرف P_0 و اندازهٔ آن متناسب با $1/r^2$ است که در آن r فاصلهٔ بین P و P_0 است، پس

$$c = GMm\,. \qquad |\mathbf{p}| = \frac{c}{r^2} \qquad (2)$$

دراینجا $G(=6{,}67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3/\mathrm{gm}\cdot\mathrm{sec}^2)$ ثابت گرانشی است. ازاین‌رو $\mathbf{p}$ یك میدان برداری درفضا تعریف می‌کند. هر گاه مختصات دکارتی را طوری انتخاب کنیم که P_0 دارای‌مختصات x_0، y_0، z_0، و P دارای‌مختصات x، y، z باشدآنگاه باتوجه به‌قضیهٔ فیثاغورس داریم

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \qquad (\geqslant 0)\,.$$

با فرض $r>0$ و معرفی بردار

$$\mathbf{r}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$$

داریم $r=|\mathbf{r}|$ و $-\mathbf{r}/r$ بردار یکه‌ای درجهت $\mathbf{p}$ است؛ علامت منفی دلالت بر آن دارد که جهت $\mathbf{p}$ از P به P_0 است (شکل ۱۴۹). با استفاده ازاین مطلب و (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{p}=|\mathbf{p}|\times\left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right)=-c\frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (3)$$

$$=-c\frac{x-x_0}{r^3}\mathbf{i}-c\frac{y-y_0}{r^3}\mathbf{j}-c\frac{z-z_0}{r^3}\mathbf{k}\,.$$

این تابع برداری آن نیروی گرانشی را که بر B اثر می‌کند توصیف می‌کند.

مسائل بخش ۸.۱

منحنیهای تراز $p(x,y)=$ **ثابت** (منحنیهای فشار ثابت یا **همفشار**) میدانهای فشار در صفحهٔ xy را که با توابع زیر داده شده‌اند معین کنید. تعدادی از منحنیهای همفشار را رسم کنید.

۱. $p=y$ ۲. $p=xy$ ۳. $p=x^2-y^2$

۴. $p=\ln(x^۲+y^۲)$ ۵. $p=\arc\tan\frac{y}{x}$ ۶. $p=e^x\cos y$

منحنیهای همدما (منحنیهای دمای ثابت T) ی میدانهای دمای زیر را بیابید.

۷. $T=x+y$ ۸. $T=x-y$ ۹. $T=x^۲+۴y^۲$

میدانهای اسکالر (میدان دمای) $T(x , y)=۳x^۲y-y^۳$ را درنظر می‌گیریم. پیدا کنید:

۱۰. دما درنقاط $(۱ , ۱)$ ، $(۲ , ۲-)$ ، $(۳ , ۴)$ را.

۱۱. ناحیه‌ای را که درآن $T>۰$. (این ناحیه را رسم کنید.)

۱۲. مقدار T روی‌خطوط $y=x$ و $y=-x$ را. (نمودار این‌دوتابع‌را رسم کنید.)

۱۳. فرمولی برای T بر دایرهٔ یکهٔ $x^۲+y^۲=۱$ را.

۱۴. شکل $T(x , y)$ را به‌صورت رویه‌ای درفضا.

سطوح تراز (سطوح ثابت $=f$) میدانهای اسکالر در فضا راکه با توابع زیر داده شده‌اند بیابید.

۱۵. $f=x+y+z$ ۱۶. $f=x+y$

۱۷. $f=x^۲+y^۲+z^۲$ ۱۸. $f=(x^۲+y^۲+z^۲)^{-۱}$

۱۹. $f=x^۲+y^۲-z$ ۲۰. $f=x^۲+۲y^۲+۴z^۲$

میدان فشاردرفضاراکه با تابع $p(x , y , z)=۳x^۲+y^۲+z^۲$ داده شده‌است درنظر می‌گیریم. پیدا کنید:

۲۱. سطوح تراز را. (بعضی از آنها را رسم کنید.)

۲۲. فرمولی راکه فشاربررویهٔ $xyz=۱$ از آن به‌دست آید.

۲۳. منحنیهای تراز درصفحهٔ $z=۱$ را. (برخی از آنها را رسم کنید.)

۲۴. ناحیه‌ای راکه در آن $۳\leqslant p(x , y , z)\leqslant ۱۲$.

شکل میدانهای برداریی راکه در صفحهٔ xy ، با توابع برداری $\mathbf{v}$ به صورت زیر داده شده‌اند، (مانند شکل ۱۴۹) رسم کنید.

۲۵. $\mathbf{v}=۲\mathbf{i}$ ۲۶. $\mathbf{v}=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}$

۲۷. $\mathbf{v}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ ۲۸. $\mathbf{v}=y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}$

۲۹. $\mathbf{v}=6xy\,\mathbf{i}+3(x^2-y^2)\,\mathbf{j}$ ۳۰. $\mathbf{v}=2x\,\mathbf{i}-2y\,\mathbf{j}$

در هریك از حالات زیر منحنیهایی را بیابید که بر آنها طول $\mathbf{v}$ ثابت است و همچنین منحنیهایی را بیابید که بر آنها جهت $\mathbf{v}$ ثابت است و آنها را رسم کنید.

۳۱. $\mathbf{v}=x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}$ ۳۲. $\mathbf{v}=(x^2-y^2)\,\mathbf{i}+2xy\,\mathbf{j}$

۳۳. $\mathbf{v}=y\,\mathbf{i}+x^2\,\mathbf{j}$ ۳۴. $\mathbf{v}=(x-y)\,\mathbf{i}+(x+y)\,\mathbf{j}$

۳۵. رویه‌هایی را بیابید که بر آنها $\mathbf{v}=3x\,\mathbf{i}+2z\,\mathbf{j}+y\,\mathbf{k}$ طولی ثابت داشته باشد.

۲.۸ حساب برداری

مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مانند همگرایی، پیوستگی و مشتق‌پذیری را می‌توان به‌طریقی ساده وطبیعی، به‌شرح زیر، وارد آنالیز برداری کرد.

دنباله‌ای نامتناهی از بردارهای $\mathbf{a}_{(n)}$، که در آن $n=1, 2, \ldots$، را **همگرا** نامند هر گاه برداری مانند $\mathbf{a}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty}|\mathbf{a}_{(n)}-\mathbf{a}|=0. \qquad (1)$$

$\mathbf{a}$ را **بردار حد** این دنباله نامند و می‌نویسند

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_{(n)}=\mathbf{a}. \qquad (2)$$

واضح است اگر یك دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنیم، آنگاه دنبالهٔ بردارها، وقتی وتنها وقتی به $\mathbf{a}$ همگراست که سه دنباله‌ای که از مؤلفه‌های بردارها تشکیل شده‌اند به‌مؤلفه‌های متناظر $\mathbf{a}$ همگرا باشند. اثبات این‌مطلب ساده است و به‌خواننده وا گذار می‌شود.

همین‌طور، تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ ازمتغیر حقیقی t وقتی t به‌سمت t_0 میل کند دارای **حد** $\mathbf{l}$ است اگر $\mathbf{u}(t)$ در یك همسایگی[1] از t_0 (احتمالاً جز درنقطهٔ t_0) تعریف شده‌باشد و

$$\lim_{t\to t_0}|\mathbf{u}(t)-\mathbf{l}|=0 \qquad (3)$$

آنگاه می‌نویسیم

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{u}(t)=\mathbf{l}. \qquad (4)$$

تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ را در $t=t_0$ **پیوسته** نامند هر گاه این تابع در یك همسایگی

---

۱. یعنی، در فاصله‌ای برمحور t که t_0 یك نقطهٔ داخلی آن است.

از $t_{\circ}$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{t\to t_{\circ}} \mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(t_{\circ}) \,. \qquad (۵)$$

اگر یك دستگاه مختصات دکارتی داشته باشیم، می‌توانیم $\mathbf{u}(t)$ را به صورت زیر نمایش دهیم :

$$\mathbf{u}(t)=u_{۱}(t)\,\mathbf{i}+u_{۲}(t)\,\mathbf{j}+u_{۳}(t)\,\mathbf{k}\,.$$

بدین‌ترتیب $\mathbf{u}(t)$ در $t_{\circ}$ پیوسته است اگر وتنها اگر هرسه مؤلفهٔ آن در $t_{\circ}$ پیوسته‌باشند.

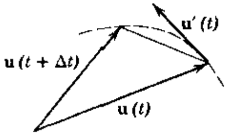
تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ درنقطهٔ t **مشتقپذیر** است اگر حد

$$\mathbf{u}'(t)=\lim_{\Delta t\to \circ}\frac{\mathbf{u}(t+\Delta t)-\mathbf{u}(t)}{\Delta t} \qquad (۶)$$

موجود باشد. بردار $\mathbf{u}'(t)$ را **مشتق** $\mathbf{u}(t)$ نامند. شکل ۱۵۰ را ببینید. (در این شکل منحنی خط‌چین مکان‌هندسی انتهای پیکانهای نمایش دهندهٔ $\mathbf{u}$ ، به‌ازای مقادیرمتغیر مستقل در فاصله‌ای شامل t و $t+\Delta t$ است.)

در یك دستگاه مختصات دکارتی، $\mathbf{u}(t)$ در t مشتقپذیر است اگر و تنها اگر هرسه مؤلفهٔ آن در t مشتقپذیر باشند؛ یعنی اگر وتنها اگر مشتقات

$$u_m'(t)=\lim_{\Delta t\to \circ}\frac{u_m(t+\Delta t)-u_m(t)}{\Delta t} \qquad (m=۱\,,\,۲\,,\,۳)$$



شکل ۱۵۰. مشتق یك تابع برداری

موجود باشند. در این‌صورت داریم

$$\mathbf{u}'(t)=u'_{۱}(t)\,\mathbf{i}+u'_{۲}(t)\,\mathbf{j}+u'_{۳}(t)\,\mathbf{k}\,; \qquad (۷)$$

یعنی، برای مشتق‌گیری از یك تابع برداری‌کافی است از مؤلفه‌های آن به‌طور مجزا مشتق بگیریم.

قواعد آشنای مشتقگیری، قواعد مشابهی برای مشتقگیری توابع برداری به دست می‌دهند، مثلا

$$(c\,\mathbf{u})'=c\,\mathbf{u}' \;(\text{ثابت } c)\,, \qquad (\mathbf{u}+\mathbf{v})'=\mathbf{u}'+\mathbf{v}'$$

و به‌ویژه

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})'=\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' \tag{۸}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'=\mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}' \tag{۹}$$

$$(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w})'=(\mathbf{u}'\mathbf{v}\mathbf{w})+(\mathbf{u}\mathbf{v}'\mathbf{w})+(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}') . \tag{۱۰}$$

اثبات این روابط ساده است و به‌خواننده واگذار می‌شود. در (۹)، ترتیب بردارها باید کاملا مراعات شود زیرا ضرب برداری دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

مثال ۱. مشتق یك تابع برداری که طولش ثابت است

فرض کنید $\mathbf{u}(t)$ تابعی برداری باشد که طول آن ثابت‌است، $|\mathbf{u}(t)|=c$. دراین‌صورت داریم $|\mathbf{u}|^{۲}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=c^{۲}$ و پس از مشتقگیری آن [ر. ك. (۸)] خواهیم داشت $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})'=۲\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'=۰$. بدین‌ترتیب نتیجه‌می گیریم که‌مشتق تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ که‌طول آن ثابت است، صفر ویا بر $\mathbf{u}(t)$ عمود است. ▲

کاربردهای مهم مشتق در بخشهای بعدی مورد بحث قرار می گیرند.

باتوجه به‌بحثهای‌فوق‌روش تعریف مشتقات‌جزئی درآنالیز برداری‌آشکارمی گردد. فرض کنید مؤلفه‌های تابع برداری

$$\mathbf{u}=u_{۱}\,\mathbf{i}+u_{۲}\,\mathbf{j}+u_{۳}\,\mathbf{k}$$

توابع مشتقپذیری از n متغیر $t_{۱}$، . . . ، t_n باشند. دراین‌صورت **مشتق جزئی** $\mathbf{u}$ نسبت به t_l با $\partial\mathbf{u}/\partial t_l$ نشان داده می‌شود و به‌صورت تابع برداری زیر تعریف می گردد:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t_l}=\frac{\partial u_{۱}}{\partial t_l}\mathbf{i}+\frac{\partial u_{۲}}{\partial t_l}\mathbf{j}+\frac{\partial u_{۳}}{\partial t_l}\mathbf{k}\,.$$

و همین‌طور

$$\frac{\partial^{۲}\mathbf{u}}{\partial t_l\partial t_m}=\frac{\partial^{۲}u_{۱}}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{i}+\frac{\partial^{۲}u_{۲}}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{j}+\frac{\partial^{۲}u_{۳}}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{k}\,,$$

والی آخر.

مثال ۲. مشتقات جزئی

فرض می کنیم $\mathbf{r}(t_{۱}\,,\,t_{۲})=a\cos t_{۱}\,\mathbf{i}+a\sin t_{۱}\,\mathbf{j}+t_{۲}\,\mathbf{k}$. آنگاه

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t_{۱}}=-a\sin t_{۱}\,\mathbf{i}+a\cos t_{۱}\mathbf{j}\,,\qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t_{۲}}=\mathbf{k}\,.$$

توجه کنید که هر گاه $\mathbf{r}(t_1, t_2)$ به‌عنوان بردارمکان تعبیر شودآنگاه این‌بردار استوانهٔ دواری‌به‌شعاع a را نمایش می‌دهد که محور دوران‌آن محور y ها است. (نمایش‌رویه‌ها دربخش ۵.۹ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.)

مسائل‌بخش ۸.۲

مطلوب است $\mathbf{u}'$ ، $|\mathbf{u}'|$ ، $\mathbf{u}''$ ، $|\mathbf{u}''|$ هر گاه $\mathbf{u}$ برابر باشد با

.۱ $\mathbf{a}+\mathbf{b}t$.۲ $t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}$

.۳ $\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$.۴ $\cos t\,\mathbf{i}+4\sin t\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$

.۵ $t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+t^3\,\mathbf{k}$.۶ $2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$

.۷ $e^t\,\mathbf{i}+e^{-t}\,\mathbf{j}$.۸ $e^{-t}(\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j})$

.۹ $\sin 3t\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

فرض‌کنید $\mathbf{u}=t\,\mathbf{i}+2t^2\,\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v}=t^3\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{w}=\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}+t^2\,\mathbf{k}$. مطلوب‌است محاسبهٔ

.۱۰ $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})'$.۱۱ $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'$.۱۲ $(\mathbf{uvw})'$

.۱۳ $[(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}]'$.۱۴ $[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})]'$.۱۵ $[(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}]'$

در هر یك از مسائل زیر مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به x ، y ، z را بیابید.

.۱۶ $x\,\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}$.۱۷ $(x^2-y^2)\,\mathbf{i}+2xy\,\mathbf{j}$

.۱۸ $x^2\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$.۱۹ $yz\,\mathbf{i}+zx\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k}$

.۲۰ $(x+y)\,\mathbf{j}+(x-y)\,\mathbf{k}$.۲۱ $x^2y\,\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+z^2x\,\mathbf{k}$

۲۲. با استفاده از فرمول (۸) بخش ۵.۶ رابطهٔ (۸) را ثابت‌کنید. (۹) را ثابت کنید.

۲۳. با استفاده از (۸) و (۹) رابطهٔ (۱۰) را به‌دست آورید.

۲۴. (۱۰) را مستقیماً ثابت کنید.

۲۵. فرمولهایی شبیه (۸) و (۹) برای $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})''$ و $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})''$ بیابید.

۲۶. نشان‌دهید که‌هر گاه $\mathbf{u}(t)$ برداری‌یکه‌باشدو $\mathbf{u}'(t)\neq 0$ ، آنگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{u}'$ متعامدند.

۲۷. نشان دهید که معادلهٔ $\mathbf{u}'(t)=\mathbf{c}$ دارای جواب $\mathbf{u}(t)=\mathbf{c}t+\mathbf{b}$ است که درآن $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی هستند.

۲۸. نشان دهید که $\mathbf{u}(t)=\mathbf{b}\,e^{\lambda t}+\mathbf{c}\,e^{-\lambda t}$ در معادلهٔ $\mathbf{u}''-\lambda^2\mathbf{u}=0$ صدق می‌کند. ($\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی ثابتند.)

۲۹. نشان دهید که

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right)'=\frac{\mathbf{u}'(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})-\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{3/2}}$$

۳۰. از $(t\,\mathbf{i}+t^2\mathbf{j})/|t\,\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}|$ مشتق بگیرید.

۳.۸ منحنیها

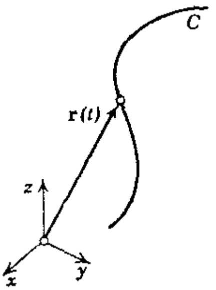
حال به‌عنوان کاربردی مهم از حساب برداری، به بررسی چند مطلب اساسی درمورد منحنیهای فضایی می‌پردازیم. دانشجو پی‌خواهد برد که منحنیها در بسیاری ازمباحث حساب دیفرانسیل وانتگرال وهمین‌طور درفیزیك، مثلا درمسائل مربوط به‌مسیرحرکت ذرات، مطرح می‌شوند. بررسی ما بخشی ازیك شاخهٔ مهم ریاضیات موسوم به **هندسهٔ دیفرانسیل** را تشکیل می‌دهد که می‌توان آن را مطالعهٔ منحنیها و سطوح به‌وسیلهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف کرد. به‌مرجع [C8] ضمیمهٔ ۱ مراجعه کنید.

دریك دستگاه مختصات دکارتی مفروض، منحنی C رامی‌توان به‌صورت تابع برداری

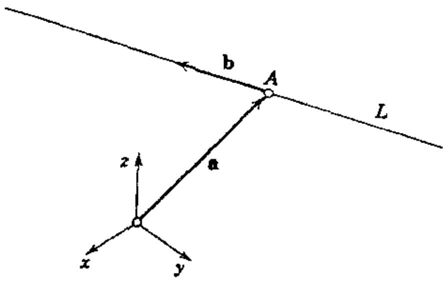
$$\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

نمایش داد (شکل ۱۵۱)؛ به هرمقدار t_0 از متغیر حقیقی t نقطه‌ای از C با بردار مکان $\mathbf{r}(t_0)$، یعنی با مختصات $x(t_0)$، $y(t_0)$، $z(t_0)$ مربوط می‌شود.

نمایشی‌ازنوع (۱) را **نمایش پارامتری** منحنی C و t را پارامتر این نمایش‌نامند. این‌نوع نمایش دربسیاری‌کاربردها، مثلا درمکانیك که درآنجا متغیر t می‌تواندزمان باشد، مفید است.



شکل ۱۵۱. نمایش پارامتری یك منحنی



شکل ۱۵۲. نمایش پارامتری یك‌خط راست

انواع دیگر نمایش منحنیها درفضا عبارتند از

$$y=f(x), \qquad z=g(x) \tag{۲}$$

و

$$F(x,y,z)=0, \qquad G(x,y,z)=0. \tag{۳}$$

باقرار دادن $x=t$ می‌توانیم (۲) را به‌صورت (۱) بنویسیم:

$$\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+f(t)\,\mathbf{j}+g(t)\,\mathbf{k}.$$

در (۳)، هرمعادله یك رویه را نمایش می‌دهد، ومنحنی فصل مشترك این دو رویه است.

منحنی صفحه‌ای منحنیی است که در صفحه‌ای درفضا قراردارد. منحنیی که منحنی صفحه‌ای نباشد **منحنی تابدار** نامیده می‌شود.

مثال ۱. خط راست

هرخط راست L را می‌توان به‌صورت زیرنمایش داد:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}=(a_1+tb_1)\,\mathbf{i}+(a_2+tb_2)\,\mathbf{j}+(a_3+tb_3)\,\mathbf{k} \tag{۴}$$

که درآن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی‌هستند. L ازنقطهٔ A، با بردار مکان $\mathbf{r}=\mathbf{a}$، می‌گذرد و با $\mathbf{b}$ همجهت است (شکل ۱۵۲). هرگاه $\mathbf{b}$ برداری یکه باشد آنگاه مؤلفه‌های آن کسینوسهای هادی L هستند، و دراین‌حالت $|t|$ برابر با فاصلهٔ نقاط L ازنقطهٔ A است.

مثال ۲. بیضی، دایره

تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+b\sin t\,\mathbf{j} \tag{۵}$$

نمایش‌بیضیی درصفحهٔ xy است که مرکزآن برمبدأ مختصات قرارداد ومحورهای اصلی آن درامتداد محورهای x و y هستند. درواقع، چون $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ ، از (۵) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=0.$$

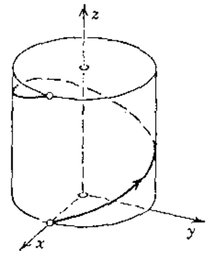
هرگاه $b=a$ ، آنگاه (۵) نمایش دایره‌ای به‌شعاع a است.

مثال ۳. مارپیچ مستدیر

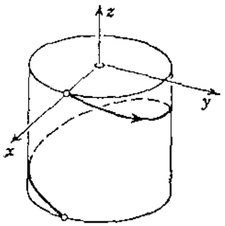
منحنی تابدار C راکه با تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+ct\,\mathbf{k} \qquad (c\neq 0) \tag{۶}$$

نمایش‌داده شده است مارپیچ مستدیر می‌نامند. این‌منحنی بر استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ واقع است. هرگاه $c>0$، آنگاه منحنی به شکل یك پیچ راستگرد (شکل ۱۵۳) وهرگاه $c<0$ به شکل یك پیچ چپگرد است (شکل ۱۵۴). ▲



شکل ۱۵۳. مارپیچ مستدیر راستگرد



شکل ۱۵۴. مارپیچ مستدیر چپگرد

بخشی ازمنحنی را، که بین‌دونقطهٔ دلخواه ازآن واقع است، اغلب **قوسی** ازمنحنی می‌نامند. ما برای سادگی کلمهٔ «منحنی» را هم به‌یك منحنی‌کامل وهم به‌قوسی ازیك منحنی، اطلاق می‌کنیم.

یك منحنی ممکن است خودش را قطع کند، نقاط تقاطع را نقاط چند گانهٔ منحنی می‌نامند. دونمونه ازاین نقاط درشکل۱۵۵ نشان داده شده است. منحنی بدون نقاط چند‌گانه را **منحنی ساده** می‌نامند.

مثال ۴. منحنیهای ساده و غیرساده

بیضی ومارپیچ منحنیهای ساده هستند. منحنیی که به‌صورت

$$\mathbf{r}(t)=(t^2-1)\,\mathbf{i}+(t^3-t)\,\mathbf{j}$$

نمایش‌داده می‌شود ساده نیست چون دارای نقطه‌ای دو گانه درمبدأ است؛ این‌نقطه متناظر با دومقدار $t=1$ و $t=-1$ است. ▲

درپایان متذکر می‌شویم که منحنی مفروض C را می‌توان با توابع برداری مختلفی نمایش‌داد. مثلا چنانچه C با (۱) نمایش داده شده باشد وقرار دهیم $t=h(t^*)$، آنگاه تابع برداری جدیدی مانند $\mathbf{r}(t^*)=\mathbf{r}(h(t^*))$ برای نمایش C به‌دست می‌آوریم، مشروط براینکه $h(t^*)$ تمام مقادیر t در (۱) را اتخاذ کند.

مثال ۵. تغییر پارامتر

سهمی $y=x^2$ درصفحه xy را می‌توان با تابع برداری زیر نمایش داد:

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j} \qquad (-\infty<t<\infty)$$

چنانچه قراردهیم $t=-۲t^*$، نمایش دیگری ازسهمی به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{r}(t^*)=\mathbf{r}(-۲t^*)=-۲t^*\mathbf{i}+۴t^{*۲}\mathbf{j}.$$

اگرقراردهیم $t=t^{*۲}$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{r}(t^*)=t^{*۲}\mathbf{i}+t^{*۴}\mathbf{j},$$

اما این تابع فقط نمایش دهندهٔ قسمتی از سهمی است که در ربع اول واقع است، زیرا t^* هرچه باشد داریم $t^{*۲}\geqslant ۰$.

شکل ۱۵۵. منحنیهایی که نقاط دوگانه دارند

مسائل بخش ۳.۸

نمایشی پارامتری برای خط راستی که از A می‌گذرد و درامتداد بردار $\mathbf{b}$ است بیابید در صورتی که داشته باشیم

۱. $A:(۰,۰,۰)\quad \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۲. $A:(۱,۳,۲)\quad \mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{k}$

۳. $A:(۲,۱,۰)\quad \mathbf{b}=۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۴. $A:(۰,۴,۱)\quad \mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

نمایشی پارامتری برای خطوط راستی که از A و B می‌گذرند در هریک از حالات زیر بیابید.

۵. $A:(۰,۰,۰),\ B:(۱,۱,۱)$

۶. $A:(-۱,۸,۳),\ B:(۱,۰,۰)$

۷. $A:(۱,۵,۳),\quad B:(۰,۲,-۱)$

۸. $A:(۱,۴,۲),\quad B:(۱,۴,-۲)$

نمایشی پارامتری برای خطوط راستی که به‌شکل زیرنمایش داده شده‌اند بیابید

۹. $y=x,\quad z=۰$

۱۰. $۷x-۳y+z=۱۴,\quad ۴x-۳y-۲z=-۱$

۱۱. $x+y=0,\quad x-z=0$ ۱۲. $x+y+z=1,\quad y-z=0$

منحنیهای زیر را به‌صورت پارامتری بنویسید وسپس آنها را رسم کنید.

۱۳. $x^2+y^2=1,\quad z=0$ ۱۴. $y=x^4,\quad z=0$

۱۵. $y=x^2,\quad z=x^3$

۱۶. $x^2+y^2-2x-4y=-1,\ z=0$

۱۷. $4(x+1)^2+y^2=4,\ z=0$ ۱۸. $x^2+y^2=4,\ z=e^x$

۱۹. تصاویر قائم مارپیچ مستدیر (۶) را برصفحات مختصات بیابید.

نمودار منحنیهایی را رسم کنید که با توابع برداری $\mathbf{r}(t)$ ی زیر نمایش داده شده‌اند.

۲۰. $t\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}-t\,\mathbf{k}$ ۲۱. $2\sin t\,\mathbf{i}+2\cos t\,\mathbf{j}$

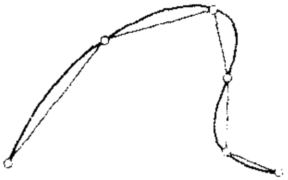
۲۲. $(1+\cos t)\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$ ۲۳. $\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}$

۲۴. $\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ ۲۵. $t\,\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\,\mathbf{k}$

۴۰۸ طول قوس

طول منحنی سادهٔ C را به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم. مطابق شکل ۱۵۶، خط شکسته‌ای را که از n وتر تشکیل شده‌است در C طوری محاط می‌کنیم که دونقطهٔ انتهایی C را به‌هم وصل کند. این عمل را به ازای هرعدد صحیح مثبت n به روشی دلخواه انجام می‌دهیم و تنها این شرط را رعایت می‌کنیم که ماکزیمم طول وترها وقتی n به‌سمت بینهایت میل می‌کند به‌سمت صفر میل کند. طول این وترها را می‌توان ازقضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورد. چنانچه دنبالهٔ این طولها که آن را با l_1 , l_2 , . . . نشان می‌دهیم همگرا بوده و حد آن l باشد آنگاه C را **راستی‌پذیر** و l را **طول** C می‌نامند.

چنانچه C ساده نباشد ولی متشکل از تعدادی متناهی منحنی سادهٔ راستی‌پذیر باشد، طول C به‌صورت مجموع طولهای این منحنیها تعریف می‌شود.



شکل ۱۵۶. طول منحنی

هرگاه بتوان C را با تابع برداری پیوسته مشتق‌پذیری[1] چون

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

نمایش داد آنگاه می‌توان نشان داد که C راستی‌پذیر است و طول آن، l، از انتگرال

$$l=\int_a^b\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}\,dt \qquad \left(\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right), \tag{۱}$$

به‌دست می‌آید، که مقدار آن مستقل از انتخاب نمایش پارامتری است. اثبات کاملا شبیه اثبات مربوط به منحنیهای صفحه‌ای است که معمولا در حساب انتگرال مقدماتی بررسی می‌شود (ر. ک. مرجع [A۱۴]) و درمرجع [C۸] ضمیمهٔ ۱ یافت می‌شود.

چنانچه در (۱) حدبالایی ثابت انتگرال، یعنی b، را با حد بالایی متغیر t عوض کنیم، انتگرال به تابعی از t، مثلا $s(t)$، بدل خواهد شد؛ اگر متغیر انتگرالگیری را با t^* نشان دهیم خواهیم داشت

$$s(t)=\int_a^t\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}\,dt^* \qquad \left(\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt^*}\right). \tag{۲}$$

تابع $s(t)$ تابع طول قوس یا، به‌عبارت ساده‌تر، **طول قوس** C نام دارد.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که از نقطه نظرهندسی، طول قوس $s(t_\circ)$، به‌ازای مقدار مشخص $t=t_\circ\geqslant a$، طول قسمتی از C است که بین نقاط متناظر با $t=a$ و $t=t_\circ$ قراردارد. به‌ازای $t=t_\circ<a$ داریم $s(t_\circ)<\circ$ وطول‌قوس برابر $-s(t_\circ)$ است.

طول قوس s را می‌توان به‌عنوان پارامتر درنمایش پارامتری منحنیها به کار گرفت. خواهیم دید که این امر سبب ساده‌تر شدن فرمولهای متعددی می‌شود.

ثابت a در (۲) را می‌توان با ثابت دیگری عوض کرد؛ یعنی، نقطه‌ای از منحنی راکه با $s=\circ$ متناظر است می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد. جهت متناظر باافزایش مقادیر s را **جهت مثبت** روی C نامند؛ بدین طریق هر نمایش $\mathbf{r}(s)$ یا $\mathbf{r}(t)$ از C **جهت** خاصی برای C تعیین می‌کند. واضح است که دو امکان برای نسبت دادن جهت به C موجوداست، ودریافتن این نکته که انتقال ازیك جهت به‌جهت مخالف با تبدیل پارامتری که مشتقش منفی است، حاصل می‌شود نیز مشکل نیست.

از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{۳}$$

---

۱. «پیوسته مشتقپذیر» به این معنی است که مشتق موجود و پیوسته است؛ «دو بار پیوسته مشتقپذیر» یعنی مشتقهای اول ودوم موجود وپیوسته‌اند، والی آخر.

مرسوم است که بنویسند

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

و

$$ds^{2} = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}. \qquad (4)$$

ds را **عنصر خطی** C می‌نامند.

مثال ۱. دایره. طول قوس به‌عنوان پارامتر

درمورد دایرهٔ

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$$

داریم $\dot{\mathbf{r}} = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ و $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = a^{2}$، بنابراین

$$s(t) = \int_{a}^{t} a\,dt^{*} = at\,.$$

از این‌رو $t(s) = s/a$ ونمایش دایره وقتی‌که طول قوس s را به‌عنوان پارامترانتخاب کنیم عبارت است از

$$\mathbf{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\frac{s}{a}\,\mathbf{i} + a\sin\frac{s}{a}\,\mathbf{j}\,.$$

دایره درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، که متناظر با جهت افزایش مقادیر s است جهت‌دارشده است. با قراردادن $\tilde{s} = -s$ وبا توجه به اینکه $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ و $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{r}\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right) = \alpha\cos\frac{\tilde{s}}{a}\,\mathbf{i} - a\sin\frac{\tilde{s}}{a}\,\mathbf{j}\,;$$

داریم $ds/d\tilde{s} = -1 < 0$، واینك دایره درجهت حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است.

مسائل بخش ۴.۸

منحنیهای زیر را رسم‌کنید وطول آنها را بیابید

۱. منحنی زنجیری $y = \cosh x$، $z = 0$، از $x = 0$ تا $x = 1$

۲. مارپیچ مستدیر $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$ از $(a, 0, 0)$ تا $(a, 0, 2\pi c)$

۳. سهمی نیم‌مکعبی $y = x^{3/2}$، $z = 0$ از $(0, 0, 0)$ تا $(4, 8, 0)$

۴. درونچرخزاد چهار گوش $\mathbf{r}(t)=a\cos^3 t\,\mathbf{i}+a\sin^3 t\,\mathbf{j}$ ، طول قوس کامل

۵. گسترندهٔ دایره $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\,\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\,\mathbf{j}$ از $(1,0,0)$ تا $(-1,\pi,0)$.

۶. $\mathbf{r}(t)=e^t\cos t\,\mathbf{i}+e^t\sin t\,\mathbf{j}$ ، $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$

۷. چنانچه یك منحنی صفحه‌ای را با $y=f(x)$ ، $z=0$ نمایش دهیم، با استفاده‌از (۱) نشان دهیدطول قسمتی از این منحنی که بین $x=a$ و $x=b$ قرار داردعبارت است از

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

۸. با استفاده از فرمول مسئلهٔ ۷، محیط دایره‌ای به‌شعاع a را بیابید.

۹. نشان دهید که اگر یك منحنی صفحه‌ای در مختصات قطبی $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=\arctan(y/x)$ نمایش داده شود آنگاه $ds^2=\rho^2 d\theta^2+d\rho^2$.

با استفاده از فرمولی که درمسئلهٔ ۹ دیدیم، طول منحنیهای زیر را بیابید.

۱۰. دایره‌ای به‌شعاع a ، طول کامل

۱۱. $\rho=e^\theta$ ، $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

۱۲. $\rho=\theta^2$ ، $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$

۱۳. دلوار $\rho=a(1-\cos\theta)$. (نمودار این منحنی را رسم کنید.)

۱۴. $\rho=1+\cos\theta$ ، $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$

۱۵. اگر یك منحنی به‌طریق پارامتری نمایش داده شده باشد، نشان دهید تبدیل پارامتری که مشتق آن منفی باشد جهتگیری را معکوس می‌کند.

۵.۸ مماس. انحنا و تاب

مماس برمنحنی C درنقطهٔ P از C عبارت است از وضع حدی خط راست L ، که از P و نقطهٔ دیگری مانند Q از C می‌گذرد ، وقتی‌که Q درطول منحنی به‌سمت P میل کند (شکل ۱۵۷).

فرض کنید که C با تابع برداری پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{r}(t)$، که درآن t یك پارامتر است، نمایش داده شده باشد. فرض کنید P و Q به‌ترتیب متناظر با t و $t+\Delta t$ باشند. دراین صورت L با بردار

$$[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]/\Delta t$$

هم‌امتداد است. بدین ترتیب، هرگاه بردار

$$\dot{\mathbf{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} \qquad (۱)$$

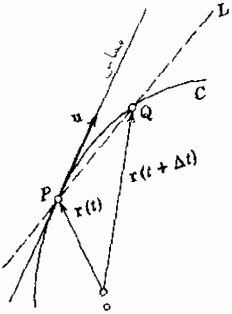
بردار صفر نباشد هم‌امتداد با مماس بر C در P خواهد بود. سوی این بردار همان‌سوی افزایش مقادیر t است، و بنابراین جهت‌آن بستگی به جهتگیری منحنی دارد. $\dot{\mathbf{r}}$ را بردار مماس بر C درنقطهٔ P وبردار یکهٔ متناظر با آن یعنی

$$\mathbf{u}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \qquad (۲)$$

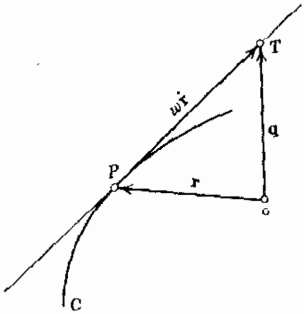
را **بردار یکهٔ مماس** بر C درنقطهٔ P می‌نامند.

به‌خصوص اگر C را با $\mathbf{r}(s)$. که درآن s طول قوس است ، نمایش دهیم ، از رابطهٔ (۳) بخش ۴.۸ نتیجه می‌شود که مشتق $d\mathbf{r}/ds$ برداری یکه است و (۲) چنین می‌شود:

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}'=\frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad (۳)$$



شکل ۱۵۷. مماس برمنحنی



شکل ۱۵۸. نمایش مماس برمنحنی

واضح است که بردار مکان نقطهٔ T از مماس برابر است با مجموع بردار مکان $\mathbf{r}$ نقطهٔ P و برداری در جهت مماس. ازاین‌رو نمایش پارامتری مماس عبارت است از (شکل ۱۵۸)

$$\mathbf{q}(w)=\mathbf{r}+w\dot{\mathbf{r}} \qquad (۴)$$

که درآن $\mathbf{r}$ و $\dot{\mathbf{r}}$ هردو به P بستگی دارند و w متغیری حقیقی است.

منحنی مفروض C را که با تابع برداری سه‌بار پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{r}(s)$ نمایش‌داده شده است درنظر می‌گیریم، s طول قوس است. دراین صورت

$$\kappa(s)=|\mathbf{u}'(s)|=|\mathbf{r}''(s)| \qquad (\kappa\geqslant 0) \tag{۵}$$

را انحنای C می‌نامند. چنانچه $\kappa\neq 0$، آنگاه بردار یکهٔ $\mathbf{p}$ درجهت $\mathbf{u}'(s)$ عبارت است از

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{u}'}{\kappa} \qquad (\kappa>0) \tag{۶}$$

که آن را **بردار قائم اصلی یکهٔ** C می‌نامند. از مثال ۱ بخش ۲.۸ می‌دانیم‌که $\mathbf{p}$ بر $\mathbf{u}$ عمود است. بردار

$$\mathbf{b}=\mathbf{u}\times\mathbf{p} \qquad (\kappa>0) \tag{۷}$$

را بردار **قائم دوم یکهٔ** C می‌نامند. از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود که $\mathbf{u}$، $\mathbf{p}$، $\mathbf{b}$ دستگاه راستگرد سه گانه‌ای از بردارهای یکهٔ متعامد تشکیل می‌دهند (بخشهای ۳.۶ و ۷.۶). این دستگاه سه گانه را **سه‌وجهی** C در نقطهٔ مورد نظر می‌نامند (شکل ۱۵۹). سه خط راستی که در امتداد $\mathbf{u}$، $\mathbf{p}$ و $\mathbf{b}$ از نقطهٔ مورد نظر می‌گذرند به ترتیب **مماس**، **قائم اصلی**، **قائم دوم** C نامیده می‌شوند. درشکل ۱۵۹ همچنین نامهای سه‌صفحه‌ای که به‌وسیلهٔ دوبه‌دوی این بردارها تولید شده‌اند، نوشته شده‌اند.

هرگاه $\mathbf{b}'$، مشتق $\mathbf{b}$، بردار صفر نباشد، بر $\mathbf{b}$ عمود است (ر. ك. مثال ۱ بخش ۲.۸). $\mathbf{b}'$ بر $\mathbf{u}$ نیز عمود است. در واقع با مشتقگیری از $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}=0$ داریم $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{u}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}'=0$؛ از این‌رو $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{u}=0$ زیرا $\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}'=0$. درنتیجه $\mathbf{b}'$ به صورت $\mathbf{b}'=\alpha\mathbf{p}$ است که در آن α اسکالر است. معمولا فرض می‌کنند $\alpha=-\tau$. در این صورت

$$\mathbf{b}'=-\tau\mathbf{p} \qquad (\kappa>0). \tag{۸}$$

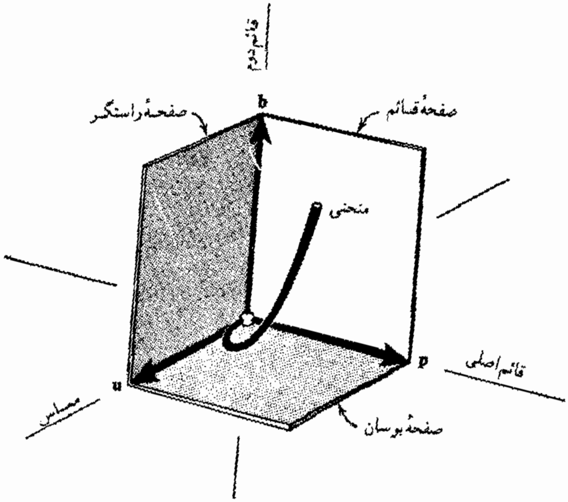
تابع اسکالر τ را **تاب** C می‌نامند. ضرب اسکالر طرفین (۸) در $\mathbf{p}$ نتیجه می‌دهد

$$\tau(s)=-\mathbf{p}(s)\cdot\mathbf{b}'(s). \tag{۹}$$

مطالبی که در این بخش دیدیم در نظریه وکاربرد منحنیها از مفاهیم اساسی هستند. حال با ارائهٔ یك مثال نوعی این مطالب را شرح می‌دهیم. کاربردهای بیشتر را به بعد موکول می‌کنیم.

مثال ۱. مارپیچ مستدیر

درمورد مارپیچ مستدیر (۶)، بخش ۳.۸، طول قوس عبارت است از $s=t\sqrt{a^2+c^2}$. از این‌رو مارپیچ را می‌توان به‌صورت



شکل ۱۵۹. سه‌وجهی

$\mathbf{r}(s)=a\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{i}+a\sin\frac{s}{K}\,\mathbf{j}+c\,\frac{s}{K}\,\mathbf{k}$ نمایش داد که در آن $K=\sqrt{a^2+c^2}$.

در نتیجه

$$\mathbf{u}(s)=\mathbf{r}'(s)=-\frac{a}{K}\sin\frac{s}{K}\,\mathbf{i}+\frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{j}+\frac{c}{K}\,\mathbf{k}$$

$$r''(s)=-\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{i}-\frac{a}{K^2}\sin\frac{s}{K}\,\mathbf{j}$$

$$\kappa=|\mathbf{r}''|=\sqrt{\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}''}=\frac{a}{K^2}=\frac{a}{s^2+c^2}$$

$$\mathbf{p}(s)=\frac{\mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)}=-\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{i}-\sin\frac{s}{K}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b}(s)=\mathbf{u}(s)\times\mathbf{p}(s)=\frac{c}{K}\sin\frac{s}{K}\,\mathbf{i}-\frac{c}{K}\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{j}+\frac{a}{K}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}'(s)=\frac{c}{K^2}\cos\frac{s}{K}\,\mathbf{i}+\frac{c}{K^2}\sin\frac{s}{K}$$

$$\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) = \frac{c}{K^۲} = \frac{c}{a^۲ + c^۲}$$

پس مارپیچ مستدیر دارای انحنا و تاب ثابت است. هرگاه $c > ۰$ (مارپیچ راستگرد، ر. ك. شکل ۱۵۳)، آنگاه $\tau > ۰$ وهرگاه $c < ۰$ (مارپیچ چپگرد، ر. ك. شکل ۱۵۴)، آنگاه $\tau < ۰$. ▲

چون **u** ، **p** و **b** بردارهای مستقل خطی هستند، هربرداری از فضا را می‌توان به صورت ترکیبی خطی ازاین‌بردارها نوشت. بنابراین اگر مشتقات $\mathbf{u}'$ ، $\mathbf{p}'$ و $\mathbf{b}'$ وجود داشته باشند می‌توان آنها را نیز به‌همین طریق نمایش داد. فرمولهای مربوطه عبارتند از

(الف) $\mathbf{u}' = \kappa\,\mathbf{p}$

(ب) $\mathbf{p}' = -\kappa\,\mathbf{u} + \tau\,\mathbf{b}$ (۱۰)

(پ) $\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{p}$

این فرمولها را **فرمولهای فرنه** می‌نامند. (۱۰ الف) از (۶) نتیجه می‌شود، و (۱۰ پ) همان (۸) است. برای رسیدن به (۱۰ ب) با توجه به‌تعریف ضرب برداری داریم

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{p} \times \mathbf{u} = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{p} = -\mathbf{u}.$$

با مشتقگیری از فرمول اول و با استفاده از (۱۰ الف) و (۱۰ پ) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{p}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \times \mathbf{u}' = -\tau\,\mathbf{p} \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \times \kappa\,\mathbf{p} = -\tau(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{u}),$$

وبدین ترتیب (۱۰ ب) اثبات می‌شود.

مسائل بخش ۵۰۸

نمایشی پارامتری برای مماس برمنحنیهای زیردرنقطهٔ مفروض P بیابید.

۱. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, \quad P: (-۱/\sqrt{۲}, ۱/\sqrt{۲})$

۲. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^۲\mathbf{j} + t^۳\mathbf{k}, \quad P: (۱, ۱, ۱)$

۳. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + ۲t\,\mathbf{k}, \quad P: (۱, ۰, ۴\pi)$

۴. $\mathbf{r}(t) = ۳\cos t\,\mathbf{i} + ۴\sin t\,\mathbf{j}, \quad P: (۲\sqrt{۲}, -۲\sqrt{۲}, ۰)$

۵. درمثال ۱ نشان دهیدکه زاویهٔ بین **u** ومحور z ها ثابت است.

۶. نشان دهید خطوط راست تنها منحنیهایی هستندکه بردار یکهٔ مماس آنها ثابت است.

۷. نشان دهید که انحنای خط راست متحد با صفر است.

۸. نشان دهید که اگرمنحنی C را با $\mathbf{r}(t)$ که درآن t پارامتر دلخواهی است، نمایش دهیم، آنگاه انحنا عبارت است از

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})-(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^{2}}}{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})^{3/2}} \qquad (5')$$

۹. نشان دهید که انحنای دایره‌ای به‌شعاع a برابر $1/a$ است.

۱۰. انحنای بیضی $\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+b\sin t\,\mathbf{j}$ را بیابید.

۱۱. با استفاده‌از $(5')$ نشان دهید درمورد منحنی $y=y(x)$ واقع درصفحه xy داریم

$$\kappa = |y''|/(1+y'^{2})^{3/2} \qquad (y'=dy/dx \text{ وغیره}).$$

۱۲. نشان دهید که تاب یك منحنی صفحه‌ای (با $\kappa>0$) متحد با صفر است.

۱۳. با استفاده از (۷) و (۹) نشان دهید که

$$\tau = (\mathbf{u}\,\mathbf{p}\,\mathbf{p}') \qquad (\kappa>0). \qquad (9')$$

۱۴. با استفاده از (۶)، نشان دهید که $(9')$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{\kappa^{2}} \qquad (\kappa>0). \qquad (9'')$$

۱۵. نشان دهید اگر منحنی C با $\gamma(t)$ نمایش داده شود، که درآن t پارامتری دلخواه است، آنگاه $(9'')$ چنین می‌شود :

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}}\;\ddot{\mathbf{r}}\;\dddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})-(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^{2}} \qquad (\kappa>0). \qquad (9''')$$

۶.۸ سرعت و شتاب

فرض می کنیم $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان ذرهٔ متحرك P درفضا باشد، که درآن t زمان است. در این صورت $\mathbf{r}(t)$ مسیر C ی نقطهٔ P را نمایش می‌دهد. از بخش قبل می‌دانیم که بردار

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (1)$$

بر C مماس است وبنا براین درهر لحظه درجهت حرکت P است. بنابررابطهٔ (۳) بخش ۴.۸، مشاهده می کنیم که

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}} = \frac{ds}{dt}$$

که درآن s طول قوس است و فاصلهٔ نقطهٔ P را از نقطهٔ ثابتی برروی C (با $s=0$) درطول منحنی نشان می‌دهد. بنابراین ds/dt **تندی** p است. بردار $\mathbf{v}$ را به این دلیل **بردار سرعت**[1] حرکت می‌نامند.

مشتق بردار سرعت را **بردار شتاب** می‌نامند و آن را معمولا با $\mathbf{a}$ نشان می‌دهند؛ بنابراین

$$\mathbf{a}(t)=\dot{\mathbf{v}}(t)=\ddot{\mathbf{r}}(t). \tag{۲}$$

مثال ۱. شتاب مرکزگرا

تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=R\cos\omega t\,\mathbf{i}+R\sin\omega t\,\mathbf{j} \qquad (\omega>0)$$

دایره‌ای مانند C به شعاع R و به مرکز مبدأ صفحهٔ xy را نشان می‌دهد وحرکت ذرهٔ P درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت را توصیف می‌کند. بردار سرعت

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=-R\omega\sin\omega t\,\mathbf{i}+R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

(ر.ك. شکل ۱۶۰) مماس بر c است واندازهٔ آن، تندی

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}=R\omega$$

ثابت‌است. **تندی زاویه‌ای** (تندی تقسیم برفاصلهٔ R ازمرکز) برابر ω است. بردارشتاب عبارت است از

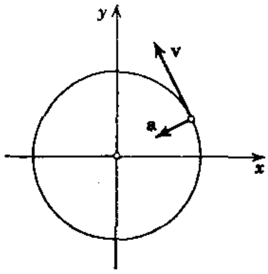
$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=-R\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i}-R\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}=-\omega^2\mathbf{r}. \tag{۳}$$

مشاهده می‌کنیم‌که شتابی با بزرگی ثابت $|\mathbf{a}|=\omega^2R$ به طرف مبدأ وجود دارد. این شتاب موسوم به **شتاب مرکزگرا** است و ازآنجا ناشی می‌شود که جهت بردار سرعت با آهنگ ثابتی تغییرمی‌کند. **نیروی مرکزگرا** برابر $m\mathbf{a}$ است، که درآن m جرم P است. بردار $-m\mathbf{a}$ را، که درجهت مخالف $m\mathbf{a}$ است، **نیروی گریز ازمرکز** می‌نامند و این دو نیرو درهرلحظه از حرکت درحال تعادل هستند. ▲

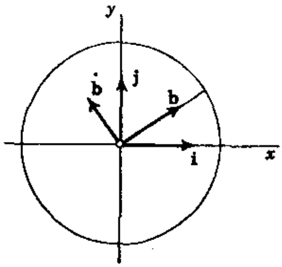
واضح است که $\mathbf{a}$ برابر با نرخ تغییرات زمانی $\mathbf{v}$ است. در مثال ۱ داریم ثابت $=|\mathbf{v}|$، اما $|\mathbf{a}|\neq 0$. این نشان می‌دهد که در حالت کلی اندازهٔ $\mathbf{a}$ برابر نرخ

---

۱. اگرامکان اشتباه نباشد، کلمهٔ سرعت را اغلب برای نمایش تندی، طول بردار سرعت $\mathbf{v}$، به‌کار می‌بریم.



شکل ۱۶۰. شتاب مرکزگرا



شکل ۱۶۱. حرکت درمثال ۲

تغییرات $|\mathbf{v}|$ نیست. دلیل این امر آن است که، درحالت کلی، $\mathbf{a}$ مماس برمسیر C نیست. درواقع، اگرقاعدهٔ زنجیری مشتق را درمورد (۱) به‌کاربریم ومشتق نسبت به s را با پریم نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{r}'\frac{ds}{dt}$$

و با مشتقگیری مجدد،

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}'\frac{ds}{dt}\right)=\mathbf{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^{2}+\mathbf{r}'\frac{d^{2}s}{dt^{2}} \cdot \qquad (۴)$$

چون $\mathbf{r}'$ برابر $\mathbf{u}$، برداریکه مماس بر C (بخش ۵.۸)، و مشتقش $\mathbf{u}'=\mathbf{r}''$ عمود بر $\mathbf{u}$ است (بخش ۵.۸)، فرمول (۴) تجزیهٔ بردار شتاب به مؤلفهٔ قائم $\mathbf{r}''\dot{s}^{2}$ و مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{r}'\ddot{s}$ است. نتیجه می گیریم که وقتی و فقط وقتی مؤلفهٔ قائم صفر است که $|\mathbf{a}|$ برابر نرخ تغییرزمانی $\dot{s}=|\mathbf{v}|$ (صرفنظر از علامت) باشد، زیرا دراین صورت خواهیم داشت $|\mathbf{a}|=|\mathbf{r}'||\ddot{s}|=|\ddot{s}|$.

مثال ۲. شتاب کوریولی[۱]

ذرهٔ P روی قرصی به‌طرف لبهٔ آن درحرکت است، بردار مکان عبارت است از

$$\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{b} \qquad (۵)$$

دراینجا $\mathbf{b}$ برداری‌یکه است، که همراه باقرص باسرعت زاویه‌ای ثابت ω درجهت خلاف

---

۱. گوستاو گاسپار کوریولی (Gustave Gaspard Coriolis)، ۱۷۹۲–۱۸۴۳، فیزیکدان فرانسوی.

حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند (شکل ۱۶۱). $\mathbf{a}$ ، شتاب P را پیدا کنید.

به دلیل دوران، $\mathbf{b}$ به‌صورت زیر است

$$\mathbf{b}(t)=\cos\omega t\,\mathbf{i}+\sin\omega t\,\mathbf{j}. \tag{۶}$$

با مشتقگیری از (۵)، سرعت را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{b}+t\,\dot{\mathbf{b}}. \tag{۷}$$

واضح است که $\mathbf{b}$ سرعت P نسبت به‌قرص، و $t\,\dot{\mathbf{b}}$ سرعت اضافی ناشی ازدوران است. بامشتقگیری مجدد، شتاب را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=2\dot{\mathbf{b}}+t\,\ddot{\mathbf{b}}. \tag{۸}$$

در جملهٔ آخر (۸) داریم $\ddot{\mathbf{b}}=-\omega^2\mathbf{b}$ که با مشتقگیری از (۶) حاصل شده است. از این‌رو جهت $t\,\ddot{\mathbf{b}}$ به‌طرف مرکز دیسك است، وبا توجه به‌مثال ۱ ، این همان شتاب مرکز-گرای ناشی از دوران است. درواقع، فاصله P از مرکز برابر t است که نقش R در مثال ۱ را دارد.

جملهٔ جالب و غیرمنتظرهٔ (۸) جملهٔ $2\dot{\mathbf{b}}$ است که موسوم به **شتاب کوریولی** است، این شتاب از برهم‌کنش دوران دیسك وحرکت P برروی‌آن ایجاد شده است. جهت‌این شتاب همان جهت $\dot{\mathbf{b}}$ ، مماس برلبهٔ دیسك، است و، دردستگاه مختصات ثابت xy ، جهت دوران را نشان می‌دهد. اگر P شخصی به جرم m_0 باشد که روی قرص ، برطبق (۵)، درحال قدم زدن است، این شخص نیرویی برابر $-2m_0\dot{\mathbf{b}}$ را درجهت مخالف، یعنی در جهت عکس دوران، احساس خواهد کرد.

مثال ۳. برهم‌نهش دو دوران

شتاب ذره‌ای مانند P را پیدا کنید که برروی «نصف النهار» M ازکرهٔ درحال دورانی با تندی ثابت نسبت به کره، درحال حرکت است.

حرکت P بر M را می‌توان به‌طور تحلیلی به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{r}(t)=R\cos\gamma t\,\mathbf{b}+R\sin\gamma t\,\mathbf{k} \tag{۹}$$

که درآن R شعاع کره، $\gamma(>0)$ سرعت زاویه‌ای P بر M ، $\mathbf{b}$ بردار یکهٔ افقی واقع درصفحهٔ M (شکل ۱۶۲) ، و $\mathbf{k}$ بردار یکه درجهت مثبت‌محور z هاست. چون $\mathbf{b}$ باکره دوران می‌کند، به‌صورت زیراست:

$$\mathbf{b}=\cos\omega t\,\mathbf{i}+\sin\omega t\,\mathbf{j}, \tag{۱۰}$$

دراینجا $\omega(>0)$ تندی زاویه‌ای کره است و $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهای یکه درجهت مثبت محور x ها ومحور y ها هستند، که درفضا ثابت شده‌اند. با مشتقگیری از(۹) سرعت را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=R\cos\gamma t\,\dot{\mathbf{b}}-\gamma R\sin\gamma t\,\mathbf{b}+\gamma R\cos\gamma t\,\mathbf{k}. \tag{۱۱}$$

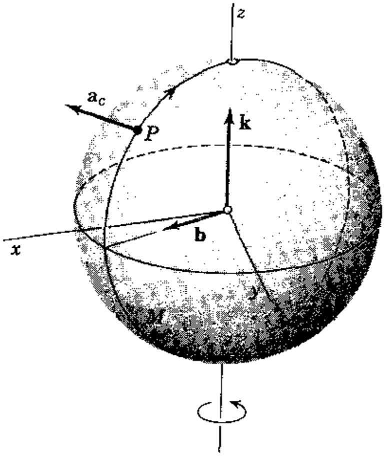
با مشتقگیری مجدد، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=R\cos\gamma t\,\ddot{\mathbf{b}}-2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\mathbf{b}}-\gamma^2 R\cos\gamma t\,\mathbf{b}-\gamma^2 R\sin\gamma t\,\mathbf{k}, \tag{۱۲}$$

که درآن، با توجه به (۱۰) داریم

$$\dot{\mathbf{b}}=-\omega\sin\omega t\,\mathbf{i}+\omega\cos\omega t\,\mathbf{j},$$

$$\ddot{\mathbf{b}}=-\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i}-\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}=-\omega^2\mathbf{b}.$$



شکل ۱۶۲. برهم‌نهش دو دوران

بنابر (۹) ملاحظه می‌کنیم که مجموع دوجملهٔ آخر (۱۲) برابر $-\gamma^2\mathbf{r}$ است، و (۱۲) چنین می‌شود:

$$\mathbf{a}=-\omega^2 R\cos\gamma t\,\mathbf{b}-2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\mathbf{b}}-\gamma^2\mathbf{r}. \tag{۱۳}$$

جملهٔ اول طرف راست برابر شتاب مرکزگراست که از دوران کره حاصل شده است و جملهٔ آخر شتاب مرکزگرای حاصل از دوران P برروی M است. جملهٔ دوم شتاب

کوریولی است :

$$\mathbf{a}_c = -2\gamma R \sin\gamma t\,\dot{\mathbf{b}}. \tag{۱۴}$$

بر روی «نیمکرهٔ شمالی» داریم $\sin\gamma t > 0$ [ر.ك. (۹)] و به‌علت وجود علامت منفی، $\mathbf{a}_c$ درجهت مخالف $\dot{\mathbf{b}}$ است، یعنی مماس بر سطح کره، عمود بر M، و در جهت مخالف دوران کره است. اندازهٔ آن، $2\gamma R|\sin\gamma t|\omega$، در «قطب شمال» ماکزیمم است ودرخط استوا برابرصفر است. هر گاه P مگسی به‌جرم m_0 باشد که برطبق (۹) حرکت می کند، این مگس نیرویی برابر $-m_0\mathbf{a}_c$ ، درجهت مخالف $m_0\mathbf{a}_c$ ، احساس خواهدکرد؛ این نیرو کاملا شبیه نیرویی است که شخص مذکور درمثال ۲ احساس می کند. این نیرو سبب می‌شود که مگس از مسیر M به طرف راست متمایل شود. روی «نیمکرهٔ جنوبی»، $\sin\gamma t < 0$ و نیرو درجهت مخالف اثرمی کند وسبب می‌شود که مگس از M به‌طرف چپ متمایل‌شود. این‌عمل را می‌توان درمورد گلوله‌ها یا سایرپرتابه‌ها مشاهده کرد. جریان هوا به‌طرف ناحیه‌ای که درآنجا فشار کم است نیز این انحراف را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۶.۸

فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان یك ذرهٔ متحرك باشد، $t\ (\geqslant 0)$ زمان است. در هریك از حالات زیر، شکل هندسی مسیر را تشریح کنید و بردار سرعت، تندی، و بردار شتاب را بیابید.

۱. $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i}$ ۲. $\mathbf{r} = t^2\,\mathbf{k}$

۳. $\mathbf{r} = (2t - t^2)\,\mathbf{i}$ ۴. $\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{i}$

۵. $\mathbf{r} = \sin t\,\mathbf{j}$ ۶. $\mathbf{r} = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\sin 2t\,\mathbf{j}$

۷. $\mathbf{r} = \cos t^2\,\mathbf{i} + \sin t^2\,\mathbf{j}$ ۸. $\mathbf{r} = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\sin 3t\,\mathbf{j}$

۹. $\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ ۱۰. $\mathbf{r} = (1+t^3)\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + (2-t^3)\,\mathbf{k}$

۱۱. شتاب مرکزگرای ماه به‌طرف زمین‌رابیابید، فرض کنیدکه مدار ماه دایره‌ای به‌شعاع $3{,}85 \times 10^8$ متر و زمان یك دوران کامل آن ۲۷٫۳ روز یا $2{,}36 \times 10^6$ ثانیه است.

۱۲. درمثال ۲ به‌جای (۵) بگذارید $\mathbf{r} = t^2\mathbf{b}$ وشتاب کوریولی را بیابید.

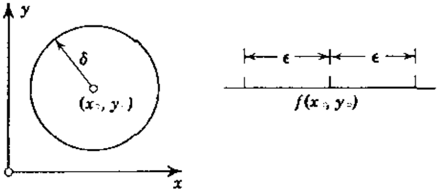
۱۳. حرکتی بیابیدکه بردار شتاب آن ثابت باشد.

۱۴. با مشتقگیری از (۷) بخش ۸.۶ فرمول (۳) را به‌دست آورید.

۱۵. هرگاه $\mathbf{r}(t)$ نمایش مسیر حرکت یك ذره و t زمان باشد، تبدیل پارامتری $t=q(\bar{t})$ ازنقطه نظرمکانیکی چه مفهومی دارد؟

۷.۸ قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ مقدار میانگین در مورد توابع چند متغیره

حال مطالبی را درمورد توابع چند متغیره بررسی می‌کنیم که در بخشهای بعدی به‌آنها نیاز داریم. برای سهولت باتوابع دومتغیره کارمی کنیم؛ تعمیم فرمولهای حاصله به توابع سه‌متغیره و بیشترساده خواهد بود. فرض می‌کنیم که دانشجو بامفهوم مشتق جزئی آشنائی دارد.



شکل ۱۶۳. پیوستگی تابع دومتغیره

تابع $f(x\,,\,y)$ را در نقطهٔ $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ **پیوسته** نامند هرگاه f دریك همسایگی[۱] ازآن نقطه تعریف‌شده باشد و به‌ازای هرعدد مثبت ε (که هرقدرهم کوچك باشد مهم نیست فقط کافی است صفرنباشد) بتوان عدد مثبتی مانند δ یافت به‌طوری که به‌ازای هر $(x\,,\,y)$ واقع در آن همسایگی یعنی به‌ازای هر $(x\,,\,y)$ ی که

$$(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2<\delta^2$$

داشته باشیم

$$|f(x,y)-f(x_\circ,y_\circ)|<\varepsilon.$$

معنی هندسی پیوستگی $f(x\,,\,y)$ در $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ این است که به‌ازای هرفاصلهٔ به طول 2ε ونقطهٔ وسط $f(x_\circ\,,\,y_\circ)$، می‌توان قرص‌مستدیری به‌شعاع غیرصفر δ و به‌مرکز $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ درآن همسایگی که تابع تعریف شده است یافت به‌طوری که به ازای هرنقطهٔ $(x\,,\,y)$ واقع درقرص مقدار متناظرتابع $f(x\,,\,y)$ درآن فاصله باشد (شکل ۱۶۳).

ازحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی می‌دانیم که اگر w تابعی مشتقپذیر از x و x تابعی مشتقپذیر از t باشد، آنگاه

۱. یعنی در قرص مستدیری مانند $(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2<r^2$، با $r>\circ$، در صفحهٔ xy.

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

این قاعده را که اصطلاحاً به‌قاعدهٔ زنجیری مشتقگیری موسوم است می‌توان به‌طریق زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۱ (قاعدهٔ زنجیری)

فرض‌کنید $w=f(x,y)$ پیوسته بوده درهرنقطه از دامنهٔ[1] D درصفحهٔ xy دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. فرض‌کنید $x=x(t)$ و $y=y(t)$ توابعی مشتقپذیر از یك متغیر درفاصله‌ای مانند T باشند به طوری‌که، به‌ازای هر t در T، نقطهٔ $[x(t), \ y(t)]$ در D واقع باشد. درآن صورت $w=f[x(t), \ y(t)]$ به ازای هر t در T مشتقپذیر است و

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{۱}$$

اثبات. t را در T اختیار می کنیم و Δt راآنقدر کوچك می گیریم که $t+\Delta t$ نیز در T باشد، وفرض می کنیم

$$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t), \quad \Delta y=y(t+\Delta t)-y(t), \tag{۲}$$

و به‌علاوه

$$\Delta w=f(x+\Delta x, \ y+\Delta y)-f(x, \ y).$$

با اضافه کردن و کم کردن یك جمله، رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$\Delta w=[f(x+\Delta x, \ y+\Delta y)-f(x, \ y+\Delta y)] \\ +[f(x, y+\Delta y)-f(x, \ y)].$$

هرگاه قضیهٔ مقدار میانگین در مورد توابع یك متغیره (ر. ك. مرجع [A۱۴]) را روی هریك از دوعبارت داخل کروشه اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta w=\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1, \ y+\Delta y}+\Delta y\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x, \ y_1} \tag{۳}$$

---

۱. **دامنه‌ای** مانند D عبارت از یك مجموعهٔ نقطه‌ای، همبند باز است،که در آن «همبند» به این مفهوم است که هردونقطه از D را می‌توان با خط شکسته‌ای که ازتعدادی متناهی پاره‌خط تشکیل شده است که نقاطشان متعلق به D است، به‌هم وصل کرد، و «باز» به‌این مفهوم است که هرنقطهٔ D همسایگیی داردکه همهٔ نقاط آن متعلق به D هستند. مثلا درون یك مستطیل یا درون یك دایره،دامنه است.

که درآن x_1 بین x و $x+\Delta x$ و y_1 بین y و $y+\Delta y$ واقع است. با تقسیم طرفین (۳) بر Δt ومیل دادن Δt به‌سمت صفر، و با فرض پیوسته بودن $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$، (۱) را به‌دست می‌آوریم. ▲

اکنون می‌توان این قضیه را به‌شرح زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۲

فرض‌کنید $w=f(x, y)$ پیوسته بوده در دامنه‌ای مانند D درصفحهٔ xy دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته باشد. فرض‌کنید $x=x(u, v)$ و $y=y(u, v)$ توابعی هستندکه در دامنه‌ای مانند B واقع درصفحهٔ uv دارای مشتقات جزئی مرتبه اولند، وفرض‌کنیدکه به ازای هر نقطهٔ (u, v) در B، نقطهٔ متناظر $[x(u, v), y(u, v)]$ در D باشد. در آن صورت تابع $w=f(x(u, v), y(u, v))$ در B تعریف شده ودارای مشتقات جزئی‌مرتبه اول نسبت به u و v در B است و

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

اثبات این قضیه مستقیماً با دوبار استفاده ازقضیهٔ ۱، با ثابت گرفتن یکی ازدومتغیر u و v درهربار نتیجه می‌شود.

از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌دانیم کـه اگر تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{df}{dx},$$

مشتق در نقطهٔ مناسبی بین x_0 و x_0+h محاسبه می‌شود (ر. ك. مرجع [A۱۴]). این قضیه راکه درحساب دیفرانسیل به‌قضیهٔ مقدار میانگین موسوم است می‌توان بـه شرح زیر به توابع دومتغیره تعمیم داد.

قضیهٔ ۳. (قضیهٔ مقدار میانگین)

فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته بـوده دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در دامنهٔ D باشد. به‌علاوه، فرض‌کنید (x_0, y_0) و (x_0+h, y_0+k) نقاطی در D باشندبه‌طوری که پاره‌خط واصل این نقاط در D واقع باشد (شکل ۱۶۴). آنگاه

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (۵)$$

مشتقات جزئی درنقطهٔ مناسبی از پاره‌خط مزبور محاسبه می‌شوند.

اثبات. فرض کنید

$$x = x_{\circ} + th, \qquad y = y_{\circ} + tk \qquad (\circ \leqslant t \leqslant \text{۱}).$$

و

$$F(t) = f(x_{\circ} + th, y_{\circ} + tk).$$

آنگاه

$$f(x_{\circ} + h, y_{\circ} + k) = F(\text{۱}), \qquad f(x_{\circ}, y_{\circ}) = F(\circ).$$

بنابـر قضیهٔ مقدار میانگین در مورد توابع یك متغیره، عدد t_1 ی بین ۰ و ۱ موجود است به‌طوری که

$$(\text{۶}) \qquad f(x_{\circ} + h, y_{\circ} + k) - f(x_{\circ}, y_{\circ}) = F(\text{۱}) - F(\circ) = F'(t_1).$$

حال قضیهٔ ۱ را به‌کار می‌بریم. چون $dx/dt = h$ و $dy/dt = k$، به‌دست‌می‌آوریم

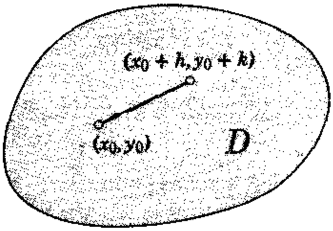
$$(\text{۷}) \qquad F'(t_1) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k,$$

مشتقات طرف راست درنقطهٔ $(x_{\circ} + t_1 h, \; y_{\circ} + t_1 k)$، که برپاره خط با نقاط انتهایی $(x_{\circ}, y_{\circ})$ و $(x_{\circ} + h, y_{\circ} + k)$ واقع است، محاسبه می‌شوند. با قرار دادن (۷) در (۶)، (۵) را به‌دست می‌آوریم و بدین ترتیب اثبات قضیه به‌اتمام می‌رسد.

درمورد تابع سه‌متغیرهٔ $f(x, y, z)$ که درشرایطی شبیه شرایط قضیهٔ ۳ صدق کند، بحث کاملا مشابه است ومنجر به فرمول

$$(\text{۸}) \quad f(x_{\circ} + h, y_{\circ} + k, z_{\circ} + l) - f(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z}$$

می‌شود که درآن‌مشتقات جزئی‌درنقطهٔ مناسبی از پاره‌خط با نقاط انتهایی $(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ و $(x_{\circ} + h, y_{\circ} + k, z_{\circ} + l)$ محاسبه می‌شوند.



شکل ۱۶۴. قضیهٔ مقدار میانگین

مسائل بخش ۷.۸

با استفاده از (۱)، درهریك از حالات زیر dw/dt را پیداکنید

۱. $w = x + y, \quad x = t^2, \quad y = \ln t$

۲. $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = {}^{2t}, \quad y = e^{-2t}$

۳. $w = \dfrac{x}{y}, \quad x = g(t), \quad y = h(t)$

۴. $w = x^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$

۵. فرض کنید $w = f(x, y, z)$ که درآن x، y، z توابعی از t هستند. نشان دهید که تحت شرایطی شبیه شرایط قضیهٔ ۱ داریم

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

با استفاده از (۹)، dw/dt را بیابید.

۶. $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = e^{2t}\cos 2t, \quad y = e^{2t}\sin 2t, \quad z = e^{4t}$

۷. $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$

۸. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

$\partial w/\partial u$ و $\partial w/\partial v$ را پیدا کنید.

۹. $w = \ln(x^2 + y^2), \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v$

۱۰. $w = x^2 - y^2, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$

۱۱. $w = xy, \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v$

۱۲. فرمول (۸) را به‌دست آورید.

۱۳. فرض کنید $w = f(x, y)$ و $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

۱۴. فرض کنید $w = f(v, z)$ و $v = x + ct$، $z = x - ct$، که c عددی ثابت است. درصورتی که f به‌اندازهٔ‌کافی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید که

$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

۱۵. فرض کنید $w=f(x, y)$ و $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$. نشان دهید که

$$w_{xx}+w_{yy}=w_{rr}+\frac{1}{r}w_r+\frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}.$$

۸.۸ مشتق جهتی. گرادیان میدان اسکالر

میدان اسکالری درفضا با تابع اسکالر $f(P)=f(x, y, z)$ داده شده است (ر.ك. بخش ۱.۸). می‌دانیم که مشتقات جزئی مرتبهٔ اول f نرخ تغییر f درجهت محورهای مختصات هستند. غیرطبیعی به‌نظر می‌رسد که توجه خود را فقط به‌این سه جهت محدود کنیم وطبیعی است که نرخ تغییر f را درتمام جهات بررسی کنیم. این ایدهٔ ساده منجر به مفهوم مشتق جهتی می گردد.

برای تعریف این مشتق ، نقطه‌ای مانند P در فضا و امتدادی در P ، که با بردار یکهٔ $\mathbf{b}$ معین می‌شود ، انتخاب می کنیم. فرض می کنیم C شعاعی از P در جهت $\mathbf{b}$ و Q نقطه‌ای واقع بر C به‌فاصلهٔ s از P باشد (شکل ۱۶۵). دراین صورت هرگاه حد

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\lim_{s\to 0}\frac{f(Q)-f(P)}{s} \qquad (s = \text{فاصلهٔ بین } P \text{ و } Q) \qquad (۱)$$

موجود باشد، آن را **مشتق جهتی** f در P درجهت $\mathbf{b}$ می‌نامند. واضح است که $\partial f/\partial s$ برابر نرخ تغییر f در P درجهت $\mathbf{b}$ است.

نماد دیگری نیز که درکتابها برای $\partial f/\partial s$ به‌کار می‌رود عبارت است از

$$D_{\mathbf{b}}f$$

است که درآن D مشتقگیری را نشان می‌دهد و $\mathbf{b}$ جهت را.

بدین ترتیب f در P بینهایت مشتق جهتی داردکه هر یك متناظر بـا جهت معینی است. اما دریك دستگاه مختصات دکارتی مفروض ، هر یك از این مشتقات را می‌توان به شرح زیربرحسب مشتقات جزئی مرتبه اول f در P نمایش داد. هرگاه P دارای بردار مکان $\mathbf{a}$ باشد. آنگاه شعاع C را می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}=\mathbf{a}+s\mathbf{b} \qquad (s\geq 0) \qquad (۲)$$

نمایش داد، و $\partial f/\partial s$ مشتق تابع $f[x(s), y(s), z(s)]$ نسبت به طول قوس s از C است. از این‌رو با فرض آنکه f دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد وبا به‌کار بردن قاعدهٔ زنجیری (قضیهٔ ۱ از بخش قبل) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z' \qquad (۳)$$

که پریم مشتق نسبت به s را نشان می‌دهد (مشتقی که در $s=0$ محاسبه می‌شود). حال بنابر (۲)،

$$\mathbf{r}'=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}+z'\mathbf{k}=\mathbf{b}.$$

این تساوی نشان می‌دهد که مفید است بردار

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{۴}$$

را معرفی کنیم و (۳) را به‌صورت حاصل‌ضرب داخلی (حاصل‌ضرب نقطه‌ای) زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\mathbf{b}\cdot\operatorname{grad} f \qquad (|\mathbf{b}|=1). \tag{۵}$$

بردار $\operatorname{grad} f$ را **گرادیان** تابع اسکالر f می‌نامند.

با معرفی عملگر دیفرانسیل

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

(بخوانید **نابلا** یا «دل») می‌توان نوشت

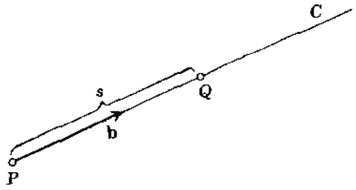
$$\operatorname{grad} f=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

نماد ∇f برای نشان دادن گرادیان به‌کرات در متون مهندسی به‌کار می‌رود.

خصوصاً اگر $\mathbf{b}$ درجهت مثبت محور x ها باشد، آنگاه $\mathbf{b}=\mathbf{i}$ و

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\mathbf{b}\cdot\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

همین‌طور، مشتق جهتی درجهت مثبت محور y ها برابر $\partial f/\partial y$ است، و الی آخر.



شکل ۱۶۵. مشتق جهتی

مثال ۱. مشتق جهتی

مطلوب است محاسبهٔ $\partial f/\partial s$، مشتق جهتی از تابع $f(x, y, z)=۲x^۲+۳y^۲+z^۲$ درنقطهٔ $P:(۲, ۱, ۳)$ درجهت بردار $\mathbf{a}=\mathbf{i}-۲\mathbf{k}$. داریم

$$\operatorname{grad} f=۴x\,\mathbf{i}+۶y\,\mathbf{j}+۲z\,\mathbf{k}$$

ودر P

$$\operatorname{grad} f=۸\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۶\mathbf{k}\,.$$

چون $|\mathbf{a}|=\sqrt{۵}$، بردار یکه درجهت $\mathbf{a}$ عبارت است از

$$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{i}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{k}\,.$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial s}=(۸\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۶\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{i}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{k}\right)=-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\,.$$

علامت منفی دلالت برآن دارد که f درجهت مورد بحث نزول می‌کند. ▲

حال نشان می‌دهیم که طول و جهت $\operatorname{grad} f$ مستقل از انتخاب مختصات دکارتی هستند.

البته این موضوع واضح نیست، زیرا (۴) شامل مشتقات جزئی است کــه بستگی به‌انتخاب مختصات دارند، لذا هنوز نمی‌دانیم که آیا عبارت متناظر

$$\frac{\partial f}{\partial x^*}\,\mathbf{i}^*+\frac{\partial f}{\partial y^*}\,\mathbf{j}^*+\frac{\partial f^*}{\partial z^*}\,\mathbf{k}^*$$

که نسبت به‌مختصات دکارتی x^*، y^*، z^* (با بردارهای یکهٔ متناظر $\mathbf{i}^*$، $\mathbf{j}^*$، $\mathbf{k}^*$) نوشته شده است دارای همان طول وهمان جهت (۴) است یا نه.

برای اثبات این حکم، می‌توان به‌شرح زیر استدلال کرد. بنابه تعریف اسکالر، مقدار f درنقطه‌ای مانند P بستگی به P دارد ولی مستقل از مختصات است، و s، طول قوس شعاع C، نیز مستقل از انتخاب مختصات است. ازاین‌رو $\partial f/\partial s$ مستقل ازانتخاب مختصات است. از (۵) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial s}=|\mathbf{b}||\operatorname{grad} f|\cos\gamma=|\operatorname{grad} f|\cos\gamma$$

که درآن γ زاویهٔ بین $\mathbf{b}$ و $\operatorname{grad} f$ است. مشاهده می‌کنیم که $\partial f/\partial s$ وقتی‌ماکزیمم

است که $\cos\gamma = 1$ یا $\gamma = 0$ که درآن صورت $\partial f/\partial s = |\mathrm{grad}\, f|$. این‌موضوع نشان می‌دهد که طول وجهت $\mathrm{grad}\, f$ مستقل از دستگاه مختصات است، و بدین ترتیب قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۱. (گرادیان)

فرض می‌کنیم $f(P) = f(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشدکه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته است. درآن صورت $\mathrm{grad}\, f$ وجود دارد وطول وجهت آن مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضاست. اگردرنقطه‌ای مانند P گرادیان f بردار صفر نباشد، بیشترین افزایش f درنقطهٔ P درجهت این گرادیان است.

مشخصهٔ هندسی مهم دیگر گرادیان را می‌توان به طریق زیر به دست آورد. تابع اسکالر مشتق‌پذیر $f(x, y, z)$ را درفضا درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر مقدار c معادلهٔ

$$f(x, y, z) = c = \text{ثابت} \tag{۶}$$

نمایش سطحی مانند S درفضا باشد. درآن صورت با توجه به‌اینکه c می‌تواند هرمقدار را اختیار کند، خانواده‌ای از سطوح به دست می‌آیدکه اعضای آن **سطوح تراز** تابع f نامیده می‌شوند. چون بنا بر تعریف تابع، f در هرنقطه از فضا دارای مقداری یکتاست، نتیجه می‌شود که ازهر نقطه درفضا یکی وتنها یکی از سطوح تراز f می گذرد. یادآوری می کنیم که منحنی فضایی C را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد. (ر. ک. بخش ۳.۸)

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,. \tag{۷}$$

حال اگر بخواهیم که C بر S واقع باشد، آنگاه توابع $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ در (۷) باید طوری باشند که

$$f[x(t), y(t), z(t)] = c\,;$$

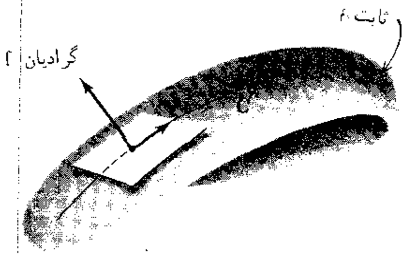
(۶) را ببینید. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به t وبه‌کار بردن قاعدهٔ زنجیری (بخش ۷.۸) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = (\mathrm{grad}\, f)\cdot\dot{\mathbf{r}} = 0\,, \tag{۸}$$

که درآن بردار

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$$

بر C مماس است (ر. ک. بخش ۵.۸). هرگاه آن دسته از منحنیهای واقع بر S را که‌در جهتهای مختلف از نقطهٔ P می گذرند درنظر بگیریم، درحالت کلی، خطوطی که در نقطهٔ



شکل ۱۶۶. سطح تراز و گرادیان

بر این منحنیها مماسند در صفحه‌ای قرار می‌گیرند که در P بر S مماس است. این صفحه را **صفحهٔ مماس** بر S در P می‌نامند. خط راستی که از P می‌گذرد و بر صفحهٔ مماس عمود است **نرمال** S در P نامیده می‌شود (شکل ۱۶۶). از (۸) و قضیهٔ ۱ بخش ۵.۶، قضیهٔ زیر حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۲. (گرادیان و نرمال سطح)

فرض‌کنید f تابعی اسکالر باشدکه در یك دامنهٔ D از فضا تعریف شده ومشتقپذیر است و P نقطهٔ دلخواهی از D باشدکه برسطح تراز S از f قرار دارد. آنگاه اگرگرادیان f در P بردار صفر نباشد، این‌گرادیان عمود بر S درنقطهٔ P است، یعنی بردارگرادیان درجهت نرمال بر S در P است.

مثال ۲. نرمال منحنی صفحه‌ای

منحنیهای تراز ثابت $= f$ تابع $f(x, y) = \ln(x^۲ + y^۲)$ دوایر متحدالمرکزی حول مبدأ هستند. گرادیان

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{۲x}{x^۲+y^۲}\mathbf{i} + \frac{۲y}{x^۲+y^۲}\mathbf{j}$$

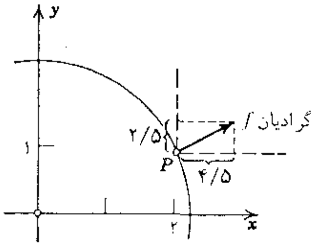
درجهت عمودبردایره‌است وجهت آن جهتی است که f ماکزیمم افزایش خود را دارد. مثلاً، درنقطهٔ $P : (۲ , ۱)$ داریم (ر. ك. شکل ۱۶۷)

$$\operatorname{grad} f = ۰٫۸\mathbf{i} + ۰٫۴\mathbf{j}\,.$$

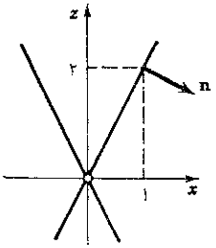
مثال ۳. نرمال برسطح

$\mathbf{n}$، بردار نرمال برمخروط دوار $z^۲ = ۴(x^۲ + y^۲)$ را درنقطهٔ $P : (۱ , ۰ , ۲)$ پیدا کنید. مخروط را می‌توان به‌صورت $f = ۰$، سطح تراز تابع

$$f(x, y, z) = ۴(x^۲ + y^۲) - z^۲$$



شکل ۱۶۷. نرمال بردایره



شکل ۱۶۸. مقطع صفحهٔ xz ومخروط مثال ۳

درنظر گرفت. دراین صورت

$$\operatorname{grad} f = ۸x\,\mathbf{i} + ۸y\,\mathbf{j} - ۲z\,\mathbf{k}$$

و درنقطهٔ P

$$\operatorname{grad} f = ۸\mathbf{i} - ۴\mathbf{k}\,.$$

از این‌رو بنابر قضیه ۲ ،

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{i} - \frac{۱}{\sqrt{۵}}\,\mathbf{k}$$

بردار یکهٔ نرمال برمخروط در P است، همین‌طور است $-\mathbf{n}$ (ر. ك. شکل ۱۶۸). ▲

برخی از میدانهای برداری مطرح در فیزیك بـا توابعی برداری معین می‌شوند که می‌توان آنها را به‌صورت گرادیان توابع اسکالر مناسب نوشت. چنین تابع اسکالری را تابع پتانسیل یا **پتانسیل** میدان‌برداری متناظرمی‌نامند. استفاده از توابع پتانسیل، بررسی میدانهای برداری را بـه طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. مثال مهم زیر ما را با چنین رهیافتی به‌میدانهای برداری آشنا می‌کند.

مثال ۴. میدان‌گرانشی. معادلهٔ لاپلاس

درمثال۴ بخش۱.۸ دیدیم که برطبق قانون جاذبهٔ نیوتون، نیروی جاذبهٔ بین دوذره عبارت است از

$$\mathbf{p} = -c\,\frac{\mathbf{r}}{r^۳} = -c\left(\frac{x-x_۰}{r^۳}\,\mathbf{i} + \frac{y-y_۰}{r^۳}\,\mathbf{j} + \frac{z-z_۰}{r^۳}\,\mathbf{k}\right) \tag{۹}$$

که درآن

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

فاصلهٔ بین دو ذره و c عددی ثابت است. با ملاحظهٔ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}=-\frac{x-x_0}{r^3} \qquad \text{(۱۰ الف)}$$

وهمین‌طور

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y-y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z-z_0}{r^3}, \qquad \text{(۱۰ ب)}$$

نتیجه می گیریم که $\mathbf{p}$ گرادیان تابع اسکالر

$$f(x, y, z)=\frac{c}{r} \qquad (r>0)$$

است؛ یعنی f یك پتانسیل میدان گرانشی است.

با مشتقگیری از (۱۰) خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5}.$$

چون مجموع سه عبارت سمت راست صفر است، بنابراین پتانسیل $f=c/r$ درمعادلهٔ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \qquad (11)$$

صدق می کند. این معادله بامشتق جزئی مهم را **معادلهٔ لاپلاس** می‌نامند وما آن رادرفصول ۱۱ و ۱۸ به‌تفصیل بررسی خواهیم کرد. عبارت سمت چپ را **لاپلاسی** f می‌نامند و با $\nabla^2 f$ به Δf نشان می‌دهند. عملگر دیفرانسیل

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(بخوانید «مربع نابلا» یا «دلتا») را **عملگر لاپلاس** می‌نامند. با استفاده از این عملگر ،

معادلهٔ (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla^{۲} f = ۰ .$$

می‌توان نشان داد که میدان نیروی حاصل از هرتوزیع جرمی توسط تابعی برداری داده می‌شود که برابر گرادیان تابع اسکالری مانند f است، و f درهر ناحیه از فضا که تهی از ماده باشد درمعادلهٔ (۱۱) صدق می‌کند.

قوانین دیگری درفیزیک‌وجود دارند که به‌صورت قانون گرانش نیوتن هستند. مثلا در الکترواستاتیك، نیروی جاذبه (یا دافعهٔ) بین دو ذره با بارهای غیرهمنام (یا همنام) $Q_۱$ و $Q_۲$ عبارت است از

(قانون کولن) $$\mathbf{p} = k\,\frac{\mathbf{r}}{r^{۳}}$$

که درآن $k = Q_۱ Q_۲/۴\pi\varepsilon$، و ε ثابت دی‌الکتریك است. از این‌رو $\mathbf{p}$ گرادیان‌پتانسیل $f = -k/r$ است، وهرگاه $r > ۰$، درمعادله (۱۱) صدق می‌کند. ▲

هرگاه تابع برداری معرف یك میدان برداری برابر گرادیان تابعی اسکالر باشد، میدان را **پایستار** می‌نامند، زیرا، همان‌طور که دربخش ۱۲.۹ خواهیم دید، درچنین‌میدانی کار انجام شده برای منتقل‌کردن یك ذره از نقطهٔ $P_۱$ به نقطهٔ $P_۲$ در میدان فقط به نقاط $P_۱$ و $P_۲$ بستگی دارد و مستقل از مسیری است که ذره روی آن از $P_۱$ به $P_۲$ برده می‌شود. همچنین خواهیم دید که هرمیدانی پایستار نیست.

مسائل بخش ۸.۸

گرادیان ∇f را بیابید، هرگاه

۱. $f = ۲x - y$

۲. $f = e^{x}\cos y$

۳. $f = \sin x \cosh y$

۴. $f = x^{۲} - y^{۲}$

۵. $f = \ln(x^{۲} + y^{۲})$

۶. $f = \arctan(y/x)$

۷. $f = xyz$

۸. $f = yz + zx + xy$

۹. $f = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$

۱۰. $f = (x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{-۱/۲}$

۱۱. $f = e^{xyz}$

۱۲. $f = \cos(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$

نمودار برخی از منحنیهای تراز ثابت $= f$ را رسم کنید. ∇f را بیابید وآن را با رسم

پیکانهایی درچند نقطه از منحنیهای تراز نشان دهید.

۱۳. $f=2x-3y$ ۱۴. $f=y/x$ ۱۵. $f=xy$

۱۶. $f=x^2y^2$ ۱۷. $f=9x^2+y^2$ ۱۸. $f=4x^2+9y^2$

بردارهای نرمال برمنحنیهای صفحه‌ای داده شده را درنقطهٔ $P:(x,y)$ بیابید و آنها را رسم کنید.

۱۹. $y=x,\quad P:(3,3)$ ۲۰. $y=x^2,\quad P:(-2,4)$

۲۱. $y=3x-4,\ P:(1,-1)$ ۲۲. $x^2+y^2=25,\ P:(3,4)$

۲۳. $y^2=x^3,\ P:(4,-8)$ ۲۴. $3x^2-2y^2=1,\ P:(1,1)$

بردارهای نرمال برسطوح داده شده را درنقطهٔ $P:(x,y,z)$ بیابید.

۲۵. $x+y+z=0,\quad P:(1,1,-2)$

۲۶. $2x+3y-z=1,\quad P:(1,\ 2,7)$

۲۷. $z=x^2+y^2,\quad P:(2,2,8)$

۲۸. $x^2+y^2+z^2=4,\quad P:(2,-2,0)$

۲۹. $x^2+3y^2+2z^2=6,\quad P:(2,0,1)$

۳۰. $z=xy,\quad P:(3,-1,-3)$

تابع اسکالر f را طوری بیابید که $\mathbf{v}=\nabla f$.

۳۱. $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ۳۲. $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۳۳. $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ۳۴. $\mathbf{v}=yz\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

۳۵. $\mathbf{v}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})/(x^2+y^2)$ ۳۶. $\mathbf{v}=e^x\sin y\,\mathbf{i}+e^x\cos y\,\mathbf{j}$

۳۷. مشتق جهتی $f=x^2+y^2$ را درنقطهٔ $P:(2,2)$ درجهت بردارهای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}$ ، $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $-\mathbf{i}$ ، $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ، $-\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ پیدا کنید.

درهریك از حالات زیر مشتق جهتی f در P را درجهت $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

۳۸. $f=x^2-y^2,\quad P:(2,3),\quad \mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۳۹. $f=2x+3y,\quad P:(0,2),\quad \mathbf{a}=3\mathbf{j}$

۴۰. $f=x^{2}+y^{2}, \quad P:(1, 2), \quad \mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۴۱. $f=y/x, \quad P:(3, -1), \quad \mathbf{a}=9\mathbf{i}-3\mathbf{j}$

۴۲. $f=x+2y-z, \quad P:(1, 4, 0), \quad \mathbf{a}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۴۳. $f=x^{2}+y^{2}+z^{2}, \quad P:(2, 0, 3), \quad \mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۴۴. مشتقات جهتی تابع $f(x, y, z)$ درجهتهای x ، y و z چیست؟ در جهتهای منفی x ، y و z چیست؟

۴۵. فرض کنید r فاصلهٔ نقطهٔ‌مشخص P از نقطهٔ $Q:(x, y, z)$ باشد. سطوح تراز r را پیدا کنید. نشان دهید که ∇r برداری یکه درجهت P به Q است.

۴۶. نشان دهید که توابع ذکرشده در مسائل ۱ تا ۶ جوابهای معادلهٔ لاپلاس هستند.

گرادیان حاصل‌ضرب وغیره. در صورتی که توابع داده شده به اندازهٔ کافی مشتقپذیر باشند، نشان دهید که

۴۷. $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

۴۸. $\nabla(f^{n})=nf^{n-1}\nabla f$

۴۹. $\nabla(f/g)=(g\nabla f-f\nabla g)/g^{2}$

۵۰. $\nabla^{2}(fg)=g\nabla^{2}f+2\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^{2}g$

۹.۸ تبدیل دستگاههای مختصات و مؤلفه‌های بردار

حال تبدیلاتی‌را مشخص‌می کنیم که یك‌دستگاه مختصات دکارتی‌را به‌دستگاه دکارتی دیگری می‌برند، وتغییر مؤلفه‌های یك بردار‌را دراثر چنین تبدیلهایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. این‌مسئله، هم به‌دلائل نظری و هم به دلائل عملی، مسئله‌ای اساسی است[1]. دراین بحث به نتایج دوبخش بعدی نیاز پیدا خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم x ، y ، z و x^* ، y^* ، z^* دو دستگاه مختصات دکارتی دلخواه باشند. گیریم

$$\text{(الف)}\quad \mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \text{(ب)}\quad \mathbf{v}=v_1^*\mathbf{i}^*+v_2^*\mathbf{j}^*+v_3^*\mathbf{k}^* \qquad (1)$$

۱. می‌خواهیم این بخش‌کاملا مستقل ازفصل ۷ باشد، اما خواننده‌ای‌که با ماتریسها آشنایی دارد تشخیص می‌دهد‌که بحث فعلی ما درمورد تبدیلات و ماتریسهای متعامد است وقضایای ۱ و ۲ از قضیهٔ ۲ی بخش ۱۴.۷ نتیجه می‌شوند.

نمایش بردار مفروض $\mathbf{v}$ در این دو دستگاه باشد؛ دراینجا $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}^*$، $\mathbf{j}^*$، $\mathbf{k}^*$ به ترتیب بردارهای یکه درجهتهای مثبت x، y، z و x^*، y^*، z^* هستند. می‌خواهیم مؤلفه‌های v_1^*، v_2^*، v_3^* را برحسب v_1، v_2، v_3 بیان کنیم و بالعکس.

از (۱الف) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1 \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} + v_2 \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} + v_3 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}. \qquad (۲)$$

همین‌طور، ازضرب اسکالر $\mathbf{i}^*$ در (۱ب) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}^* + v_2^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}^* + v_3^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}^*.$$

چون درسمت راست حاصل اولین ضرب اسکالر یك است و بقیه صفر،

$$\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1^*.$$

از این رابطه و (۲) نتیجه می‌شود که

$$v_1^* = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}\, v_1 + \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}\, v_2 + \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}\, v^3,$$

همین‌طور

$$v_2^* = \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{i}\, v_1 + \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j}\, v_2 + \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k}\, v_3,$$
$$v_3^* = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i}\, v_1 + \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j}\, v_2 + \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k}\, v_3.$$

پس مؤلفه‌های بردار $\mathbf{v}$ را در یك دستگاه مختصات دکارتی می‌توان بـه صورت توابعی خطی از مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ دردستگاه مختصات دیگر بیان کرد.

برای اینکه فرمولهای تبدیل را به‌شکل ساده‌تری درآوریم، نمادهای زیر را به‌کار می‌بریم:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} = c_{11} & \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} = c_{12} & \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k} = c_{13} \\ \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{i} = c_{21} & \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j} = c_{22} & \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k} = c_{23} \\ \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i} = c_{31} & \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j} = c_{32} & \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k} = c_{33}. \end{array} \qquad (۳)$$

در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned} v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3. \end{aligned} \qquad (۴)$$

با استفاده از علامت جمع $\sum$، می‌توان (۴) را به‌صورت خلاصه‌تری نوشت:

$$(۴') \qquad v_k^* = \sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} v_l , \qquad k = ۱, ۲, ۳ .$$

به‌طرز مشابهی می‌توان فرمولهای معکوس زیر را به‌دست آورد:

$$(۵) \qquad \begin{aligned} v_۱ &= c_{۱۱} v_۱^* + c_{۲۱} v_۲^* + c_{۳۱} v_۳^* \\ v_۲ &= c_{۱۲} v_۱^* + c_{۲۲} v_۲^* + c_{۳۲} v_۳^* \\ v_۳ &= c_{۱۳} v_۱^* + c_{۲۳} v_۲^* + c_{۳۳} v_۳^* , \end{aligned}$$

خلاصه‌تر،

$$(۵') \qquad v_l = \sum_{m=۱}^{۳} c_{ml} v_m^* , \qquad l = ۱, ۲, ۳ .$$

توجه کنید که (۴) و (۵) شامل همان ضرایب c_{kl} هستند، ولی محل این‌ضرایب (به‌غیر از $c_{۱۱}$ ، $c_{۲۲}$ ، $c_{۳۳}$) همان نیست.

تعبیر هندسی ۹ ضریب c_{kl} بسیار ساده است. چون $\mathbf{i}$ و $\mathbf{i}^*$ بردارهای یکه هستند، از (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می‌شود که $c_{۱۱} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}$ کسینوس زاویهٔ بین محور x^* های مثبت ومحور xهای مثبت است. همین‌طور $c_{۱۲} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}$ کسینوس زاویهٔ بین x^* های مثبت و محور y های مثبت است، والی‌آخر.

ضرایب c_{kl} در روابط مهمی که هم‌اکنون به‌دست خواهند آمد، صدق می‌کنند. با قراردادن ($'۵$) در ($'۴$) می‌یابیم

$$(۶) \qquad v_k^* = \sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} v_l = \sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} \sum_{m=۱}^{۳} c_{ml} v_m^* = \sum_{m=۱}^{۳} v_m^* \left(\sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} c_{ml} \right),$$

که در آن $k = ۱, ۲, ۳$. مثلا هرگاه $k = ۱$ ، این رابطه چنین می‌شود

$$v_۱^* = v_۱^* \left(\sum_{l=۱}^{۳} c_{۱l} c_{۱l} \right) + v_۲^* \left(\sum_{l=۱}^{۳} c_{۱l} c_{۲l} \right) + v_۳^* \left(\sum_{l=۱}^{۳} c_{۱l} c_{۳l} \right) .$$

برای آنکه‌این‌رابطه به‌ازای هر بردار $\mathbf{v} = v_۱^* \mathbf{i}^* + v_۲^* \mathbf{j}^* + v_۳^* \mathbf{k}^*$ برقرار باشد، باید مجموع اول ۱ و دو مجموع دیگر صفر باشند. به‌ازای $k = ۲$ و $k = ۳$ وضع به همین منوال است. درنتیجه (۶) به‌ازای هر بردار برقرار است اگر و تنها اگر

$$(۷) \qquad \sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} ۰ & (k \neq m) \\ ۱ & (k = m) . \end{cases}$$

با استفاده از نماد کرؤنکر[1] یا **دلتای کرونکر**

$$\delta_{km} = \begin{cases} ۰ & (k \neq m) \\ ۱ & (k = m) \end{cases}$$

می‌توان (۷) را به‌صورت زیر نوشت :

$$\sum_{l=۱}^{۳} c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \qquad (k\,,\, m = ۱\,,\,۲\,,\,۳)\,. \tag{۷}'$$

با تشکیل سه‌بردار با مؤلفه‌های

$$c_{۱۱}\,,\, c_{۱۲}\,,\, c_{۱۳} \qquad c_{۲۱}\,,\, c_{۲۲}\,,\, c_{۲۳} \qquad c_{۳۱}\,,\, c_{۳۲}\,,\, c_{۳۳}$$

مشاهده می‌کنیم که طرف چپ ('۷) برابر حاصل‌ضرب اسکالر دوتا از این بردارهاست، وبنا به ('۷) این بردارها بردارهای یکهٔ متعامدند. ازاین‌رو حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ آنها یا دارای مقدار ۱+ است یا ۱−؛ یعنی

$$\begin{vmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} \end{vmatrix} = \pm ۱\,. \tag{۸}$$

بدون اثبات می‌پذیریم که اگر هردو دستگاه مختصات مورد بحث راستگرد (یا چپگرد) باشند، آنگاه مقداردترمینان فوق برابر ۱+ خواهدبود. درحالی‌که اگریکی ازدستگاهها راستگرد و دیگری چپگرد باشد، مقدار دترمینان برابر ۱ − می‌شود. اکنون نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر جمعبندی کرد.

قضیهٔ ۱ (قانون تبدیل درمورد مؤلفه‌های بردار)

مؤلفه‌های $v_۱$ ، $v_۲$ ، $v_۳$ و $v_۱^*$ ، $v_۲^*$ ، $v_۳^*$ ی بردار دلخواه $\mathbf{v}$ نسبت به‌دودستگاه‌مختصات دکارتی دلخواه را می‌توان به‌وسیلهٔ روابط (۴) و (۵) ازیکدیگر به‌دست آورد، در این‌روابط ضرایب c_{kl} از (۳) به‌دست می‌آیند و در (۷) و (۸) صدق می‌کنند.

با توجه به‌آنچه‌درمورد مؤلفه‌های بردار دیدیم، بلافاصله می‌توانیم فرمولهای‌مربوط به تبدیل یك دستگاه مختصات دکارتی به هر دستگاه مختصات دکارتی دیگر را به صورت زیر به‌دست آوریم.

هر گاه xyz و $x^*y^*z^*$ دستگاههای مختصاتی با مبدأ مشترك باشند،آنگاه $\mathbf{v}$ را مقید به مبدأ کرده آن را به‌صورت یك‌بردار مکانی با نقطه انتهایی Q تصورکرد. هرگاه

---

۱. لئوپولدکرونکر (Leopold Kronecker)، ۱۸۲۳–۱۸۹۱، ریاضیدان آلمانی که‌سهم مهمی در پیشرفت جبر ونظریه اعداد دارد.

(x, y, z) و (x^*, y^*, z^*) مختصات Q نسبت به‌دودستگاه باشند، آنگاه در (۴) و (۵) داریم

$$v_1 = x, \quad v_2 = y, \quad v_3 = z \quad و \quad v_1^* = x^*, \quad v_2^* = y^*, \quad v_3^* = z^*.$$

درنتیجه (۴) و (۵)، وقتی آنها را به‌جای v_1، v_2، v_3 و v_1^*، v_2^*، v_3^* برحسب x، y، z و x^*، y^*، z^* بنویسیم، تبدیلات دودستگاه مختصات با مبدأ مشترک را نمایش می‌دهند.

کلیترین شکل تبدیل دستگاههای مختصات دکارتی به‌یکدیگر را می‌توان به‌تبدیلی از نوع بالا و یک انتقال تجزیه کرد. درانتقال، تفاوت بین مختصات متناظر، عددی ثابت است. باتوجه به‌آنچه گفته شد داریم

قضیهٔ ۲ (قانون تبدیل درمورد مختصات دکارتی)

تبدیل هردستگاه مختصات دکارتی xyz به‌هر دستگاه مختصات دکارتی مانند $x^*y^*z^*$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x^* &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + b_1 \\ y^* &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + b_2 \\ z^* &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + b_3 \end{aligned} \tag{9}$$

و بالعکس

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x^* + c_{21}y^* + c_{31}z^* + \bar{b}_1 \\ y &= c_{12}x^* + c_{22}y^* + c_{32}z^* + \bar{b}_2 \\ z &= c_{13}x^* + c_{23}y^* + c_{33}z^* + \bar{b}_3 \end{aligned} \tag{10}$$

که ضرایب c_{kl} از (۳) به‌دست می‌آیند و باید در (۷) و (۸) صدق کنند و b_1، b_2، b_3، $\bar{b}_1$، $\bar{b}_2$، $\bar{b}_3$ اعدادی ثابتند.

کاربردهای مهم این قضایا دردوبخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل بخش ۹.۸

۱. کلیهٔ ضرایبی را که در ('۴) آمده‌اند تعبیر هندسی کنید.

ثابتهای c_{kl} و b_k را طوری تعیین کنید که (۹) نمایش دهندهٔ تبدیلهای زیر (مسائل ۲ تا ۷) باشد.

۲. انتقالی که مبدأ را به‌نقطهٔ (۲ , ۳ , ۱) می‌برد

۳. انتقالی که نقطهٔ (۰ , ۱ − , ۲) را به‌نقطهٔ (۲ , ۴ , ۱) می‌برد

۴. انعکاس نسبت به‌صفحهٔ xy

۵. انعکاس نسبت به‌صفحه $y=x$

۶. دوران حول محور x ها به‌اندازهٔ زاویهٔ θ

۷. دورانی که محورهای x^* ، y^* ، z^* مثبت را به‌ترتیب بر محورهای x ، y ، z مثبت منطبق کند

۸. درمسائل ۲ تا ۷ مقادیر دترمینان (۸) چقدر است؟

۹. (۵) را به‌دست آورید.

۱۰. از (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می‌شود که مقدار حاصل‌ضرب اسکالر مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی است. با استفاده از (۴) یا (۵) همین بخش، نشان دهید که این‌حکم از (۸) بخش ۵.۶ نیز نتیجه می‌شود.

۱۰.۸ دیورژانس میدان برداری

فرض می‌کنیم $\mathbf{v}(x\,,\,y\,,\,z)$ تابع برداری مشتق‌پذیری باشد، که در آن x ، y ، z مختصات دکارتی درفضا و v_1 ، v_2 ، v_3 مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ هستند. دراین‌صورت تابع

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{1}$$

را **دیورژانس** $\mathbf{v}$ یا دیورژانس میدان برداری تعریف شده با $\mathbf{v}$ می‌نامند.
نماد رایج دیگر برای دیورژانس $\mathbf{v}$ نماد $\nabla \cdot \mathbf{v}$ است،

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=\nabla \cdot \mathbf{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})$$

$$=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\,,$$

که در آن «حاصل‌ضرب» $(\partial/\partial x)v_1$ در حاصل‌ضرب نقطه‌ای ظاهر می‌شود به معنی مشتق جزئی $\partial v_1/\partial x$ است وغیره، و این چیزی بیش از یک نمادگذاری ساده نیست. توجه کنید که $\nabla \cdot \mathbf{v}$ به‌معنی کمیت اسکالر $\operatorname{div}\mathbf{v}$ است و حال آنکه ∇f به‌معنی بردار $\operatorname{grad} f$ است، که دربخش ۸.۸ تعریف شد.
مثلاً، اگر

$\mathbf{v}=۳xz\,\mathbf{i}+۲xy\,\mathbf{j}-yz^{۲}\,\mathbf{k}$ ، آنگاه $\operatorname{div}\mathbf{v}=۳z+۲x-۲yz$.

بعداً خواهیم دیدکه دیورژانس معنی فیزیکی مهمی دارد. واضح است کــه مقادیر تابعی که مشخص کنندهٔ یك خاصیت فیزیکی یاهندسی است باید مستقل ازانتخاب مختصات باشد؛ یعنی مقادیر آن باید نسبت به تبدیلات مختصات ناوردا باشند.

قضیهٔ ۱ (ناوردایی دیورژانس نسبت به‌تبدیل مختصات)

مقادیر $\operatorname{div}\mathbf{v}$ فقط به‌نقاط فضا (و البته به $\mathbf{v}$) بستگی دارد و مستقل از انتخاب مختصات در(۱) است، به‌طوری‌که نسبت بـه دستگاه مختصـات دکارتی x^* ، y^* ، z^* و مؤلفه‌های متناظر $v_۱^*$ ، $v_۲^*$ ، $v_۳^*$ از $\mathbf{v}$ تابع $\operatorname{div}\mathbf{v}$ چنین داده می‌شود:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_۱^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v_۲^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v_۳^*}{\partial z^*} \qquad (۲)$$

اثبات. می‌خواهیم از (۱) به (۲) برسیم. برای اینکه فرمولها ساده‌تر شوند، نمادگذاری زیر را اختیار می کنیم:

$x_۱=x$ ، $x_۲=y$ ، $x_۳=z$ و $x_۱^*=x^*$ ، $x_۲^*=y^*$ ، $x_۳^*=z^*$.

در این‌صورت فرمول (۹) بخش ۹.۸ را می‌توان به‌صورت مختصر زیر نوشت:

$$x_k^*=\sum_{l=۱}^{۳}c_{kl}x_l+b_k \qquad (k=۱\,,\,۲\,,\,۳)\,. \qquad (۳)$$

با توجه به‌قاعدهٔ زنجیری درمورد توابع چندمتغیره (بخش ۷.۸) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\sum_{k=۱}^{۳}\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*}\ \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l}\,. \qquad (۴)$$

دراین مجموع، همان‌طورکه از (۳) نتیجه می‌شود، داریم $\partial x_k^*/\partial x_l=c_{kl}$. باتوجه به ('۵) بخش ۹.۸،

$$v_l=\sum_{m=۱}^{۳}c_{ml}v_m^*\,.$$

با مشتقگیری از این رابطه داریم

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*}=\sum_{m=۱}^{۳}c_{ml}\,\frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}\,.$$

هرگاه این عبارات را در (۴) قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{m=۱}^{۳} c_{ml}\frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_k{}^*}c_{kl} \qquad (l=۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳).$$

با جمع این سه‌فرمول داریم

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\sum_{l=۱}^{۳}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{m=۱}^{۳}\sum_{l=۱}^{۳}c_{kl}c_{ml}\frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_k{}^*}\cdot$$

بنا به $(۷')$ بخش ۹.۸، این تساوی به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{m=۱}^{۳}\delta_{km}\frac{\partial v_m{}^*}{\partial x_k{}^*}=\frac{\partial v_۱{}^*}{\partial x_۱{}^*}+\frac{\partial v_۲{}^*}{\partial x_۲{}^*}+\frac{\partial v_۳{}^*}{\partial x_۳{}^*}\cdot$$

مشاهده می‌کنیم که عبارت طرف راست با عبارت سمت‌راست (۲) یکسان است، وبدین‌ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

هرگاه تابع اسکالر $f(x\ ,\ y\ ,\ z)$ دوبار مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

وبا توجه به (۱)،

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}\cdot$$

عبارت سمت راست لاپلاسی f است (ر.ك. بخش ۸.۸) . بنابراین

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\nabla^۲ f\cdot \qquad (۵)$$

مثال۱. نیروی گرانشی

نیروی گرانشی $\mathbf{p}$ کـه درمثال ۴ بخش ۸.۸ مورد بحث قرار گرفت برابر گرادیان تابع اسکالر $f(x\ ,\ y\ ,\ z)=c/r$ است،که‌درمعادلهٔلاپلاس $\nabla^۲ f=۰$ صدق‌می‌کند. برطبق (۵)، این بدان معنی است که $\operatorname{div}\mathbf{p}=۰$ (به‌ازای $r>۰$). ▲

مثال زیرکه از هیدرودینامیك گرفته‌شده‌است، نشان‌دهندهٔ اهمیت فیزیکی دیورژانس میدان بـرداری است. تعبیر فیزیکی دیورژانس با جزئیات بیشتر بعداً ارائه می‌شود (در بخش ۹.۹).

مثال۲. حرکت سیال تراکم‌پذیر

حرکت یك‌سیال را درناحیه‌ای مانند R که‌دارای چشمه یا چاهك‌نیست، یعنی درناحیه‌ای

که درهیچ نقطهٔ آن سیال تولید نمی‌شود و ازبین نمی‌رود، در نظرمی گیریم. دربحث ما، مفهوم حالت‌سیال، گاز وبخار را نیز شامل‌می‌شود. سیالات به‌معنی اخص کلمه، یامایعات، تراکم‌پذیری کمی دارند، که دراغلب مسائل‌می‌توان‌آن را نادیده گرفت. ولی‌تراکم‌پذیری گاز وبخار بسیار زیاد است، یعنی، چگالی آنها ρ ($=$جرم برواحد حجم) به مختصات نقاط فضا بستگی دارد (و ممکن است به‌زمان نیز بستگی داشته باشد). فرض می کنیم که سیال مورد نظرما تراکم‌پذیر است.

جریانی را در نظرمی گیریم که از مکعب مستطیل کوچك W، که ابعاد[1] آن Δx، Δy، Δz هستند و یالهایش موازی بامحورهای مختصاتند، می گذرد (شکل ۱۶۹). حجم W برابر است با $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$. فرض می کنیم

$$\mathbf{v}=v_1\,\mathbf{i}+v_2\,\mathbf{j}+v_3\,\mathbf{k}$$

بردار سرعت سیال باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathbf{u}=\rho\,\mathbf{v}=u_1\,\mathbf{i}+u_2\,\mathbf{j}+u_3\,\mathbf{k} \tag{۶}$$

وفرض می کنیم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ توابع برداری پیوسته مشتقپذیری از x، y، z و t باشند. حال با بررسی شاری که از وجه‌ه W می گذرد، یعنی با درنظر گرفتن کل جرمی که در واحد زمان از W خارج می‌شود، تغییر جرم داخل W را حساب می کنیم. جریانی را در نظر می گیریم که از وجه سمت‌چپ W که مساحت‌آن $\Delta x\Delta z$ است عبورمی کند. مؤلفه‌های v_1 و v_3 ی $\mathbf{v}$ موازی با صفحه‌اند و هیچ نقشی دراین‌جریان ندارند. ازاین‌رو جرم سیالی که طی‌فاصلهٔ زمانی کوتاه Δt ازطریق این‌صفحه وارد مکعب مستطیل می‌شود تقریباً برابر است با

$$(\rho\,v_2)_y\Delta x\,\Delta z\,\Delta t=(u_2)_y\Delta x\,\Delta z\,\Delta t$$

در این رابطه شاخص y نشان می‌دهد که عبارت به صفحهٔ طرف چپ مربوط می‌شود. جرم سیالی که در همان فاصلهٔ زمانی از صفحهٔ مقابل خارج می‌شود تقریباً برابر است با $(u_2)_{y+\Delta y}\Delta x\,\Delta z\,\Delta t$، دراینجا هم شاخص $y+\Delta y$ نشان می‌دهد که عبارت به‌صفحهٔ راست مربوط است. تفاضل

$$\Delta u_2\Delta x\,\Delta z\,\Delta t=\frac{\Delta u_2}{\Delta y}\Delta V\,\Delta t \qquad [\Delta u_2=(u_2)_{y+\Delta y}-(u_2)_y]$$

مقدارتقریبی جرم تلف شده است. با بررسی دوجفت صفحهٔ موازی دیگرنیزدورابطهٔمشابه نتیجه می‌شود. هرگاه این سه رابطه را با هم جمع کنیم، مقدارتقریبی جرم تلف شدهٔ کل

---

۱. معمول‌است که مقادیر کوچك‌را با Δ نشان می‌دهند؛ البته این Δ هیچ ارتباطی با لاپلاسی ندارد.

در W درفاصلهٔ زمانی Δt به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x}+\frac{\Delta u_2}{\Delta y}+\frac{\Delta u_3}{\Delta z}\right)\Delta V\Delta t$$

که درآن

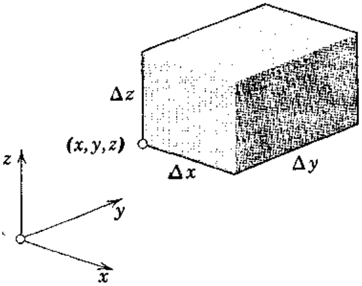
$$\Delta u_1=(u_1)_{x+\Delta x}-(u_1)_x \quad \text{و} \quad \Delta u_3=(u_3)_{z+\Delta z}-(u_3)_z.$$

جرم تلف شده در W متناسب با نرخ تغییرات چگالی نسبت به‌زمان است و بنابراین برابر است با

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V\Delta t.$$

هرگاه دو عبارت را مساوی هم قراردهیم و نتیجه را بر $\Delta V\Delta t$ تقسیم کنیم و فرض کنیم که Δx ، Δy ، Δz و Δt به‌سمت صفرمیل می‌کنند، به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$



شکل ۱۶۹. تعبیرفیزیکی دیورژانس

یا

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0 \qquad (7)$$

این‌رابطهٔ مهم، شرط بقای جرم یا **معادلهٔ پیوستگی** جریان سیال تراکم‌پذیر نامیده می‌شود.

هرگاه جریان پابرجا ، یعنی مستقل از زمان، باشد آنگاه $\partial\rho/\partial t=0$ ، و معادلهٔ پیوستگی چنین می‌شود:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 . \tag{۸}$$

هرگاه سیال تراکم‌ناپذیر باشد، آنگاه چگالی ρ ثابت است و (۸) چنین می‌شود:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \tag{۹}$$

این رابطه به **شرط تراکم‌ناپذیری** معروف است و نشان می‌دهدکه بین جریان خروجی و جریان ورودی یك عنصرحجم مفروض درهرلحظه موازنه برقرار است. روشن است‌که در استدلال ما این فرض‌که جریان دارای چشمه یا چاهکی نباشد ضروری است.

مسائل بخش ۱۰.۸

دیورژانس توابع برداری زیررا پیدا کنید.

۱. $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

۲. $y^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$

۳. $(x^2-3y^2)\mathbf{i}$

۴. $x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-z\mathbf{k}$

۵. $xyz(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

۶. $x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

۷. $yz^2\mathbf{j}-zx^2\mathbf{k}$

۸. $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

۹. آیا باتوجه به (۱) اسکالربودن $\operatorname{div}\mathbf{v}$ واضح است؟

فرمولهایی درمورد دیورژانس. نشان دهیدکه

۱۰. $\operatorname{div}(k\mathbf{v}) = k \operatorname{div}\mathbf{v}$ (ثابت k)

۱۱. $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla f$

۱۲. $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g$

۱۳. $\operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

۱۴. نشان دهیدکه معادلهٔ پیوستگی (۷) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = 0 .$$

با استفاده از فرمولی‌که درمسئلهٔ ۱۱ به‌دست آمد، دیورژانس توابع زیررا بیابید.

۱۵. $e^x(\sin y\,\mathbf{i}+\cos y\,\mathbf{j})$

۱۶. $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

۱۷. جریانی پابرجا راکه بردار سرعت آن $\mathbf{v}=y\mathbf{i}$ است درنظر بگیرید. نشان دهیدکه این جریان دارای خواص زیر است. تراکم‌ناپذیر است. ذراتی‌که درلحظهٔ $t=0$ درمکعب محدود به‌صفحات $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، $y=1$ ، $z=0$ ، $z=1$

قراردارند درلحظهٔ $t=۱$ حجمی برابر یك اشغال می‌کنند.

۱۸. جریانی‌پابرجا راکه دارای سرعت $\mathbf{v}=x\mathbf{i}$ است درنظرمی گیریم. نشان‌دهید هریك ازذرات دارای بردارمکان $\mathbf{r}(t)=c_۱e^t\mathbf{i}+c_۲\mathbf{j}+c_۳\mathbf{k}$ است، که $c_۱$ ، $c_۲$ ، $c_۳$ ثابت هستند، جریانی‌تراکم‌ناپذیراست، وذراتی که در $t=۰$ مکعب ذکرشده درمسئلهٔ ۱۷ را پرمی کنند درلحظهٔ $t=۱$ حجمی برابر e را اشغال می‌کنند.

مشتق‌جهتی $\operatorname{div}\mathbf{u}$ رادرنقطهٔ $P:(۴,۴,۲)$ درجهت‌نرمال‌خارجی کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۳۶$ پیداکنید هرگاه

۱۹. $\mathbf{u}=x^۴\mathbf{i}+y^۴\mathbf{j}+z^۴\mathbf{k}$ **۲۰.** $\mathbf{u}=xz\mathbf{i}+yx\mathbf{j}+zy\mathbf{k}$

۱۱.۸ تاو میدان برداری

فرض می‌کنیم x ، y ، z دستگاه دکارتی راستگردی درفضا باشد و

$$\mathbf{v}(x,y,z)=v_۱\mathbf{i}+v_۲\mathbf{j}=v_۳\mathbf{k}$$

تابع برداری مشتقپذیری باشد. آنگاه تابع

$$\operatorname{curl}\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ v_۱ & v_۲ & v_۳\end{vmatrix} \tag{۱}$$

$$=\left(\frac{\partial v_۳}{\partial y}-\frac{\partial y_۲}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_۱}{\partial z}-\frac{\partial v_۳}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_۲}{\partial x}-\frac{\partial v_۱}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

را **تاو** تابع برداری $\mathbf{v}$ یا تاو میدان برداری تعریف شده با $\mathbf{v}$ می‌نامند. درحالتی‌که دستگاه مختصات دکارتی چپگرد باشد، در جلوی نماد دترمینان در (۱) علامت منها ظاهر می‌شود و این با (۵) بخش ۶.۸ مطابقت دارد.

دربعضی ازکتابها به جای $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ از نماد $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ نیز استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۱. (ناوردایی تاو)

طول و جهت $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی درفضا هستند.

اثبات این قضیه را در مسئله ۱۹ به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

تاو در بسیاری از مسائل کاربردی نقش مهمی دارد. اهمیت آن با جزئیات بیشتر در بخش ۱۱.۹ بیان خواهد شد. درحال حاضر به‌ذکر چند مثال ساده و پاره‌ای نکات اکتفا می‌کنیم.

مثال ۱. دوران جسم صلب

درمثال ۳ بخش ۸.۶ مشاهده‌کردیم که دوران جسم صلب B حول محور مشخصی در فضا را می‌توان با برداری مانند $\mathbf{w}$ که اندازهٔ آن ω است و جهت آن جهت محور دوران است بیان کرد، دراینجا $\omega(>0)$ تندی زاویه‌ای دوران است، جهت $\mathbf{w}$ طوری است که اگر درآن جهت نگاه کنیم دوران را درجهت‌حرکت عقربه‌های ساعت می‌بینیم. بر طبق (۷) بخش ۸.۶، میدان سرعت دوران را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r}$$

که $\mathbf{r}$ بردارمکان نقطه‌ای‌متحرک‌است‌نسبت به‌دستگاه مختصات دکارتیی که مبدأ آن برمحور دوران واقع است. مختصات دکارتی راستگرد را طوری انتخاب می‌کنیم که $\mathbf{w}=\omega\mathbf{k}$؛ یعنی محور دوران را محور z ها می‌گیریم. آنگاه (ر. ک. مثال ۳ بخش ۱.۸)

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{r}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}$$

و بنا براین

$$\operatorname{curl}\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=2\omega\mathbf{k},$$

یعنی

$$\operatorname{curl}\mathbf{v}=2\mathbf{w}. \qquad (2)$$

پس، هرگاه جسم صلبی دوران‌کند، تاومیدان سرعت درجهت محوردوران است واندازهٔ آن مساوی دو برابر تندی زاویه‌ای دوران، ω، است.

توجه کنیدکه نتیجهٔ حاصل بستگی بـه انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا ندارد. ▲

درمورد هرتابع اسکالر f که دوبار پیوسته مشتقپذیر باشد داریم

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=0, \qquad (3)$$

درستی این رابطه رامی‌توان بامحاسبهٔ مستقیم تحقیق کرد. ازاین‌رو هرگاه تابعی برداری برابر گرادیان تابعی اسکالرباشد، تاو آن، بردارصفراست. چون تاو دوران دریك‌میدان را مشخص می‌کند، اجمالا می‌توان گفت میدانهای گرادیانیی‌که حرکتی را توصیف می‌کنند، غیردورانی هستند. (هر گاه چنین میدانهایی درزمینهٔ دیگری مطرح شوند، ومیدان سرعت نباشند، آنها را معمولا پایستار می‌نامند؛ ر. ك. انتهای بخش ۸.۸.)

مثال ۲

میدان گرانشی که در مثال ۴ بخش ۸.۸ مورد بحث قرار گرفت دارای تاوی برابر صفر است، $\operatorname{curl}\mathbf{p}=0$. میدانی که در مثال ۱ بخش حاضر معرفی شد غیر دورانی نیست. یك میدان سرعت دیگری که مشابه با این میدان است از حرکت قهوه در فنجان حاصل می‌شود.

مسائل بخش ۸.۱۱

در مسائل زیر $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ را بیابید اگر نسبت به یك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داشته باشیم

۱. $\mathbf{v}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ ۲. $\mathbf{v}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$

۳. $\mathbf{v}=z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ ۴. $\mathbf{v}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{v}=xz\mathbf{i}-yz\mathbf{j}$ ۶. $\mathbf{v}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

درمسائل زیر $\mathbf{v}$، سرعت حرکت پابرجای سیالی، داده شده است. $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ را بیابید. آیا حرکت تراکم‌ناپذیراست؟ مسیرذرات را پیدا کنید.

۷. $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ ۸. $\mathbf{v}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$

۹. $\mathbf{v}=y^3\mathbf{i}$

فرمولهایی درمورد curl ، div و غیره. چنانچه‌مشتقگیری به‌اندازهٔکافی‌امکان داشته‌باشد، نشان دهید که

۱۰. $\operatorname{curl}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\operatorname{curl}\mathbf{u}+\operatorname{curl}\mathbf{v}$

۱۱. $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v})=0$

۱۲. $\operatorname{curl}(f\mathbf{v})=\operatorname{grad}f\times\mathbf{v}+f\operatorname{curl}\mathbf{v}$

۱۳. $\operatorname{crul}(\operatorname{grad}f)=0$

۱۴. $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{v}$

۱۵. $\operatorname{div}(g\nabla f\times f\nabla g)=0$

فرض می کنیم نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد $\mathbf{u}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$. پیدا کنید

۱۶. $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, $\operatorname{curl}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ ۱۷. $\mathbf{v}\times\operatorname{curl}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\times\operatorname{curl}\mathbf{v}$

۱۸. بامحاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که، درمثال ۲ ، $\operatorname{curl}\mathbf{p}=0$.

۱۹. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۲۰. با استفاده از مسئلهٔ ۱۲ نشان دهید که به ازای بردار $\mathbf{w}$ که جهت آن ثابت است، هرگاه $\operatorname{crul}\mathbf{w}\neq 0$، آنگاه $\operatorname{crul}\mathbf{w}$ بر $\mathbf{w}$ عمود است.

۹

انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح. قضایای انتگرال

دراین فصل انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح را تعریف می‌کنیم وچند کاربرد مهم آنها راکه درمسائل فیزیکی ومهندسی به دفعات پیش می‌آیند بررسی می‌کنیم. خواهیم‌دید که انتگرال روی خط تعمیمی طبیعی ازانتگرال معین است، و انتگرال روی سطح تعمیمی است ازانتگرال دوگانه.

انتگرال روی خط را می‌توان به انتگرال دوگانه (بخش ۴.۹) یا انتگرال سطح (بخش ۱۰.۹) تبدیل کرد، وبالعکس. انتگرال سه‌گانه را می‌توان به‌انتگرال‌سطح تبدیل کرد (بخش۸.۹). این‌تبدیلها ازاهمیت عملی‌زیادی برخوردارند. فرمولهای گاوس، گرین، و استوکس که بااین‌تبدیلهامتناظرنددربسیاری‌ازکاربردها ابزار پرقدرتی‌محسوب می‌شوند همچنانکه درمسائل نظری هستند. خواهیم دیدکه این فرمولها سبب می‌شوند معنی فیزیکی دیورژانس و تاو تابع برداری را بهتردرك کنیم.

پیشنیاز این فصل: حساب انتگرال مقدماتی و فصل ۸.

بخشهایی‌که برای دوره‌های کوتاهتر قابل حذفند: ۶.۹، ۹.۹، ۱۱.۹.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، بخش C

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲

۱.۹ انتگرال روی خط

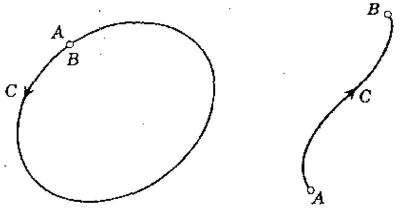
مفهوم انتگرال روی خط تعمیمی ساده وطبیعی از مفهوم انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

است. در (۱) از a تا b درطول محور x ها انتگرال می گیریم وانتگران f تابعی‌است که در هر نقطهٔ بین a و b تعریف شده است. در مورد انتگرال روی خط در طول یك منحنی مانند C درفضا (یا در صفحه) انتگرال می گیریم و انتگران f تابعی است که در هر نقطهٔ C تعریف شده است. (از این‌رو شاید انتگرال روی منحنی برای این کار اسم مناسبتری باشد ولی انتگرال روی خط اصطلاحی استاندارد است.)

روش تعریف انتگرال روی خط کاملا شبیه روش تعریف انتگرال معین است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آن آشنا شده‌ایم. به‌طریق زیر عمل می کنیم.

منحنی‌فضایی C را درنظرمی گیریم. باانتخاب‌یکی ازدوجهت درطول C به‌عنوان جهت مثبت منحنی C را جهت‌دار می‌کنیم. جهت مخالف را جهت منفی می‌نامیم. فرض می‌کنیم که باتوجه به‌جهت‌انتخاب‌شده A معرف ابتدا و B معرف‌انتهای C باشد. (ممکن است این نقاط همان‌طورکه در شکل ۱۷۵ ب دیده می‌شود برهم منطبق باشند، در چنین



شکل۱۷۰. منحنی جهت‌دار

حالتی C بسته است.)

فرض می کنیم C یك منحنی ساده (بخش ۳.۸) بوده و دارای نمایشی به‌صورت

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} \qquad (a \leqslant s \leqslant b) \qquad (2)$$

باشد (s طول قوس C است؛ ر.ك. بخش۴.۸) به‌طوری‌که $\mathbf{r}(s)$ پیوسته بوده ودارای مشتق مرتبهٔ اول پیوستهٔ $\mathbf{r}'(s)$، که به‌ازای هر s متعلق به‌فاصلهٔ موردنظر مخالف بردار صفر است، باشد. در این‌صورت C یك **منحنی هموار** است؛ یعنی منحنی C در هرنقطه ازنقاط خود دارای مماسی یکتاست که جهت‌آن درطول منحنی به‌طورپیوسته تغییرمی کند.

فرض می کنیم $f(x, y, z)$ تابع مفروضی باشدکه (لااقل) در هر نقطه از C

تعریف شده و تابعی پیوسته از s باشد. C را بـه n قسمت دلخواه تقسیم مـی‌کنیم (شکل ۱۷۱)؛ فرض می‌کنیم $P_{\circ}(=A)$ ، $P_{۱}$ ، $P_{۲}$ ، . . . ، $P_n(=B)$ نقاط انتهایی این قسمتها و

$$s_{\circ}(=a) < s_{۱} < s_{۲} < \cdots < s_n(=b)$$

مقادیر s نظیر آنها باشند. حال روی هرقسمت نقطهٔ دلخواهی، مثلا نقطه $Q_{۱}$ را بین $P_{\circ}$ و $P_{۱}$ ، نقطهٔ $Q_{۲}$ را بین $P_{۱}$ و $P_{۲}$ وغیره، انتخاب می‌کنیم. مقادیر f را در این نقاط $Q_{۱}$ ، $Q_{۲}$ ، . . . ، Q_n درنظر گرفته و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J_n = \sum_{m=۱}^{n} f(x_m, y_m, z_m)\Delta s_m$$

که در آن x_m ، y_m ، z_m مختصات Q_m هستند و

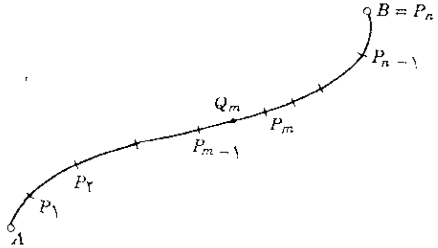
$$\Delta s_m = s_m - s_{m-۱}.$$

این‌عمل را برای هر $n = ۲, ۳, \ldots$ به‌روشی کاملا مستقل انجام می‌دهیم اما به‌طوری که بزرگترین Δs_m ، وقتی که n به‌بینهایت میل کند، به‌سمت صفر میل کند. بدین طریق دنباله‌ای از اعداد حقیقی $J_{۲}$ ، $J_{۳}$ ، . . . به‌دست می‌آوریم. حد این دنباله را **انتگرال روی خط** f در طول C از A تا B می‌نامند و به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds.$$

منحنی C را **مسیر انتگرالگیری** می‌نامند.

چون، بنا به‌فرض، f پیوسته و C هموار است، حد مزبور وجود دارد و مستقل از



شکل ۱۷۱. تقسیم جزئی C

انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط Q_m است. در واقع، وضعیت نقطه P روی C بـا مقدار نظیر طول قوس s معین می‌شود؛ چون A و B به ترتیب نظیر $s=a$ و $s=b$ هستند، داریم

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\, ds \qquad (۳)$$

از این‌رو انتگرال روی خط مساوی با انتگرال معین طرف راست (۳) است که در مورد آن، همان‌طور که درحساب دیفرانسیل و انتگرال دیدیم، حکم بالا برقرار است.

فرض کلی

در این کتاب فرض می‌کنیم که همهٔ مسیرهای مربوط به انتگرال روی خط **هموار تکه‌ای** است؛ یعنی هر مسیر متشکل از تعدادی متناهی منحنی هموار است.

برای نشان دادن انتگرال روی خط، روی مسیر بستهٔ C، گاهی اوقات ازعلامت

$$\oint_C \qquad \left(\text{به جای } \int_C\right)$$

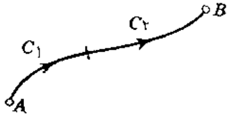
استفاده می‌شود.

از تعریف نتیجه می‌شود که خواص آشنای انتگرال معین معمولی در مورد انتگرال روی خط نیز صادقند:

(الف) $$\int_C k f\, ds = k\int_C f\, ds \qquad (k \text{ ثابت})$$

(ب) $$\int_C (f+g)\, ds = \int_C f\, ds + \int_C g\, ds \qquad (۴)$$

(پ) $$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds$$



شکل ۱۷۲. فرمول (۴ پ)

توجه کنید که در (۴ پ) مسیر C به دوقوس C_1 و C_2 که هم‌جهت با C هستند، تقسیم شده‌است (شکل ۱۷۲). در (۴ ب) جهت C برای هر سه انتگرال یکی است. هر گاه جهت

انتگرالگیری درطول C عوض شود، مقدار انتگرال در ۱ − ضرب می‌شود.
مثالهای مربوطه دربخشهای بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲.۹ محاسبهٔ انتگرال روی خط

انتگرال‌روی خط را با تبدیل آن به انتگرال معین‌محاسبه می‌کنند. این‌کار بسیارساده است و با نمایش دادن مسیرانتگرالگیری C به‌صورت زیرانجام می‌شود.
اگر C به‌صورت

$$\mathbf{r}(s)=x(s)\,\mathbf{i}+y(s)\,\mathbf{j}+z(s)\,\mathbf{k} \qquad a\leqslant s\leqslant b$$

نمایش‌داده شود (s طول‌قوس C)، ازفرمول زیراستفاده می‌کنیم [ر.ک. (۳) بخش ۱.۹]

$$\int_C f(x,\,y,\,z)\,ds=\int_a^b f[x(s),\,y(s),\,z(s)]\,ds. \tag{۱}$$

هرگاه C به‌صورت

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k} \qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

نمایش داده شود (t پارامتردلخواه)، ازفرمول زیراستفاده می‌کنیم:

$$\int_C f(x,\,y,\,z)\,ds=\int_{t_0}^{t_1} f\,[x(t),\,y(t),\,z(t)]\,\frac{ds}{dt}\,dt, \tag{۲}$$

که درآن، بنابر (۳) بخش ۴.۸،

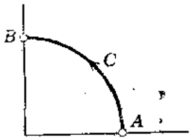
$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}.$$

دراینجا فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ پیوسته باشند و $\dot{\mathbf{r}}(t)\neq 0$، واین بافرض کلیی که دربخش قبل داشتیم سازگاراست.
حال فرمول (۲) را به‌دست می‌آوریم. به‌جای $\mathbf{r}(t)$ می‌نویسیم

$$\tilde{\mathbf{r}}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+\tilde{y}(t)\,\mathbf{j}+\tilde{z}(t)\,\mathbf{k}.$$

ازاینجا طول قوس $s(t)$ را به‌دست می‌آوریم. حال قرار می‌دهیم $\mathbf{r}(s(t))=\tilde{\mathbf{r}}(t)$؛ یعنی $x(s(t))=\tilde{x}(t)$ وغیره. آنگاه با استفاده از قاعدهٔ جایگذاری درمورد انتگرال معین، طرف راست (۱) چنین می‌شود:

$$\int_a^b f\,[x(s),\,y(s),\,z(s)]\,ds=\int_{t_0}^{t_1} f\,[\tilde{x}(t),\,\tilde{y}(t),\,\tilde{z}(t)]\,\frac{ds}{dt}\,dt.$$



شکل ۱۷۳. مثال ۱

این انتگرال صرف‌نظر از اختلاف درعلامتگذاری، همان انتگرال (۲) است. ▲

فرمول (۲) در بیشتر کاربردها مورد استفاده قرار می گیرد زیرا، در اغلب کاربردها، یا نمایش $\mathbf{r}(t)$ دردست است ویا به‌سادگی می‌توان آن را به‌دست آورد.

مثال ۱. کاربردی از (۱)

از $f(x, y) = ۲xy^۲$ روی قوس مستدیر شکل ۱۷۳ انتگرال بگیرید:

$$\mathbf{r}(s) = \cos s\,\mathbf{i} + \sin s\,\mathbf{j} \qquad ۰ \leqslant s \leqslant \pi/۲.$$

نظر به اینکه $x(s) = \cos s$ و $y(s) = \sin s$، فرمول (۱) نتیجه می‌دهد

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_C ۲xy^۲\,ds = \int_۰^{\pi/۲} ۲\cos s\,\sin^۲ s\,ds$$

$$= ۲\int_۰^۱ u^۲\,du = \frac{۲}{۳} \qquad (\sin s = u).$$

مثال ۲. کاربردی از (۲)

مطلوب است محاسبهٔ $\int_C xy^۳ ds$، که درآن C قطعه‌ای از خط $y = ۲x$ است که در صفحهٔ xy نقاط $A: (-۱, -۲, ۰)$ و $B: (۱, ۲, ۰)$ را به‌هم وصل می‌کند.

C را می‌توان به صورت[۱]

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + ۲t\,\mathbf{j} \qquad -۱ \leqslant t \leqslant ۱$$

نمایش داد. آنگاه

---

۱. البته چون $x = t$، می‌توانیم به‌جای t بنویسیم x.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{۵}\,.$$

روی C داریم $xy^۳ = t(۲t)^۳ = ۸t^۴$. درنتیجه

$$\int_C xy^۳ ds = ۸\sqrt{۵}\int_{-۱}^{۱} t^۴ dt = \frac{۱۶}{\sqrt{۵}} \approx ۷٫۱۶\,.$$

مثال ۳. استفاده از (۲) در مورد یك منحنی فضایی

مطلوب است محاسبهٔ $\int_C (x^۲+y^۲+z^۲)^۲ ds$ ، که درآن C قوسی از مارپیچ مستدیر (بخش ۳.۸)

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + ۳t\,\mathbf{k}$$

از $A:(۱,۰,۰)$ تا $B:(۱,۰,۶\pi)$ است ، داریم $ds/dt = \sqrt{۱۰}$. روی C ،

$$(x^۲+y^۲+z^۲)^۲ = [\cos^۲ t + \sin^۲ t + (۳t)^۲]^۲ = (۱+۹t^۲)^۲.$$

چون C با فاصلهٔ $۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$ متناظراست، داریم

$$\int_C (x^۲+y^۲+z^۲)^۲ ds = \sqrt{۱۰}\int_۰^{۲\pi} (۱+۹t^۲)^۲ dt$$

$$= \sqrt{۱۰}\,[۲\pi + ۶(۲\pi)^۳ + \frac{۸۱}{۵}(۲\pi)^۵] \approx ۵۰۶۴۰۰.$$

▲

انتگرالهای روی خطی راکه شامل توابعی هستندکه از تجربه بهدست می‌آیند، یا منجر به انتگرالهای معین پیچیده می‌شوند، می‌توان بااستفاده ازروشهای‌عددی انتگرالگیری محاسبه کرد.

دربسیاری ازکاربردها انتگران انتگرالهای روی خط به‌صورت زیرهستند:

$$g(x,y,z)\frac{dx}{ds} \text{ ،} \quad g(x,y,z)\frac{dy}{ds} \text{ ، یا} \quad g(x,y,z)\frac{dz}{ds} \qquad (۳)$$

که درآنها dx/ds ، dy/ds و dz/ds مشتقهای‌توابعی‌هستند که درنمایش‌پارامتری مسیرانتگرالگیری ظاهرمی‌شوند. دراین صورت می‌توان نوشت

$$\int_C g(x,y,z)\frac{dx}{ds}\,ds = \int_C g(x,y,z)\,dx\,, \qquad (۴)$$

و همین‌طور درمورد دوحالت دیگر. برای مجموعهایی از این نوع انتگرالها که درطول

مرزی مانند C گرفته می‌شوند، نماد ساده شدهٔ زیر را به‌کار می‌بریم

$$\int_C f\,dx+\int_C g\,dy+\int_C h\,dz=\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz)\,. \qquad (۵)$$

با استفاده از نمایش C، می‌توان دومتغیر از سه متغیرمستقل موجود درانتگرال را حذف کرد وسپس انتگرال معین حاصل راکه متغیرمستقل باقیمانده متغیرانتگرالگیری آن است، محاسبه کرد.

مثال ۴. کاربردی از (۴) و (۵)

انتگرال‌روی خط $I=\int_C [x^2 y\,dx+(x-z)\,dy+xyz\,dz]$ را محاسبه کنید؛ در این‌انتگرال C قوسی‌ازسهمی $y=x^2$ است که درصفحهٔ $z=2$ بین‌نقاط $A:(0,0,2)$ و $B:(1,1,2)$ قرار دارد (شکل ۱۷۴).

چون $y=x^2$، داریم $dy/dx=2x$ یا $dy=2x\,dx$. نظر به اینکه $z=2$ ثابت است، نتیجه می‌شود که انتگرال جملهٔ آخر انتگران صفر است. بنابراین

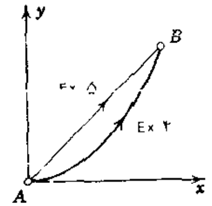
$$I=\int_0^1 [x^2x^2\,dx+(x-2)2x\,dx]=\int_0^1 (x^4+2x^2-4x)\,dx=-\frac{17}{15}\,.$$

مثال ۵. انتگرالگیری روی مسیرهای مختلفی‌که نقاط انتهایی یکسان دارند

انتگرال‌روی خط I راکه درمثال ۴ ذکرشد محاسبه‌کنید درصورتی که C این بارقسمتی از خط $y=x$، $z=2$ باشدکه بین‌نقاط $A:(0,0,2)$ و $B:(1,1,2)$ واقع‌است. دراینجا داریم $dy=dx$، بنابراین

$$I=\int_0^1 (x^3+x-2)\,dx=-\frac{5}{4}\,.$$

▲



شکل ۱۷۴. مسیرهای مربوط به مثالهای ۴ و ۵

در مثالهای ۴ و ۵ انتگرانها و نقاط انتهایی مسیرها یکی هستند، ولی مقادیر I با هم اختلاف دارند. این موضوع نشان دهندهٔ این واقعیت مهم است که در حالت‌کلی مقدار انتگرال روی خط یك تابع مفروض نـه فقط به نقاط انتهایی بلکه به شکل هندسی مسیر انتگرالگیری نیز بستگی دارد. این مطلب اساسی را دربخش ۱۲.۹ بررسی خواهیم‌کرد.

در بسیاری موارد، توابع f ، g و h در (۵) مؤلفه‌های v_1 ، v_2 ، v_3 ی تابع برداری

$$\mathbf{v}=v_1\,\mathbf{i}+v_2\,\mathbf{j}+v_3\,\mathbf{k}$$

هستند. در آن صورت داریم

$$v_1\,dx+v_2\,dy+v_3\,dz=\left(v_1\frac{dx}{ds}+v_2\frac{dy}{ds}+v_3\frac{dz}{ds}\right)ds\,,$$

عبارت واقع در پرانتز برابر حاصلضرب اسکالر بردار v در بردار مماس یکهٔ

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\,\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\,\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\,\mathbf{k}$$

(ر. ك. بخش ۵.۸)

است، که در آن $\mathbf{r}(s)$ مسیر انتگرالگیری C را نمایش می‌دهد. بنابراین،

$$\int_C(v_1\,dx+v_2\,dy+v_3\,dz)=\int_C\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds\,. \qquad (۶)$$

این رابطه را گاهی به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\int_C\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds=\int_C\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$$

که در آن

$$d\mathbf{r}=dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}\,,$$

اما باید متذکر شویم که این صرفاً یك نمادگذاری برای ساده‌کردن کار است.

مثال ۶. کار انجام شده توسط یك نیرو

ذره‌ای را که بر آن نیروی متغیر $\mathbf{p}$ وارد می‌شود درنظر می گیریم. فرض می کنیم این‌ذره در طول مسیر فضایی مفروضی مانند C تغییر مکان دهد. در این‌صورت W، کارانجام شده توسط $\mathbf{p}$ در این تغییرمکان، برابر انتگرال زیر است:

$$W=\int_C\mathbf{p}\cdot d\mathbf{r}\,, \qquad (۷)$$

انتگرال در جهت تغییرمکان گرفته می‌شود. این تعریف کار از تعریفی کـه در مثال ۱ ، بخش ۵.۶ داشتیم، و از تعریف انتگرال روی‌خط به‌صورت حد یك مجموع نتیجه‌می‌شود.

زمان t را می‌توان به‌عنوان متغیر انتگرالگیری به‌کاربرد. در این‌صورت

$$d\mathbf{r}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\mathbf{v}\,dt$$

که در آن $\mathbf{v}$ بردار سرعت است (ر.ك. بخش ۶.۸). از این‌رو انتگرال روی خط (۷) چنین می‌شود:

$$W=\int_{t_۰}^{t_۱}\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\,dt \qquad (۷')$$

در این انتگرال $t_۰$ و $t_۱$ مقادیر اولیه و نهایی t هستند. به‌علاوه، بنابر قانون دوم نیوتون (بخش ۶.۲) داریم

$$\mathbf{p}=m\ddot{\mathbf{r}}=m\dot{\mathbf{v}},$$

که درآن m جرم‌ذره است. هرگاه این‌مقدار $\mathbf{p}$ را در $(۷')$ قراردهیم، به‌دست‌می‌آوریم

$$W=\int_{t_۰}^{t_۱}m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\,dt=\int_{t_۰}^{t_۱}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{۲}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)dt=\int_{t_۰}^{t_۱}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{۲}|\mathbf{v}|^۲\right)dt$$

$$=\frac{m}{۲}|\mathbf{v}|^۲\Big|_{t_۰}^{t_۱};$$

یعنی کار انجام‌شده برابر افزایش انرژی جنبشی است. این یکی از قوانین اساسی مکانیك است.

مسائل بخش ۳.۹

اگـر جهت C را طوری انتخاب کنیم که انتگرالگیری در جهت مثبت C انجام شود، $\int_C(x^۲+y^۲)\,ds$ را محاسبه کنید:

۱. روی مسیر $y=۲x$ از $(۰ , ۰)$ تا $(۱ , ۲)$

۲. روی مسیر $y=-x$ از $(۱ , -۱)$ تا $(۲ , -۲)$

۳. عکس جهت‌حرکت‌عقربه‌های‌ساعت، درطول‌دایرهٔ $x^۲+y^۲=۴$ از $(۲, ۰)$ تا $(۰, ۲)$

۴. درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ از $(1, 0)$ تا $(-1, 0)$

۵. روی‌محور x ها از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ وسپس موازی بامحور y ها از $(1, 0)$ تا $(1, 1)$

۶. روی محور y ها از $(0, 0)$ تا $(0, 1)$ و سپس موازی محور x ها از $(0, 1)$ تا $(1, 1)$

۷. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C x^{-1}(y+z)\,ds$ که در آن C قوسی از دایره $x^2+y^2=4$, $z=0$ است که بین نقاط $(2, 0, 0)$ و $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ قرار دارد (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت).

مطلوب است محاسبهٔ $\int_C (y^2dx-2x^2dy)$

۸. درطول خط مستقیم از $(2, 0)$ تا $(1, 1)$

۹. درطول سهمی $y=x^2$ از $(0, 0)$ تا $(2, 4)$

۱۰. عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت در طول دایرهٔ $x^2+y^2=1$ از $(1, 0)$ تا $(0, 1)$

مطلوب است محاسبهٔ کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{p}=x\,\mathbf{i}-z\,\mathbf{j}+2y\,\mathbf{k}$ درتغییرمکان

۱۱. روی محور y ها از ۰ تا ۱

۱۲. روی سهمی $y=2x^2$ ، $z=2$ از $(0, 0, 2)$ تا $(1, 2, 2)$

۱۳. روی منحنی $z=y^4$ ، $x=1$ از $(1, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$

۱۴. روی مسیر بستهٔ متشکل از سه پاره‌خطی که از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ و از آنجا تا $(1, 1, 1)$ وسپس تا $(0, 0, 0)$ کشیده شده‌اند.

۱۵. روی خط راست $y=x$ ، $z=x$ از $(1, 1, 1)$ تا $(3, 3, 3)$

۱۶. روی منحنی $y=x$ ، $z=x^2$ از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$

۱۷. روی منحنی $y=x^3$ ، $z=2$ از $(1, 1, 2)$ تا $(2, 8, 2)$

۱۸. فرض کنید $\mathbf{p}$ تابعی برداری باشد که در همهٔ نقاط منحنی C تعریف شده است و فرض کنید $|\mathbf{p}|$ کراندار است، یعنی بر C ، $|\mathbf{p}|<M$ که درآن M عددی‌مثبت است. نشان دهید

$$\left|\int_C \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r}\right| < Ml \qquad (8)$$

که در آن l طول C است.

۱۹. با استفاده از (۸)، یك کران بالایی برای قدرمطلق W، کار انجام‌شده توسط نیروی $\mathbf{p}=x\,\mathbf{i}+y^{2}\,\mathbf{j}$ وقتی‌این نیرو درطول خط مستقیم‌از(۰ , ۰ , ۰) تا (۰ , ۱ , ۱)، تغییرمکان پیدا می‌کند، بیابید. با انتگرالگیری W را به‌دست‌آورید ونتایج را مقایسه کنید.

۲۰. با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (بخش ۶.۱۹)، $\int_{C} f(x\,,\,y)\,ds$ را در طول قطعه‌ای از خط مستقیم $y=x$ که در صفحهٔ xy بین نقاط (۰ , ۰) و (۱ , ۱) واقع است محاسبه‌کنید؛ درصورتی‌که $f(x\,,\,y)$ بامقادیرزیر داده شده باشد:

$$f(0\,,\,0)=1.0\,,\ f\left(\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{4}\right)=1.5\,,\ f\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)=1.7\,,\ f\left(\frac{3}{4}\,,\,\frac{3}{4}\right)=1.5\,,\ f(1\,,\,1)=1.0\,.$$

۳.۹ انتگرالهای دوگانه

درقسمتهای بعدی‌کتاب به‌مفهوم انتگرال دوگانه نیاز خواهیم داشت. گرچه خواننده با انتگرالهای دوگانه در حساب دیفرانسیل و انتگرال‌آشنا شده است، با این حال در اینجا مرورکوتاهی براین مبحث داریم.

در انتگرال معین

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

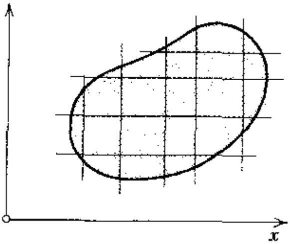
انتگران عبارت است از تابع $f(x)$ که به‌ازای هر x در فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ ازمحور x ها وجود دارد. در انتگرال دوگانه، انتگران تابعی مانند $f(x\,,\,y)$ است‌که به‌ازای هر$(x\,,\,y)$ درناحیهٔ‌کراندار بستهٔ[1] R ازصفحهٔ xy داده‌شده است.

تعریف‌انتگرال دوگانه‌کاملا شبیه تعریف انتگرال معین‌است. بارسم خطوطی‌موازی محورهای x و y ناحیهٔ R رابه‌ناحیه‌های کوچکتر تقسیم‌می‌کنیم (شکل۱۷۵). مستطیلهای داخل R را از ۱ تا n شماره گذاری می‌کنیم. در هر یك از این مستطیلها نقطه‌ای، مثلا $(x_k\,,\,y_k)$ در مستطیل k ام، اختیار می‌کنیم وسپس مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

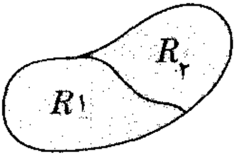
$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k\,,\,y_k)\,\Delta A_k$$

---

۱. «بسته» بدان معنی است‌که‌کرانه قسمتی ازناحیه است و «کراندار» به‌این مفهوم است‌که ناحیه را می‌توان در دایره‌ای با شعاع به‌قدرکافی بزرگ محاط‌کرد.



شکل ۱۷۵. تقسیم جزئی R



شکل ۱۷۶. فرمول (۱)

که درآن ΔA_k مساحت مستطیل k ام است. این کاررا به‌ازای مقادیر بزرگ صحیح‌ومثبت n به‌روشی کاملا مستقل طوری انجام می‌دهیم که وقتی n به‌سمت بینهایت میل می‌کند بزرگترین قطر مستطیلها به‌سمت صفر میل کند. بدین‌ترتیب دنباله‌ای ازاعدادحقیقی $J_{n_۱}$، $J_{n_۲}$، . . . به‌دست‌می‌آوریم. بافرض‌آنکه $f(x , y)$ در R پیوسته‌باشد و R باتعدادی متناهی منحنی هموار محصور شده باشد (ر. ك. بخش ۱۰۹)، می‌توان نشان داد[1] که این دنباله همگراست و حد آن مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط متناظر (x_k , y_k) است. این حد را **انتگرال دوگانهٔ** $f(x , y)$ بر ناحیهٔ R می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\iint_R f(x , y)\, dx\, dy \; .$$

از تعریف نتیجه می‌شود که انتگرالهای دوگانه دارای خواصی کاملا مشابه با انتگرالهای معین هستند. فرض می‌کنیم f و g توابعی از x و y باشندکه در ناحیهٔ R تعریف شده و پیوسته‌اند، آنگاه

$$\iint_R kf\, dx\, dy = k\iint_R f\, dx\, dy \qquad (k \text{ ثابت})$$

$$\iint_R (f+g)\, dx dy = \iint_R f\, dx\, dy + \iint_R g\, dx\, dy \qquad (۱)$$

$$\iint_R f\, dx\, dy = \iint_{R_۱} f\, dx\, dy + \iint_{R_۲} f\, dx\, dy \quad (\text{ر.ك.شکل ۱۷۶})$$

به‌علاوه لااقل یك‌نقطهٔ $(x_۰ , y_۰)$ در R وجود دارد به‌طوری که

---

۱. ر. ك. مرجع [A۳] ضمیمهٔ ۱.

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0)\,A, \tag{۲}$$

کـه در آن A مساحت R است؛ این را **قضیهٔ مقدار میانگین** برای انتگرالهای دوگانه می‌نامند.

انتگرالهای دوگانه برناحیهٔ R را با دوانتگرالگیری متوالی می‌توان محاسبه‌کرد. فرض می‌کنیم‌که R را بتوان با نامساویهایی به‌صورت

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad g(x) \leqslant y \leqslant h(x)$$

نشان‌داد (شکل ۱۷۷) و به‌طوری‌که $y=g(x)$, $y=h(x)$ نمایش‌کرانهٔ R باشد. از آنجا

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{۳}$$

نخست انتگرال درونی

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy$$

را محاسبه می‌کنیم. در این انتگرال معین، x نقش یك پارامتر را بازی می‌کند و نتیجهٔ انتگرالگیری تابعی از x، مثلا $F(x)$، است. سپس با انتگرالگیری از $F(x)$ نسبت به x از a تا b، مقدار انتگرال دوگانهٔ (۳) را به‌دست می‌آوریم.

به‌همین‌نحو، هرگاه R را بتوان با نامساویهایی به‌صورت

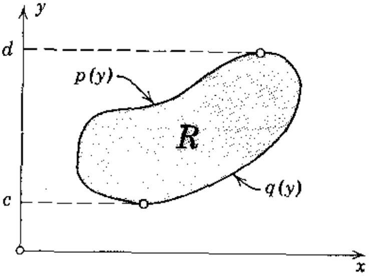
$$c \leqslant y \leqslant d, \qquad p(y) \leqslant x \leqslant q(y)$$

بیان‌کرد (شکل ۱۷۸)، آنگاه به‌دست می‌آوریم

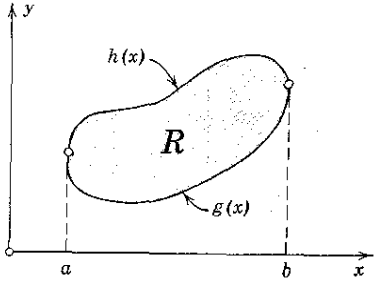
$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\,dx\right] dy; \tag{۴}$$

اکنون نخست نسبت بـه x انتگرال می‌گیریم وسپس انتگرال نتیجه راکـه تابعی از y است، از c تا d محاسبه می‌کنیم.

اگر نتوانیم R را با نامساویهای فوق نمایش دهیم، ولی بتوانیم آن را به‌تعدادی متناهی نواحی جزئی که به‌ترتیب بالا قابل نمایش هستند تقسیم کنیم، آنگاه قادر خواهیم بودکه از $f(x, y)$ به‌طور جداگانه بر هریك ازنواحی جزئی انتگرال‌بگیریم ونتایج را باهم جمع می‌کنیم؛ به‌این‌ترتیب مقدارانتگرال‌دوگانهٔ $f(x, y)$ برناحیهٔ R به‌دست می‌آید.



شکل ۱۷۷. محاسبهٔ انتگرال دوگانه



شکل ۱۷۸. محاسبهٔ انتگرال دوگانه

کاربردهای انتگرال دوگانه

انتگرالهای دوگانه دارای کاربردهای هندسی و فیزیکی گوناگونی هستند. مثلاً A، **مساحت** R، عبارت است از

$$A=\iint_R dx\,dy\,.$$

V، **حجم** زیر رویهٔ $z=f(x,y)\,(>0)$ و بالای ناحیهٔ R درصفحهٔ xy، عبارت است از (شکل ۱۷۹)

$$V=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

زیرا جملهٔ $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ در J_n، پاراگراف سوم همین بخش، نمایش حجم مکعب مستطیلی با قاعدهٔ ΔA_k وارتفاع $f(x_k,y_k)$ است.

فرض می‌کنیم $f(x,y)$ چگالی (جرم برواحد سطح) توزیع جرم درصفحهٔ xy باشد. آنگاه M، جرم کل R، عبارت است از

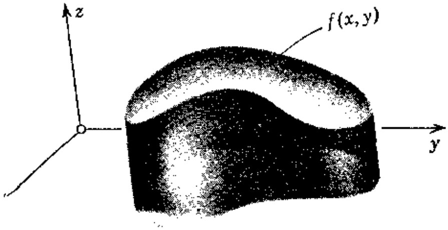
$$M=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

گرانیگاه جرم موجود در R دارای مختصات زیر است:

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_R y f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{1}{M}\iint_R x f(x,y)\,dx\,dy$$

گشتاورهای لختی جرم R نسبت به‌محورهای x و y که با I_x و I_y نشان‌داده می‌شوند عبارتند از

$$I_x=\iint_R y^2 f(x,y)\,dx\,dy\,,\qquad I_y=\iint_R x^2 f(x,y)\,dx\,dy\,,$$



شکل ۱۷۹. انتگرال دوگانه به‌مثابهٔ حجم

و گشتاور قطبی لختی حول مبدأ برابر است با

$$I_{\circ}=I_x+I_y=\iint_R (x^{۲}+y^{۲})\, f(x\,,\,y)\,dx\,dy.$$

مثال ۱. کاربردهای انتگرال دوگانه

فرض کنید $f(x\,,\,y)=۱$ چگالی جرم در ناحیهٔ R که با $\circ\leqslant x\leqslant ۱$ و $\circ\leqslant y\leqslant\sqrt{۱-x^{۲}}$ نمایش داده می‌شود (شکل ۱۸۰) باشد. گرانیگاه و گشتاورهای لختی I_x ، I_y ، $I_{\circ}$ را بیابید. جرم کل R عبارت است از

$$M=\iint_R dx\,dy=\int_{\circ}^{۱}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}dy\right]dx=\int_{\circ}^{۱}\sqrt{۱-x^{۲}}\,dx$$

$$=\int^{\pi/۲}\cos^{۲}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$(x=\sin\theta)$، که برابر با مساحت R است. مختصات گرانیگاه عبارتند از

$$\bar{x}=\frac{۴}{\pi}\iint_R x\,dx\,dy=\frac{۴}{\pi}\int_{\circ}^{۱}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}x\,dy\right]dx=\frac{۴}{\pi}\int_{\circ}^{۱}x\sqrt{۱-x^{۲}}\,dx$$

$$=-\frac{۴}{\pi}\int_{۱}^{\circ}z^{۲}\,dz=\frac{۴}{۳\pi}$$

$(\sqrt{۱-x^{۲}}=z)$، و به‌دلیل تقارن $\bar{y}=\bar{x}$. به‌علاوه

$$I_x=\iint_R y^{۲}dx\,dy=\int_{\circ}^{۱}\left[\int_{\circ}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}y^{۲}dy\right]dx=\frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{۱}(\sqrt{۱-x^{۲}})^{۳}\,dx$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{\circ}^{\pi/۲}\cos^{۴}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{۱۶},\quad I_y=\frac{\pi}{۱۶},\quad I_{\circ}=I_x+I_y=\frac{\pi}{۸}\approx \circ/۳۹۲۷.$$

روشی ساده‌تر برای محاسبهٔ I_x درمثال ۲ ارائه خواهد شد. ▲

اغلب اوقات لازم می‌شود که متغیرهای انتگرالگیری را درانتگرالهای دوگانه تغییر دهیم. درحساب دیفرانسیل وانتگرال خواندیم که درمورد انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

متغیر انتگرالگیری جدید u را می‌توان با قرار دادن

$$x = x(u)$$

معرفی کرد، که‌در آن تابع $x(u)$ درفاصله‌ای مانند $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ است وداریم $x(\alpha)=a$، $x(\beta)=b$ [یا $x(\alpha)=b$ ، $x(\beta)=a$] و هنگامی‌که u بین α و β تغییر می‌کند $x(u)$ بین a و b تغییر می‌کند. بدین ترتیب داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\frac{dx}{du}\,du\,,$$

مثلا فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$، $a=۰$، $b=۱$ وقرارمی‌دهیم $x=\sin u$. آنگاه

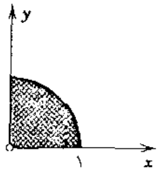
$$f[x(u)]=\sqrt{۱-\sin^۲ u}=\cos u\,,\quad \frac{dx}{du}=\cos u\,,\quad \alpha=۰\,,\quad \beta=\frac{\pi}{۲}\,,$$

و

$$\int_۰^۱ \sqrt{۱-x^۲}\,dx=\int_۰^{\pi/۲}\cos^۲ u\,du=\frac{\pi}{۴}\cdot$$

درمورد انتگرال دوگانهٔ

$$\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$$



شکل ۱۸۰. مثال ۱

متغیرهای جدید انتگرالگیری u، v را می‌توان با قرار دادن

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

معرفی کرد، توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ در ناحیه‌ای مانند R^* از صفحهٔ uv پیوسته‌اند ودارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند؛ این تابع هرنقطهٔ (u_0, v_0) از R^* را با نقطه‌ای مانند $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)]$ از R متناظر می‌کند و بالعکس و علاوه بر آن، ژاکوبی[1]

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

درسراسر R^* یا مثبت است ویا منفی. دراین صورت داریم

$$(۶) \qquad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f[x(u,v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv;$$

یعنی انتگران برحسب u و v بیان شده و $dx\,dy$ با حاصل ضرب $du\,dv$ در قدرمطلق ژاکوبی عوض شده است. برای اثبات به‌مرجع [A۲]، ضمیمهٔ ۱، مراجعه کنید.

مثلاً، **مختصات قطبی** r و θ را می‌توان با انتخاب

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

معرفی کرد. دراین صورت

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

و

$$(۷) \qquad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta,$$

که درآن R^* ناحیه‌ای درصفحهٔ $r\theta$ است متناظر با R که درصفحهٔ xy واقع است.

---

۱. این دترمینان بـه افتخار ریـاضیدان آلمانی کارل گوستاو یـاکوب ژاکوبی (یـاکوبی) (Carl Gustav Jacob Jacobi)، ۱۸۰۴ـ۱۸۵۱، نامگذاری شده است؛ ژاکوبی سهم بسزایی درکارهای مربوط به‌توابع بیضوی، معادلات با مشتق‌جزئی، مکانیک وحساب وردشهادارد.

مثال ۲. انتگرال دوگانه درمختصات قطبی

با استفاده از (۷)، برای I_x که درمثال ۱ معرفی شد به‌دست می‌آوریم

$$I_x=\iint_R y^2 dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3 dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{16}\cdot$$

مثال۳ . تغییر متغیر درانتگرال دوگانه

انتگرال دو گانه

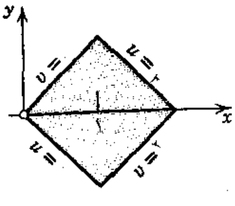
$$\iint_R (x^2+y^2)dx\,dy$$

را محاسبه کنید، ناحیهٔ R مربعی است که درشکل ۱۸۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل R پی می‌بریم که می‌توان از تبدیل $x+y=u$ ، $x-y=v$ استفاده کرد. پس $x=(u+v)/2$ ، $y=(u-v)/2$ ، ژاکوبی برابر است با

$$J=\frac{\partial(x\,,\,y)}{\partial(u\,,\,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

R متناظر است با مربع $0\leqslant u\leqslant 2$ ، $0\leqslant v\leqslant 2$، وبنابراین

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^2\frac{1}{2}(u^2+v^2)\frac{1}{2}du\,dv=\frac{8}{3}\cdot$$



شکل ۱۸۱. ناحیهٔ مثال ۳

مسائل بخش ۳.۹

هریك از انتگرالهای زیررا محاسبه کنید ودرهرمورد ناحیهٔ انتگرالگیری را مشخص کنید.

۱. $\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy\,dx$

۲. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

۳. $\int_0^1\int_{x^2}^{x} (1-xy)\,dy\,dx$

۴. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} xy\;dx\,dy$

۵. $\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,dx\,dy$

۶. $\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

حجم نواحی فضایی زیر را محاسبه کنید.

۷. چهاروجهی واقع بین صفحهٔ $x+y+z=1$ وصفحات مختصات درناحیهٔ اول

۸. چهاروجهی واقع بین صفحهٔ $6x+3y+2z=6$ وصفحات مختصات درناحیهٔ اول

۹. ناحیهٔ محدود بهاستوانههای $x^2+y^2=1$ و $y^2+z^2=1$

۱۰. ناحیهٔ محدود بهسطوح $y=x^2$ ، $x=y^2$ وصفحات $z=0$ ، $z=3$

$\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، مختصات گرانیگاه جرمی با چگالی $f(x, y)$ راکه در ناحیهٔ R توزیع شده است بیابید، اگر داشته باشیم

۱۱. $f(x, y)=1$ ، R : مستطیل $0\leqslant x\leqslant 2$ ، $0\leqslant y\leqslant 4$

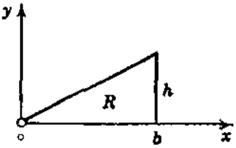
۱۲. $f(x, y)=1$ ، R : ناحیهٔ $x^2+y^2\leqslant a^2$ واقع درربع اول

۱۳. $f(x, y)=xy$ ، R : مستطیل $0\leqslant x\leqslant 4$ ، $0\leqslant y\leqslant 2$.

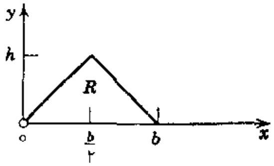
۱۴. $f(x, y)=x^2+y^2$ ، R : ناحیهٔ $x^2+y^2\leqslant 1$ درربع اول.

گشتاورهای لختی I_x ، I_y ، I_0 جرمی را که با چگالی $f(x, y)=1$ درناحیههای R (نشانداده‌شده‌دراشکال زیر)توزیع شده‌اند پیدا کنید (مهندسین‌درکاربردها به‌این گشتاورها نیاز دارند).

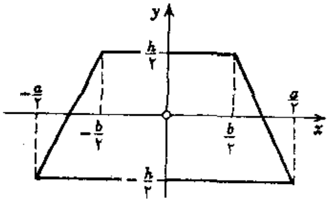
۱۵.



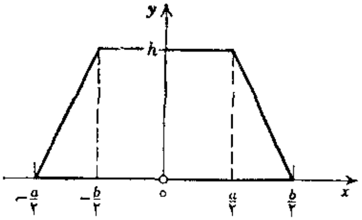
۱۶.



۱۷.



۱۸.



با استفاده از مختصات قطبی، $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ را محاسبه کنید، اگر داشته باشیم

۱۹. $f=x+y, \quad R:\ x^۲+y^۲\leqslant ۹,\ x\geqslant ۰$

۲۰. $f=\cos(x^۲+y^۲), \quad R:\ x^۲+y^۲\leqslant \frac{\pi}{۲}, \quad x\geqslant ۰$

۲۱. $f=(x^۲+y^۲)^۲, \quad R:\ x^۲+y^۲\leqslant ۴,\ y\geqslant ۰$

۲۲. $f=e^{-x^۲-y^۲}$ ، $R:$ طوق محدود به $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۴$

درهریك از تمرینات زیر ژاکوبی را بیابید و با یك استدلال هندسی آن را توجیه کنید.

۲۳. انتقال $x=u+a$ ، $y=v+b$.

۲۴. انبساط $x=au$ ، $y=bv$

۲۵. دوران $x=u\cos\Phi-v\sin\Phi$ ، $y=u\sin\Phi+v\cos\Phi$

۹.۴ تبدیل انتگرال دوگانه به‌انتگرال روی خط

انتگرال دوگانه بر یك ناحیهٔ صفحه‌ای را می‌توان به انتگرال روی خط برکرانهٔ ناحیه تبدیل کرد و بالعکس. این تبدیل در عمل جالب است زیرا ممکن است سبب آسانتر شدن محاسبهٔ انتگرال گردد؛ همچنین در مسائل نظری به تبدیل یك نوع انتگرال به‌نوع دیگر کمك می‌کند. این تبدیل را می‌توان با توجه به‌قضیهٔ اساسی زیر انجام داد.

قضیهٔ گرین[1] درصفحه (تبدیل انتگرال دوگانه به‌انتگرال روی خط وبالعکس)

فرض می‌کنیم R ناحیه‌ای کراندار وبسته درصفحهٔ xy باشدکه کرانهٔ آن، C، متشکل ازتعدادی متناهی منحنی هموار است. گیریم $f(x,y)$ و $g(x,y)$ توابعی باشندکه درتمام نقاط

۱. جرج گرین (George Green)، ۱۸۴۱ـ۱۹۷۳، ریاضیدان انگلیسی.

ناحیه‌ای شامل R پیوسته و دارای مشتقات جزئی $\partial f/\partial y$ و $\partial g/\partial x$ پیوسته هستند. آنگاه داریم.

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy=\int_C (f\,dx+g\,dy)\,; \qquad (۱)$$

انتگرالگیری درطول تمام C، کرانهٔ R، انجام می‌گیرد وجهت‌آن طوری‌است‌که ناظری‌که درجهت انتگرالگیری حرکت می‌کند ناحیهٔ R درطرف چپ خود می‌بیند (شکل ۱۸۲).

اثبات. نخست قضیه را درمورد ناحیهٔ خاص R که می‌توان آن را به‌هردوصورت

$$a\leqslant x\leqslant b\,, \qquad u(x)\leqslant y\leqslant v(x)$$

و

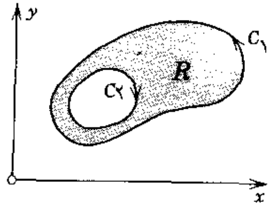
$$c\leqslant y\leqslant d\,, \qquad p(y)\leqslant x\leqslant q(y)$$

نمایش داد (شکل ۱۸۳) ثابت می‌کنیم. با استفاده از (۴)، بخش ۳.۹، به‌دست‌می‌آوریم

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right]dx\,. \qquad (۲)$$

انتگرال داخل کروشه را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial y}\,dy=f(x\,,\,y)\Big|_{y=u(x)}^{y=v(x)}=f[x\,,v(x)]-f[x\,,u(x)]\,.$$



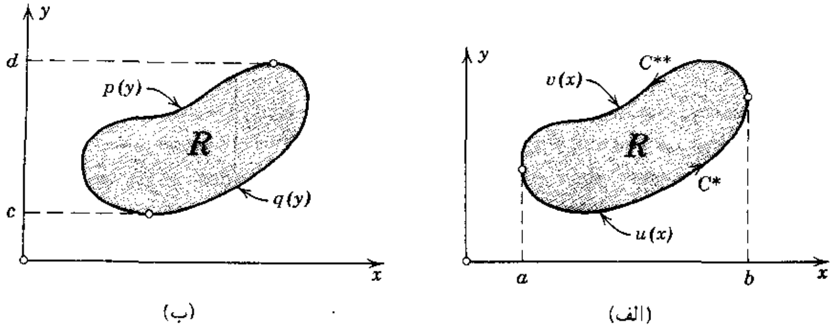
شکل ۱۸۲. ناحیهٔ R کـه‌کرانهٔ آن C متشکل از دوقسمت C_1 و C_2 است؛ جهت C_1 عکس جهت حرکت عقربه هـای ساعت است، و حال آنکـه جهت C_2 همان جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌است.

با قرار دادن نتیجه در رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b f[x\,,v(x)]\,dx - \int_a^b f[x\,,u(x)]\,dx$$
$$= -\int_a^b f[x\,,u(x)]\,dx - \int_b^a f[x\,,v(x)]\,dx\,.$$

چون $y=u(x)$ نمایش‌دهندهٔ منحنی‌جهت‌دار C^* است (شکل ۱۸۳ الف) و $y=v(x)$ نمایش‌دهندهٔ C^{**} است، انتگرالهای طرف راست‌را می‌توان به‌صورت انتگرالهای‌روی خط بر C^* و C^{**} نوشت، وبنابراین

$$\text{(۳)}\quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\, x\, dy = -\int_{C^*} f(x\,,\,y)\,dx - \int_{C^{**}} f(x\,,\,y)\,dx$$
$$= -\int_C f(x\,,\,y)\,dx\,.$$

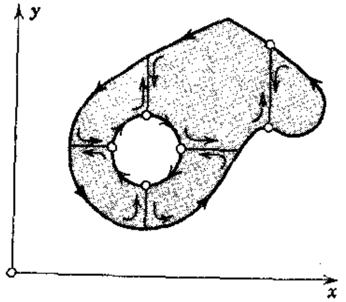


شکل ۱۸۳. مثالی از یك ناحیهٔ خاص برای قضیهٔ گرین

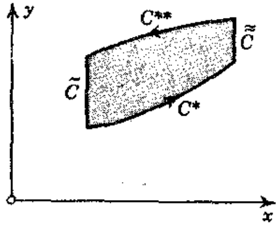
اگر قسمتهایی از C قطعاتی موازی‌محور y ها باشند (مانند $\tilde{C}$ و $\tilde{\tilde{C}}$ درشکل ۱۸۴)، آنگاه نتیجه مانند قبل است ، زیرا انتگرالهای روی این قسمتها صفرند و آنها را می‌توان به انتگرالهای روی C^* و C^{**} افزودتا انتگرال روی‌تمام‌کرانهٔ C به‌دست آید. همین‌طور با استفاده از (۴)، بخش ۳.۹، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۸۳ ب)

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial x}dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\,dx\right]dy$$
$$= \int_c^d g\,[q\,(y)\,,\,y]\,dy + \int_d^c g\,[p\,(y)\,,\,y]\,dy$$
$$= \int_C g\,(x\,,\,y)\,dy\,.$$

از رابطهٔ اخیر و (۲)، فرمول (۱) نتیجه می‌شود و قضیه برای نواحی خاص به‌اثبات می‌رسد.



شکل ۱۸۵. اثبات قضیهٔ گرین



شکل ۱۸۴. اثبات قضیهٔ گرین

حال قضیه را برای ناحیه‌ای مانند R که خود ناحیهٔ خاص نیست ولی قابل تقسیم به‌تعدادی متناهی از نواحی خاص است، ثابت می‌کنیم (شکل ۱۸۵). در این حالت قضیه را در مورد تك‌تك نواحی جزئی به‌کار می‌بریم و سپس نتایج را با هم جمع می‌کنیم؛ در این جمع اعضای طرف چپ برابر انتگرال بر R است و حال آنکه اعضای طرف راست برابر انتگرال روی خط بر C به‌علاوهٔ انتگرال برمنحنیهای حاصل ازتقسیم R به‌نواحی جزئی است. هریك از انتگرالهای اخیر دوبار در دوجهت مختلف محاسبه می‌شوند و از این‌رو یکدیگر را حذف می‌کنند و آنچه باقی می‌ماند انتگرال بر C است.

بنابراین اثبات قضیه تمام ناحیه‌هایی را که در مسائل مهندسی پیش می‌آیند، دربر می‌گیرد. برای اثبات قضیه درمورد کلیترین ناحیهٔ R ی که در شرایط قضیه صدق می‌کند، باید R را با ناحیه‌هایی از همان نوع که اخیراً مورد بحث قرار دادیم، تقریب بزنیم و سپس با گرفتن حد، قضیه را برای R ثابت‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به مرجع [A۲] ضمیمهٔ ۱ مراجعه کنید. ▲

قضیهٔ گرین درملاحظات بعدی ما از اهمیتی اساسی برخوردار است. درحال‌حاضر به‌بررسی چند مثال ساده و روشنگر می‌پردازیم.

مثال ۱. مساحت یك ناحیهٔ صفحه‌ای به‌صورت انتگرال روی خط برکرانه

در (۱)، فرض می‌کنیم $f=0$ و $g=x$. آنگاه

$$\iint_R dx\,dy=\int_C x\,dy\,.$$

انتگرال طرف چپ برابر A، مساحت R، است. همین‌طور، فرض می‌کنیم $f=-y$

و $g=0$، آنگاه بنابر (۱)،

$$A=\iint_R dx\,dy=-\int_C y\,dx\,.$$

با جمع این دوفرمول به‌دست می‌آوریم

$$A=\frac{1}{2}\int_C (x\,dy-y\,dx)\,, \qquad (۴)$$

انتگرالگیری به‌همان روشی‌انجام می گیرد که درقضیهٔ گرین شرح دادیم. این فرمول‌جالب مساحت ناحیهٔ R را برحسب انتگرال روی خط برکرانه بیان می کند. این فرمول‌دارای کاربردهای مختلفی است؛ مثلا اساس‌کاربعضی مساحت سنجها براین فرمول استوار است ؛ به مرجع [G۲۰]، ضمیمهٔ ۱، مراجعه شود.

مثال ۲. مساحت ناحیهٔ صفحه‌ای درمختصات قطبی

فرض می کنیم r و θ مختصات قطبی تعریف شده با $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ باشند. آنگاه

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta\,, \qquad dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta\,,$$

و (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A=\frac{1}{2}\int_C r^2 d\theta\,. \qquad (۵)$$

این فرمول را از حساب دیفرانسیل وانتگرال به‌یاد می‌آوریم.

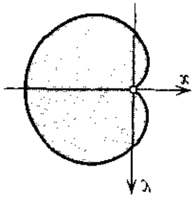
برای نشان دادن‌کاربردی از (۵)، دلوار $r=a(1-\cos\theta)$ راکه در آن $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ درنظر می گیریم (شکل ۱۸۶). داریم

$$A=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta=\frac{3\pi}{2}a^2.$$

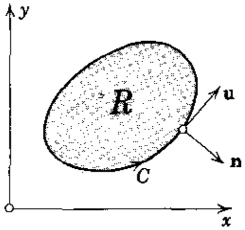
مثال ۳. تبدیل انتگرال دوگانهٔ لاپلاسی یك تابع به‌انتگرال روی خط مشتق‌نرمال‌آن

فرض می کنیم $w(x,y)$ تابعی باشدکه در قلمرویی از صفحهٔ xy مشتمل برناحیه‌ای مانند R، که مشخصات ذکر شده در قضیهٔ گرین را دارد، پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول ودوم پیوسته باشد، قرار می‌دهیم $f=-\partial w/\partial y$ و $g=\partial w/\partial x$. آنگاه $\partial f/\partial y$ و $\partial g/\partial x$ در R پیوسته‌اند و

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\nabla^2 w\,, \qquad (۶)$$



شکل ۱۸۶. دلوار



شکل ۱۸۷. مثال ۳

لاپلاسی w است (ر. ك. بخش ۸.۸). به‌علاوه، با استفاده از عبارات مربوط به f و g، به‌دست می‌آوریم

$$(۷)\quad \int_C (f\,dx+g\,dy)=\int_C\left(f\frac{dx}{ds}+g\frac{dy}{ds}\right)ds$$

$$=\int_C\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right)ds\,,$$

که درآن s طول قوس C است، و C مطابق شکل ۱۸۷ جهت‌دار شده است. انتگران انتگرال آخر را می‌توان به‌صورت‌حاصل‌ضرب نقطه‌ای (حاصل‌ضرب اسکالر) بردارهای زیر نوشت:

$$\mathbf{n}=\frac{dy}{ds}\mathbf{i}-\frac{dx}{ds}\mathbf{j}\;؛\quad و \quad \operatorname{grad} w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j}$$

یعنی

$$(۸)\qquad -\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}=(\operatorname{grad} w)\cdot\mathbf{n}.$$

بردار $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال بر C است، زیرا بردار

$$\mathbf{u}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

(ر. ك. بخش ۵.۸) بردار یکهٔ مماس بر C است و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$. به‌علاوه، به‌آسانی‌دیده می‌شود که جهت $\mathbf{n}$ به‌طرف‌خارج C است. ازاین‌رو وبنابر(۵) بخش ۸.۸، نتیجه‌می‌شود که عبارت طرف راست (۸) برابر مشتق w درجهت نرمال خارجی بر C است. اگراین مشتق جهتی را با $\partial w/\partial n$ نشان دهیم و (۶)، (۷) و (۸) را نیز به‌حساب آوریم، بنابر قضیهٔ گرین فرمول انتگرال مفید زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(۹)\qquad \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy=\int_C\frac{\partial w}{\partial n}ds\,.$$

دیگر کاربردهای مهم و نتایج قضیهٔ گرین در صفحه، در بخشهای بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل بخش ۴.۹

(الف) با محاسبهٔ مستقیم؛ (ب) با استفاده از قضیهٔ گرین، هریك از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱. $\int_c (y^2dx+x^2dy)$ C : کرانهٔ مربع $-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $-1\leqslant y\leqslant 1$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲. $\int_c (y\,dx-x\,dy)$ C : کرانهٔ مربع $0\leqslant x\leqslant 1$ ، $0\leqslant y\leqslant 1$
(درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۳. $\int_c [(3x^2+y)\,dx+4y^2dy]$
C : کرانهٔ مثلثی با رئوس $(0\,,0)$ ، $(1\,,0)$ ، $(0\,,2)$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۴. $\int_c [y^3dx+(x^3+3y^2x)\,dy]$
C : کرانهٔ ناحیهٔ بین $y=x^2$ و $y=x$ ، که درآن $0\leqslant x\leqslant 1$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۵. $\int_c (-xy^2dx+x^2y\,dy)$
C : کرانهٔ ناحیهٔ واقع در ربع اول محدود به $y=1-x^2$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

با استفاده از قضیهٔ گرین ، انتگرال روی خط $\int_c (f\,dx+g\,dy)$ را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در حول مرز بستهٔ داده شدهٔ C بیابید ، $f\,dx+g\,dy$ برابر است با :

۶. C : کرانهٔ مربع $0\leqslant x\leqslant 2$ ، $0\leqslant y\leqslant 2$ $(x-y)\,dx-x^2dy$

۷. C : کرانه‌ای که درمسئلهٔ ۳ ذکر شد $(x^3-3y)\,dx+(x+\sin y)\,dy$

۸. $C: x^2+4y^2=4$ $(e^x-3y)\,dx+(e^y+6x)\,dy$

۹. $(x^2-\cosh y)\,dx+(y+\sin x)\,dy$
C : کرانهٔ مستطیل $0\leqslant x\leqslant \pi$ ، $0\leqslant y\leqslant 1$

۱۰. $C: x^2+y^2=1$ $\quad -y^3dx+x^3dy$

۱۱. $C: x^2+y^2=1$ $\quad (\cos x\sin y-xy)\,dx+\sin x\cos y\,dy$

۱۲. $x^{-1}e^y dx+(e^y\ln x+2x)\,dy$

C: کرانهٔ ناحیهٔ محدود به $y=x^4+1$ و $y=2$.

با استفاده ازیکی از فرمولهایی که درمثال ۱ ذکر شد، مساحت هریك از نواحی صفحه‌ای زیر را بیابید.

۱۳. درون بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

۱۴. ناحیه‌ای از ربع اول که به $y=x$ ، $y=1/x$ و $y=x/4$ محدود است.

۱۵. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y=x+2$

با استفاده از (۹)، $\int_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds$ را محاسبه کنید، درصورتی که داشته باشیم

۱۶. $C: x^2+y^2=4$ $\quad w=x^2+3y^2$

۱۷. C: کرانه‌ای که درمسئلهٔ ۲ ذکر شد $\quad w=3x^2y-y^3$

۱۸. C: کرانهٔ مستطیل $0\leqslant x\leqslant 2$ ، $0\leqslant y\leqslant 1$ $\quad w=e^x+e^y$

۱۹. هرگاه $w(x, y)$ درناحیهٔ R درمعادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 w=0$ صدق کند، نشان‌دهید که

$$\iint_R\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int_C w\,\frac{\partial w}{\partial n}\,ds \tag{10}$$

در اینجا $\partial w/\partial n$ مانند مثال۳ تعریف می‌شود. راهنمایی. با روشی که در مثال۳ داشتیم کار کنید.

با استفاده از (۱۰)، $\int_C w\,\frac{\partial w}{\partial n}\,ds$ را محاسبه کنید، درصورتی که داشته باشیم

۲۰. $w=x$ ، C مانند مسئلهٔ ۲ $\qquad$ ۲۱. $w=e^x\cos y$ ، C مانند مسئلهٔ ۲.

۲۲. با معرفی $\mathbf{v}=g\,\mathbf{i}-f\,\mathbf{j}$ ، نشان دهید که فرمول قضیهٔ گرین را می‌توان چنین نوشت:

$$\iint_R \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx\,dy=\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds \tag{11}$$

کــه در آن $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی منحنی C (شکل ۱۵۸) و s طول قوس C است.

۲۳. درستی (۱۱) را در صــورتی کــه داشته باشیم $\mathbf{v}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ ، و C دایــرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ باشد، تحقیق کنید.

۲۴. نشان دهید فرمولی را که درقضیهٔ گرین دیدیم می‌توان چنین نوشت:

$$\iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{v})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy=\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\,ds \qquad (۱۲)$$

که درآن $\mathbf{k}$ بردار یکهٔ عمودبرصفحهٔ xy ، $\mathbf{u}$ برداریکهٔ مماس بر C ، و s طول قوس C است.

۲۵. درستی (۱۲) را درصورتی که داشته باشیم $\mathbf{v}=-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}$ ، و C کرانهٔ مثلثی با رئوس (۰, ۰) و (۰, ۱) و (۱, ۱) باشد، تحقیق کنید.

۵.۹ سطحها

دربخش ۷.۹ انتگرالهای روی سطح را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور باید چند مطلب اساسی درمورد سطوحی که هم اکنون توصیفشان خواهیم کرد و با آوردن مثالهایی به تشریح آنها خواهیم پرداخت بدانیم.

سطح دلخواه S را می‌توان به‌صورت

$$f(x,\,y,\,z)=۰ \qquad (۱)$$

نمایش داد، که درآن x ، y و z مختصات دکارتی درفضا هستند. دراین‌صورت گرادیان f نرمال بر S است (ر. ك. قضیهٔ۲ بخش ۸.۸)، مشروط براینکه $\operatorname{grad} f\neq ۰$. درنتیجه برای اینکه S در هرنقطه دارای نرمال یکتایی باشد که جهت آن به‌طور پیوسته به نقاط S بستگی داشته باشد، لازم است که f دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد ودر هرنقطه لااقل یکی از این مشتقات صفر نباشد. دراین صورت بردار

$$\mathbf{n}=\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \qquad (۲)$$

بردار یکهٔ نرمال S است (و $-\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال دیگر آن).

مثال ۱. بردار یکهٔ نرمال

کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲-a^۲=۰$ دارای بردار یکهٔ نرمال زیر است:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

▲

گاهی بهتر است که نمایش صریح

$$z = g(x, y) \qquad (۳)$$

را درمورد یك سطح مفروض به‌کار بریم. بدیهی است می‌توانیم با نوشتن $z - g(x, y) = 0$ یك نمایش ضمنی برای سطح به‌دست آوریم که درصورت کلی (۱) صدق کند.

سطح دلخواه S را می‌توان با **نمایش پارامتری**

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad (۴)$$

نیز نشان داد. در اینجا u و v دو متغیر حقیقی مستقلند که پارامترهای نمایش نامیده می‌شوند وتابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ به‌آنها بستگی دارد. $\mathbf{r}(u, v)$ بردار مکان نقاط S است؛ وقتی (u, v) دریك ناحیهٔ R درصفحه uv تغییر کند، نوك این بردار نقاط مختلف سطح S را اختیار می‌کند. با هرنقطهٔ (u_0, v_0) در R، نقطه‌ای از S با بردار مکان $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ متناظر است. ازاین‌رو سطح S نقش ناحیهٔ صفحه‌ای R است که در صفحهٔ uv قرار دارد (ر. ك. شکل ۱۸۸). این شبیه نمایش پارامتری $\mathbf{r}(t)$ ی منحنی C است که در بخش ۳.۸ مورد بحث واقع شد، درآنجا C نقش یك پاره‌خط (فاصله‌ای برمحور t ها) بود؛ شکل ۱۸۸ را ببینید. تنها تفاوت اساسی این است که درمورد سطح به دو پارامتر نیازمندیم، درحالی که در مورد منحنی تنها به یك پارامتر احتیاج داشتیم.

برای آنکه بتوانیم کارمان را ادامه دهیم، باید سطوحی که به‌کار می‌بریم دارای خواص هندسی معینی باشند. بدین منظور فرض می‌کنیم که

مفروضات

$\mathbf{r}(u, v)$ که در (۴) معرفی شد در حوزه‌ای از صفحهٔ uv که شامل ناحیهٔ R است، (R همبند ساده[1] و کراندار است) پیوسته بوده ودارای مشتقات جزئی مرتبه اول $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ است. به‌علاوه، درهرنقطهٔ R

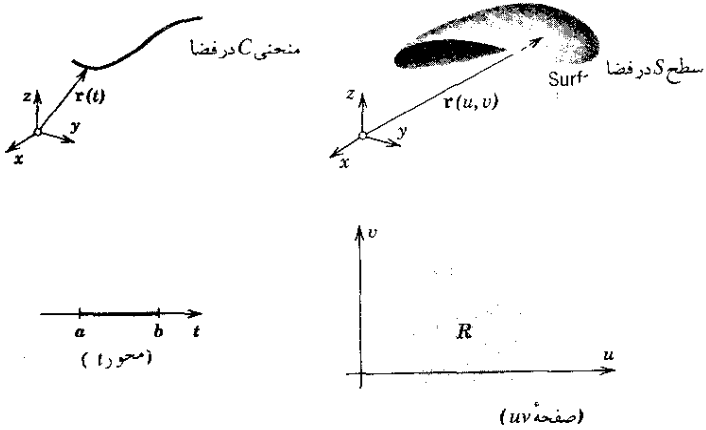
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0. \qquad (۵)$$

بنابر تعریف، **سطح هموار** S سطحی است که دارای نرمال یکتایی است که جهت آن به‌طور پیوسته به‌نقاط S بستگی دارد.

---

۱. یعنی هرمنحنی بسته در R را می‌توان بدون خارج شدن از R به‌طور پیوسته به‌هر نقطه از R فشرده کرد. «کراندار» درپانوشت ۲ی بخش ۳.۹ تشریح شده است.

دربخش بعد خواهیم دیدکه با مفروضات فوق، S ی که با $\mathbf{r}(u, v)$ نمایش‌داده می‌شود هموار است.



شکل ۱۸۸. نمایشهای پارامتری منحنی وسطح

سطح هموار تکه‌ای سطحی است که بتوان‌آن را به تعدادی متناهی سطح هموار تقسیم کرد. مثلا سطح مکعب هموار تکه‌ای است. کره سطحی هموار است.

مثال ۲. نمایش پارامتری کره

کره‌ای راکه درمثال ۱ ذکرشد می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{r}(u, v) = a\cos v\cos u\,\mathbf{i} + a\cos v\sin u\,\mathbf{j} + a\sin v\,\mathbf{k} \qquad (۶)$$

که درآن $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ ، $-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$ ؛ یعنی

$$x = a\cos v\cos u, \qquad y = a\cos v\sin u, \qquad z = a\sin v.$$

منحنیهای ثابت $= u$ و ثابت $= v$ «نصف‌النهارها» و «مدارها»ی S هستند (ر. ك. شکل ۱۸۹). رابطهٔ (۵) همه‌جا جز در «قطبها»ی $v = -\pi/2$ و $v = \pi/2$ برقرار است. نمایش (۶) در جغرافیا برای اندازه‌گیری طول وعرض جغرافیایی نقاط روی‌کرهٔ زمین به‌کار می‌رود.

مسائل بخش ۵۰۹

هر یك از نمایشهای پارامتری زیر چه سطحی را نشان می‌دهد؟ **منحنیهای مختصاتی** (منحنیهای ثابت $= u$ و ثابت $= v$) روی هرسطح کدامند؟

۱. $\mathbf{r}=u\,\mathbf{i}+v\,\mathbf{j}$
۲. $\mathbf{r}=u\cos v\,\mathbf{i}+u\sin v\,\mathbf{j}$
۳. $\mathbf{r}=\cos u\,\mathbf{i}+\sin u\,\mathbf{j}+v\,\mathbf{k}$
۴. $\mathbf{r}=u\,\mathbf{i}+v\,\mathbf{j}+uv\,\mathbf{k}$
۵. $\mathbf{r}=۴\cos u\,\mathbf{i}+\sin u\,\mathbf{j}+v\,\mathbf{k}$
۶. $\mathbf{r}=u\,\mathbf{i}+v\,\mathbf{j}+(u+v)\,\mathbf{k}$
۷. $\mathbf{r}=u\cos v\,\mathbf{i}+u\sin v\,\mathbf{j}+u\,\mathbf{k}$
۸. $\mathbf{r}=u\cos v\,\mathbf{i}+u\sin v\,\mathbf{j}+u^۲\mathbf{k}$

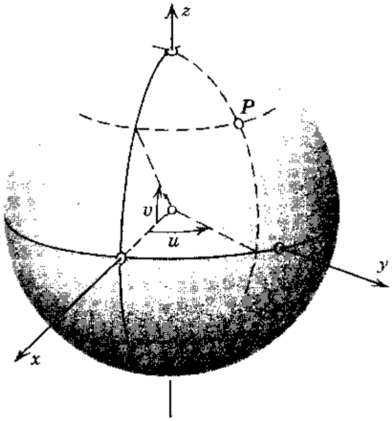
نمایش پارامتری سطوح زیر را بیابید.

۹. صفحهٔ xz
۱۰. صفحهٔ $z=x$
۱۱. صفحهٔ $x+y+z=۱$
۱۲. استوانهٔ دوار $y^۲+z^۲=a^۲$
۱۳. استوانهٔ سهمی گون $z=x^۲$
۱۴. استوانهٔ بیضی گون $y^۲+۹z^۲=۹$

هریك از سطحهای زیر را به‌صورت (۱) نمایش دهید وشکل آنها را رسم کنید.

۱۵. بیضی‌وار $\mathbf{r}=a\cos v\cos u\,\mathbf{i}+b\cos v\sin u\,\mathbf{j}+c\sin v\,\mathbf{k}$

۱۶. سهمی‌وار بیضی گون $\mathbf{r}=au\cos v\,\mathbf{i}+bu\sin v\,\mathbf{j}+u^۲\,\mathbf{k}$



شکل ۱۸۹. نمایش پارامتری کره

۱۷. سهمی‌وار هذلولی گون $\mathbf{r}=au\cosh v\,\mathbf{i}+bu\sinh v\,\mathbf{j}+u^۲\mathbf{k}$

۱۸. هذلولی‌وار $\mathbf{r}=a\sinh u\cos v\,\mathbf{i}+b\sinh u\sin v\,\mathbf{j}+c\cosh u\,\mathbf{k}$

۱۹. بردار یکهٔ نرمال سطحی راکه درمسئلهٔ ۴ دیدیم بیابید.

۲۰. درمثال ۲، مسئلهٔ ۲، ومسئلهٔ ۷ نقاطی را بیابیدکه درآنها (۵) برقرار نباشد.

۶.۹ صفحهٔ مماس. صورت بنیادی اول. مساحت

هرگاه سطح S به‌صورت $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ نمایش داده شده باشد، آنگاه هرمنحنی واقع بر S را می‌توان با زوج تابع پیوستهٔ

$$u=g(t), \qquad v=h(t) \tag{۱}$$

از پارامتر حقیقی t نمایش داد.

مثال۱. استوانهٔ دوار ومارپیچ مستدیر

تابع برداری $\mathbf{r}(u,v)=a\cos u\,\mathbf{i}+a\sin u\,\mathbf{j}+v\,\mathbf{k}$ استوانهٔ دوار S راکه شعاع آن a است نمایش می‌دهد. معادلات $u=t$ ، $v=ct$ روی S مارپیچ مستدیری رانمایش می‌دهند. درواقع، با قرار دادن این معادلات در نمایش S به‌دست می‌آوریم (ر. ك. مثال ۳، بخش ۳.۸)

$$\mathbf{r}[u(t),v(t)]=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+ct\,\mathbf{k}$$

▲

فرض می‌کنیم S سطحی هموار باشدکه با تابع برداری $\mathbf{r}(u,v)$ نمایش داده شده است وفرض می‌کنیم C یك منحنی‌روی S باشدکه نمایشی به‌صورت (۱) دارد؛ آنگاه C به‌عنوان یك منحنی فضایی با تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}[u(t),v(t)] \tag{۲}$$

نمایش داده می‌شود. فرض می‌کنیم توابع (۱) هردو دارای مشتقات اول پیوسته باشند به‌طوری که به‌ازای هر t ی دلخواه لااقل یکی ازاین مشتقات مخالف صفر باشد. آنگاه C درهریك ازنقاط خود دارای مماسی است که جهت‌آن به‌طور پیوسته به‌نقاط S بستگی دارد؛ بردار مماس بر C عبارت است از

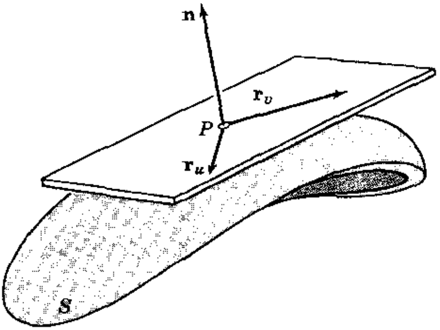
$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}_u\dot{u}+\mathbf{r}_v\dot{v}\,.$$

از (۵) بخش قبل نتیجه می‌شودکه بردارهای $\mathbf{r}_u=\partial\mathbf{r}/\partial u$ و $\mathbf{r}_v=\partial\mathbf{r}/\partial v$ مستقل خطیند. پس این دوبردار صفحه‌ای‌را مشخص می‌کنند. این صفحه را **صفحهٔ مماس** بر S درنقطهٔ متناظر P از S می‌نامند وبا $T(P)$ نشان می‌دهند. این صفحه در P بر S مماس است. از (۲) نتیجه می‌شودکه $T(P)$ مماسهای (درنقطهٔ P ی) تمام منحنیهایی

را که روی S قرار دارند و از P می‌گذرند دربر می‌گیرد (بخش ۸.۸ را نیز ببینید).

خط راستی کـه از P می‌گذرد و بر $T(P)$ عمود است **نرمال** بر S در P نام دارد. چون بردارهای $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ در $T(P)$ واقعند، بردار یکهٔ (شکل ۱۹۰)

$$n=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|} \tag{۳}$$



شکل ۱۹۰. صفحهٔ مماس و بردار نرمال

عمود بر $T(P)$ است این بردار را **بردار یکهٔ نرمال** بر S در P می‌نامند. جهت این بردار بستگی به‌انتخاب مختصات u و v دارد؛ تبدیل $u=-\bar{u}$ ، $v=\bar{v}$ یا هر تبدیل دیگری که ژاکوبی (ر. ك. بخش ۳.۹) آن منفی باشد، جهت $\mathbf{n}$ را عوض می‌کند.

حال عنصر خطی منحنی C را که‌خود به‌صورت (۱) نمایش داده شده‌است و روی سطح S ، که با $\mathbf{r}(u,v)$ نموده شده است قرار دارد تعیین می‌کنیم. داریم

$$d\mathbf{r}=\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v du\ ,$$

و، بنا بر (۴) بخش ۴.۸،

$$\begin{aligned} ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}&=(\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv)\cdot(\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv)\\ &=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u du^2+2\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v du\,dv+\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v dv^2\ . \end{aligned}$$

هر گاه از علامتگذاری متعارف

$$E=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u \qquad F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v \qquad G=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v \tag{۴}$$

استفاده کنیم، عبارت بالا چنین می‌شود :

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{۵}$$

این صورت دیفرانسیلی درجه دوم را **صورت بنیادی اول** S می‌نامند.

مثال ۲. صورت بنیادی اول درمختصات قطبی

تابع برداری

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j}$$

نمایش صفحهٔ xy است، u و v مختصات قطبی هستند. با مشتقگیری به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_v = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}.$$

از این‌رو $E = ۱$ و $F = ۰$ ، $G = u^۲$ ، و صورت بنیادی اول متناظر در مختصات قطبی $u = \rho$ و $v = \theta$ عبارت است از

$$ds^۲ = d\rho^۲ + \rho^۲ d\theta^۲. \qquad (۶)$$

▲

هم‌اکنون خواهیم دید که صورت بنیادی اول اهمیتی اساسی دارد زیرا ما را قادر می‌سازد که طولها، زوایای بین منحنیها ومساحتهای روی سطح S را اندازه‌گیری کنیم.

طول. از (۱) و (۴) بخش ۴.۸ و (۵) همین بخش نتیجه می‌شود طول منحنی

$$C: u(t), v(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

که روی سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ قرار دارد چنین است:

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}\, dt = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^۲ + ۲F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^۲}\, dt. \qquad (۷)$$

زاویه. دو منحنی

$$C_۲: u = p(t), \quad v = q(t) \quad \text{و} \quad C_۱: u = g(t), \quad v = h(t)$$

راکه روی سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ قرار دارند ویکدیگر را درنقطهٔ P قطع می‌کنند درنظر می‌گیریم. بردارهای

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}[g(t), h(t)] = \mathbf{r}_u\dot{g} + \mathbf{r}_v\dot{h}$$

و

$$\mathbf{b} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}[p(t), q(t)] = \mathbf{r}_u\dot{p} + \mathbf{r}_v\dot{b}$$

درنقطهٔ P به‌ترتیب بر $C_۱$ و $C_۲$ مماسند. زاویهٔ بین $C_۱$ و $C_۲$ درنقطهٔ تقاطع P را γ ،

زاویهٔ بین **a** و **b**، تعریف می‌کنیم، وبنا بر (۳) بخش ۵.۶ می‌نویسیم

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \qquad (۸)$$

که در آن

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{r}_u\dot{g}+\mathbf{r}_v\dot{h})\cdot(\mathbf{r}_u\dot{p}+\mathbf{r}_v\dot{q}) = E\,\dot{g}\,\dot{p}+F\,(\dot{g}\,\dot{q}+\dot{h}\dot{p})+G\dot{h}\dot{q}$$

وهمین‌طور

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{E\dot{g}^۲+۲F\,\dot{g}\dot{h}+G\dot{h}^۲}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{E\dot{p}^۲+۲F\dot{p}\dot{q}+G\dot{q}^۲}\,.$$

این نتیجهٔ مهم نشان می‌دهد که زاویهٔ بین دو منحنی متقاطع واقع بریك سطح را می‌توان برحسب E ، F ، G ومشتقهای توابع نمایش‌دهندهٔ این منحنیها، که درنقطهٔ تقاطع‌محاسبه می‌شوند، بیان کرد.

مساحت. A ، مساحت سطح $S:\mathbf{r}(u,v)$ ، با انتگرال دوگانهٔ

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv \qquad (۹)$$

روی ناحیهٔ R از صفحهٔ uv که متناظر با سطح است تعریف می‌شود. عبارت

$$dA = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv \qquad (۱۰)$$

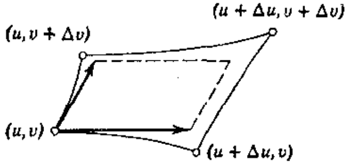
را عنصر مساحت می‌نامند.

فرمول (۹) ناشی از این واقعیت است که ، برطبق تعریف حاصل‌ضرب برداری ، مساحت متوازی‌الاضلاع کوچك نشان داده شده درشکل ۱۹۱ عبارت است از

$$\Delta A = |\mathbf{r}_u\Delta u\times\mathbf{r}_v\Delta v| = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v\,.$$

انتگرال (۹) از تقسیم‌کردن S به قسمتهای جزئی $S_۱$ ، . . . ، S_n وتقریب زدن هر قسمت S_k به وسیلهٔ بخشی از صفحهٔ مماس بر S در نقطه‌ای از S_k ، و تشکیل دادن مجموع همهٔ مساحتهای تقریبی ، به دست می‌آید. این عمل به‌ازای هر . . . , ۲ , ۱ $=n$ طوری انجام می گیرد که ابعاد بزرگترین S_k وقتی که n به سمت بینهایت میل می کند به سمت صفر میل کند. حد این مجموعها عبارت از انتگرال (۹) است . برای جزئیات بیشتر به‌مرجع [C۸] ضمیمهٔ ۱ مراجعه کنید.

درستی این ادعاراکه صورت بنیادی‌اول ما را قادربه‌اندازه گیری مساحت‌می‌سازد، به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد. کل‌کاری که باید انجام دهیم این است‌که (۹) را برحسب



شکل ۱۹۱. مساحت

E ، F ، G بیان کنیم. بنابر (۵) بخش ۷.۶ و (۴) همین بخش، به‌دست می‌آوریم

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2 . \tag{۱۱}$$

از این‌رو می‌توان (۹) را به صورت

$$A = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{۹*}$$

و (۱۰) را به‌صورت

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{۱۰*}$$

نوشت.

مثال ۳. چنبره

تابع برداری

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b\cos v)\cos u\,\mathbf{i} + (a + b\cos v)\sin u\,\mathbf{j} + b\sin v\,\mathbf{k}$$
$$(a > b > ۰)$$

یك چنبره (شکل ۱۹۲) را نمایش می‌دهد. این سطح از دوران دایره‌ای مانند C حول خط مستقیم مشخصی مانند A به وجود می‌آید، لازم است که در طول دوران، صفحهٔ C همواره از A بگذرد، در ضمن شرط می‌کنیم که A و C متقاطع نباشند. با استفاده از (۴) داریم

$$E = (a + b\cos v)^2 \qquad F = ۰\,, \qquad G = b^2 .$$

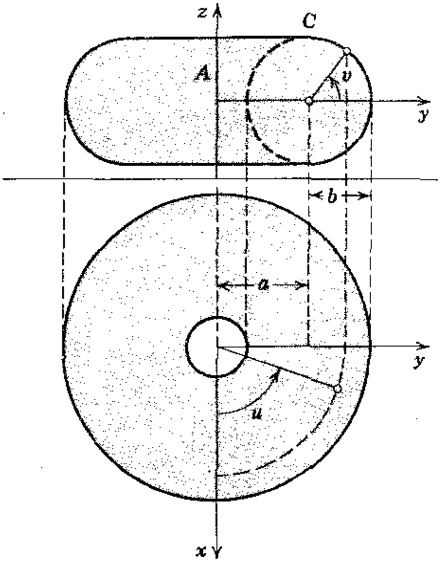
از این‌رو

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = b^2(a + b\cos v)^2 ,$$

ومساحت کل چنبره عبارت است از

$$A = \int^{۲\pi}\int^{۲\pi} b(a + b\cos v)\, du\, dv = ۴\pi^2 ab .$$

▲



شکل۱۹۲. چنبره

مساحت سطح $z=g(x, y)$. فرض می‌کنیم که سطح S با نمایش

$$z=g(x, y)$$

معین شده باشد. آنگاه می‌توان فرض‌کرد $u=x$ و $v=y$، و نمایش سطح فوق را به صورت پارامتری نوشت:

$$\mathbf{r}(u, v)=u\,\mathbf{i}+v\,\mathbf{j}+g(u, v)\,\mathbf{k}.$$

دراین صورت مشتقات جزئی $\mathbf{r}$ نسبت به u و v عبارتند از

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{i}+g_u\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_v=\mathbf{j}+g_v\mathbf{k}. \tag{۱۲}$$

درنتیجه، ضرایب صورت بنیادی‌اول عبارتند از

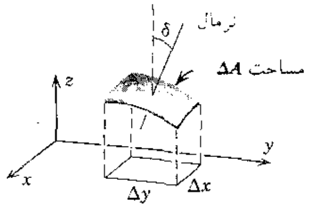
$$E=۱+g_u^۲, \qquad F=g_u g_v, \qquad G=۱+g_v^۲.$$

و بنابراین

$$|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^۲=EG-F^۲=۱+g_u^۲+g_v^۲.$$

چون $u=x$ و $v=y$، انتگرال (۹) به‌صورت

$$A=\iint_S\sqrt{۱+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^۲}\,dx\,dy \tag{۹'}$$



شکل ۱۹۳. توضیح (″۱۰)

درمی‌آید، که در آن $\bar{S}$ تصویر قائم S درصفحه xy است. بدیهی است که

$$dA=\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (10')$$

برای استفاده‌های بعدی نشان می‌دهیم که این رابطه را می‌توان چنین نوشت :

$$dA=\sec\delta\,dx\,dy \qquad (10'')$$

که در آن δ زاویهٔ حاده بین محور z ها و نرمال (بدون جهت) بر S است. شکل ۱۹۳ نمایش‌دهندهٔ استدلال هندسی زیر است: یك «متوازی‌الاضلاع» کوچك روی سطح که مساحتش ΔA باشد برروی مستطیل کوچکی به‌مساحت $\overline{\Delta A}=\Delta A\cos\delta$ درصفحهٔ xy تصویر می‌شود، وچون داریم $\overline{\Delta A}=\Delta x\,\Delta y$، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta A=\overline{\Delta A}\sec\delta=\sec\delta\,\Delta x\,\Delta y.$$

درزیر اثباتی برای (″۱۰) ارائه می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم $\mathbf{a}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$. با استفاده از(۱۲) و با توجه به‌اینکه $u=x$، $v=y$، از تعریف حاصل ضرب برداری به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

پس $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=1$. از طرف دیگر، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=|\mathbf{a}|\cos\delta^*$، که درآن δ^* زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ وجهت مثبت‌محور z ها است؛ بنابراین $|\mathbf{a}|\cos\delta^*=1$. بدیهی است که $\cos\delta^*>0$ ودرنتیجه $\delta^*<\pi/2$، یعنی δ^* زاویه‌ای است حاده و بنابراین برابر δ است. بدین ترتیب داریم

$$|\mathbf{a}|\cos\delta=1 \quad \text{یا} \quad \sec\delta=|\mathbf{a}| \quad \text{و} \quad \left(\delta<\frac{\pi}{2}\right)$$

به‌این ترتیب (″۱۰) به‌اثبات می‌رسد.

مسائل بخش ۶.۹

۱. نشان دهید که صفحهٔ مماس برسطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ درنقطهٔ P را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد.

$\mathbf{r}^*(p, q) = \mathbf{r} + p\mathbf{r}_u + q\mathbf{r}_v$ ($\mathbf{r}$، $\mathbf{r}_u$، $\mathbf{r}_v$ بردارهای مربوط به‌نقطهٔ P هستند.)

وبا استفاده از حاصل‌ضرب سه گانه (بخش ۹.۶)

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v) = 0.$$

نمایشی برای صفحهٔ مماس وبردار یکهٔ نرمال سطح S درنقطهٔ P بیابید درصورتی که S به‌یکی از صورتهای زیر باشد.

۲. $z = g(x, y)$ **۳.** $f(x, y, z) = 0$

۴. فرض می‌کنیم $\mathbf{n}(u, v)$ بردار یکهٔ نرمال (۳) برسطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ باشد. فرض کنید $u = -\tilde{u}$، $v = \tilde{v}$ و نشان دهید که بردار یکهٔ نرمال متناظر با نمایش حاصل عبارت از $-\mathbf{n}(u, v)$ است.

نمایشی برای صفحهٔ مماس به‌هریك از سطحهای زیر در $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ پیدا کنید.

۵. $z = xy, \quad P_0: (1, 1, 1)$

۶. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad P_0: (3, 4, 0)$

۷. $z = x^2, \quad P_0: (2, 1, 4)$

۸. $x^2 + y^2 = 8, \quad P_0: (2, 2, 3)$

۹. $z = x^2 + y^2, \quad P_0: (2, 1, 5)$

۱۰. $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20, \quad P_0: (1, 2, 3)$

صورت بنیادی اول سطحهای زیر را بیابید.

۱۱. $\mathbf{r} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}$ **۱۲.** $\mathbf{r} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$

۱۳. کرهٔ (۶)، بخش ۹.۵   **۱۴.** چنبرهٔ مثال ۳

۱۵. $\mathbf{r} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + uv\,\mathbf{k}$ **۱۶.** $\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$

۱۷. (**مختصات متعامد**) نشان دهید منحنیهای مختصاتی ثابت $= u$ و ثابت $= v$ که برسطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ واقعند وقتی و تنها وقتی یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کنند که

داشته باشیم $F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v=0$.

۱۸. تحت چه شرایطی منحنیهای مختصاتی ثابت$=p$ و ثابت$=q$ که درجواب مسئلهٔ ۱ ظاهرشدند یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

با استفاده از (۹)، مساحت سطحهای زیر را پیدا کنید.

۱۹. $x^2+y^2=1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1$ **۲۰.** کرهٔ (۶)، بخش ۵.۹

۲۱. $z=x^2+y^2,\quad 0\leqslant z\leqslant 1$ **۲۲.** $z^2=x^2+y^2,\quad -1\leqslant z\leqslant 1$

۲۳. (قضیهٔ پاپوس[1]) نشان دهید که درمثال ۳ مساحت A را می‌توان به کمك قضیهٔ پاپوس به دست آورد، بنا به این قضیه مساحت یك سطح دوار برابر حاصلضرب طول نصف‌النهار C وطول مسیر گرانیگاه C است وقتی که C به اندازهٔ 2π دوران کند.

۲۴. با استفاده از قضیهٔ پاپوس، گرانیگاه $(0\,,\,y)$ نیمدایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، $y\geqslant 0$ را بیابید.

۲۵. با استفاده از قضیهٔ پاپوس، مساحت مخروط $(0\leqslant z\leqslant 1)$ $z^2=x^2+y^2$ را بیابید.

۷.۹ انتگرال روی سطح

مفهوم انتگرال روی سطح تعمیمی طبیعی از مفهوم انتگرال دوگانه است که در بخش ۳.۹ مورد بررسی قرار گرفت. انتگرال روی سطح دربسیاری ازکاربردها مطرح می‌شود، مثلا درمسائل مربوط به گرانیگاه ورقه‌های منحنی، پتانسیل ناشی از توزیع بارروی سطوح، وغیره.

تعریف انتگرال روی سطح شبیه تعریف انتگرال دوگانه است. فرض کنیم S بخشی از سطحی با مساحت متناهی باشد، وفرض می‌کنیم $f(x\,,\,y\,,\,z)$ تابعی باشد که روی S تعریف شده وبرآن پیوسته است. S را به n قسمت جزئی S_1، . . .، S_n با مساحتهای ΔA_1، . . .، ΔA_n تقسیم می‌کنیم. درهرقسمت S_k نقطهٔ دلخواه P_k با مختصات x_k، y_k، z_k را انتخاب می‌کنیم ومجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k\,,\,y_k\,,\,z_k)\,\Delta A_k\,. \tag{1}$$

این کاررا به‌طریقی دلخواه برای هر $n=1\,,\,2\,,\,\ldots$ انجام می‌دهیم، وتنها این‌شرط را رعایت می‌کنیم که به‌سمت بینهایت میل می‌کند بزرگترین S_k به‌یك‌نقطه میل کند. دنبالهٔ نامتناهی اعداد $J_1\,,\,J_2$، . . . دارای حدی است که مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و

1. Pappus

نقاط P_k است؛ اثبات این‌موضوع شبیه اثباتی است که درمورد انتگرال دوگانه داشتیم.
این حد را **انتگرال روی سطح** $f(x, y, z)$ روی S می‌نامند و با

$$\iint_S f(x, y, z)\, dA \tag{۲}$$

نشان می‌دهند.

برای محاسبهٔ انتگرال روی سطح (۲)، می‌توانیم آن‌را به‌ترتیب زیر بـه انتگرال دوگانه تبدیل کنیم.

هر گاه S با تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ به‌صورت پارامتری نمایش داده شده باشد آنگاه داریم $dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$، (ر. ك. (۱۰) بخش قبل).
از این‌رو

$$\iint_S f(x, y, z)\, dA$$

$$= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv \tag{۳}$$

$$= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\, \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

که در آن R ناحیهٔ متناظر با S درصفحهٔ uv است.

همین‌طور هر گاه S به‌صورت $z = g(x, y)$ نمایش داده شده باشد، آنگاه از ('۱۰) بخش قبل نتیجه می‌شود که

$$\iint_S f(x, y, z)\, dA \tag{۴}$$

$$= \iint_{\bar{S}} f[x, y, g(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

مثال ۱. گشتاور لختی

مطلوب است I، گشتاور لختی پوستهٔ کروی همگن $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ نسبت‌به محور z ها، درصورتی که جرم پوسته M باشد.

هر گاه جرمی برسطح S توزیع شود و $\mu(x, y, z)$ چگالی جرم (= جرم بر واحد سطح) باشد، آنگاه I، گشتاورلختی جرم نسبت به‌یك محورمفروض L باانتگرال روی سطح

$$I = \iint_S \mu D^2\, dA \tag{۵}$$

تعریف می‌شود، که درآن $D(x, y, z)$ فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) از L است.
چون در این مثال، μ ثابت است و مساحت S برابر $A=4\pi a^2$ است، داریم

$$\mu=\frac{M}{A}=\frac{M}{4\pi a^2}\cdot$$

اگر S را با (۶) بخش ۵.۹، نمایش دهیم، باتوجه به (۴) بخش قبل به‌دست می‌آوریم

$$E=a^2\cos^2 v\,,\qquad F=0\,,\qquad G=a^2\,,$$

و از آنجا

$$dA=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=a^2\cos v\,du\,dv\cdot$$

به‌علاوه، مربع فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) از محور z ها عبارت است از

$$D^2=x^2+y^2=a^2\cos^2 v\cdot$$

درنتیجه

$$I=\iint_S \mu\, D^2\, dA=\frac{M}{4\pi a^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} a^4\cos^3 v\,du\,dv$$

$$=\frac{Ma^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 v\,dv=\frac{2Ma^2}{3}\cdot$$

▲

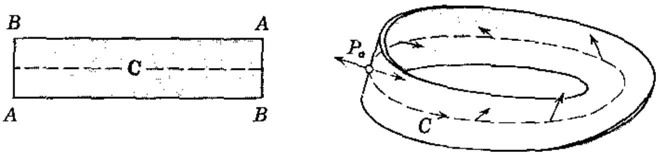
در بسیاری ازکاربردها با انتگرالهای روی سطحی سروکار داریم که درآنها مفهوم جهت سطح نقشی اساسی دارد. بنابراین باشروع از سطح هموار (ر.ك. بخش ۵.۹) به‌بررسی این مفهوم می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم S سطحی هموار و P نقطهٔ دلخواهی از آن باشد. در این‌صورت می‌توانیم در P بردار یکه‌ای نرمال بر S انتخاب کنیم، این بردار را $\mathbf{n}$ می‌نامیم. جهت $\mathbf{n}$ را جهت نرمال مثبت S در P می‌نامند. بدیهی است کـه دو امکان برای انتخاب $\mathbf{n}$ وجود دارد.

سطح هموار S را **جهت‌پذیر** نامند هرگاه‌وقتی جهت‌نرمال مثبت، درنقطهٔدلخواهی مانند P_0 داده‌شده باشد، بتوان‌آن را به‌نحوی یکتا وپیوسته روی‌تمامی سطح‌حرکت داد.

بنابراین سطح S جهت‌پذیر است مشروط براینکه در آن منحنی بسته‌ای مانند C وجود نداشته باشد که از P_0 بگذرد و طوری باشد که جهت نرمال مثبت آن، وقتی از P_0 درطول C حرکت‌کرده ومجدداً به P_0 برگردیم، عوض شود.

هربخش به‌اندازهٔ کافی کوچك از يك سطح هموارهمیشه جهت‌پذیراست. ولی ممکن است بخشهای بزرگ سطح چنین نباشند. سطوحی وجود دارند که جهت‌ناپذیرند. مثال



شکل ۱۹۴. نوار موبیوس

معروف این سطوح **نوار موبیوس**[۱] است که آن را درشکل ۱۹۴ نشان داده‌ایم. وقتی یك بردار نرمال، که درنقطهٔ P_0 داده‌شده است، به‌طور پیوسته درامتداد منحنی C، شکل ۱۹۴، حرکت داده شود، جهت این بردار هنگامی که دوباره بـه P_0 برمی‌گردد مخالف جهت اولیه‌اش خواهد بود. نمونه‌ای از نوار موبیوس را می‌توان بایك نوارکاغذی مستطیلی‌شکل به‌طریق زیر ساخت: نواررا نیم‌دور تاب می‌دهیم وسپس اضلاع کوچك آن راطوری به‌هم می‌چسبانیم که درشکل ۱۹۴، دونقطهٔ A برهم و دونقطهٔ B برهم منطبق شوند.

چنانچه سطح هموار S جهت‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان باانتخاب یکی ازدوجهت ممکن برای بردار نرمال $\mathbf{n}$ سطح S را جهت‌دار کرد.

هرگاه کرانهٔ S منحنی بستهٔ ساده‌ای مانند C باشد، آنگاه مطابق شکل ۱۹۵ الف می‌توان با هریك از دوجهت ممکن S جهتی برای C متناظر کرد. با استفاده از این ایدهٔ ساده، به‌سادگی می‌توان مفهوم‌جهت‌را برای‌رویه‌های هموارتکه‌ای به‌شرح‌زیر توسعه‌داد.

سطح تکه‌ای هموار S را **جهت‌پذیر** نامند هرگاه هر تکهٔ هموار از S را بتوان طوری جهت‌دار کرد که درطول هر منحنی C^* که کرانهٔ مشترك دوتکهٔ S_1 و S_2 است، جهت مثبت C^* نسبت به S_1 خلاف جهت مثبت C^* نسبت به S_2 باشد.

شکل ۱۹۵ ب سطحی متشکل از دو سطح هموار را نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم S سطح جهت‌پذیر مفروضی باشد. با انتخاب بردار یکهٔ نرمال $\mathbf{n}$ بر روی S آن را جهت‌دارمی‌کنیم. زوایای بین $\mathbf{n}$ و جهتهای مثبت محور x ها، y ها و z ها را به‌ترتیب با α، β، و γ نشان می‌دهیم، داریم

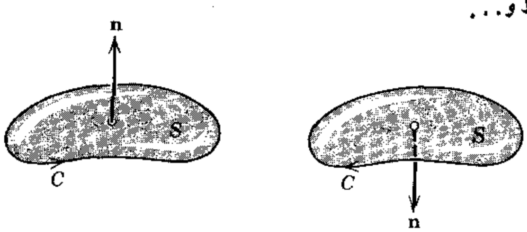
$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}. \tag{۶}$$

فرض می‌کنیم $u_1(x, y, z)$، $u_2(x, y, z)$، $u_3(x, y, z)$ توابع مفروضی باشند که در هرنقطهٔ S تعریف شده وپیوسته‌اند. آنگاه انتگرالهایی که باید مورد بررسی قرار گیرند معمولا به شکل زیرند:

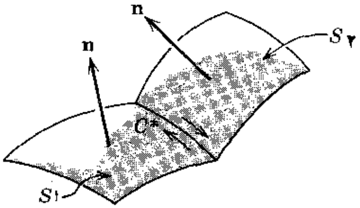
$$\iint_S u_1\, dy\, dz, \qquad \iint_S u_2\, dz\, dx, \qquad \iint_S u_3\, dx\, dy,$$

---

۱. آگوست فردیناند موبیوس (August Ferdinand Möbius)، ۱۷۹۰ - ۱۸۶۸، ریاضیدان آلمانی، که سهم مهمی درنظریهٔ سطوح و هندسهٔ تصویری دارد.



(الف) سطح هموار



(ب) سطح هموار تکه‌ای

شکل ۱۹۵. جهت سطح

و بنابرتعریف داریم

$$\iint_S u_1\, dy\, dz = \iint_S u_1 \cos\alpha\, dA\,,$$
$$\iint_S u_2\, dz\, dx = \iint_S u_2 \cos\beta\, dA\,, \qquad (7)$$
$$\iint_S u_3\, dx\, dy = \iint_S u_3 \cos\gamma\, dA\,,$$

بدیهی است که مقدار چنین انتگرالهایی به انتخاب $\mathbf{n}$، یعنی به‌جهت S، بستگی دارد. انتخاب جهت مخالف با ضرب انتگرال در -1 متناظر است، زیرا دراین‌صورت هریك از مؤلفه‌های $\mathbf{n}$، یعنی، $\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$، در -1 ضرب می‌شوند.

حاصل‌جمع این سه‌انتگرال را با استفاده از نماد برداری می‌توان به‌صورت‌ساده‌ای نوشت. درواقع، هر گاه بردار

$$\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$$

را درنظر بگیریم، آنگاه بنابرتعریف (۷)، فرمول زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\iint_S (u_1\, dy\, dz + u_2\, dz\, dx + u_3\, dx\, dy)$$
$$= \iint_S (u_1 \cos\alpha + u_2 \cos\beta + u_3 \cos\gamma)\, dA = \iint_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dA\,. \qquad (8)$$

برای محاسبهٔ انتگرالهای (۷) می‌توان آنها را به شرح زیر به انتگرالهای دوگانه برروی یك ناحیهٔ صفحه‌ای تبدیل کرد.

هرگاه بتوان S را به صورت $z=h(x, y)$ نمایش داد و هرگاه S طوری جهت‌دارشده باشد که $\mathbf{n}$ به‌طرف‌بالا باشد، آنگاه γ حاده خواهدبود. درنتیجه‌در (″۱۰) بخش قبل خواهیم داشت $\gamma=\delta$، بنابراین از تعریف (۷) نتیجه می‌شود

$$\iint_S u_3(x, y, z)\, dx\, dy = +\iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)]\, dx\, dy \qquad \text{(۹الف)}$$

که در آن $\bar{R}$ تصویر قائم S برصفحهٔ xy است. هرگاه $\mathbf{n}$ به‌طرف پایین باشد، آنگاه γ منفرجه است و به‌دست می‌آوریم

$$\iint_S u_3(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint_{\bar{R}} u_3[x, y, h(x, y)]\, dx\, dy. \qquad \text{(۹ب)}$$

درمورد دوانتگرال دیگر (۷) نیز وضع به‌همین منوال است.

هرگاه S به‌صورت پارامتری

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

نمایش داده شود، آنگاه بسته به‌انتخاب جهت، بردار نرمال عبارت است از [ر. ك. (۳)، بخش قبل]

$$\text{(الف)} \quad \mathbf{n} = +\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \qquad \text{یا} \qquad \text{(ب)} \quad \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \qquad \text{(۱۰)}$$

حال بـا توجه به (۶) داریم $\cos\gamma = \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}$ و بـا توجه به (۱۰) بخش ۶.۹ داریم $dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$. درنتیجه

$$\cos\gamma\, dA = \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, dA = \pm\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv = \pm\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv$$

$$= \pm\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

که در آن عبارت آخر شامل ژاکوبی (ر. ك. بخش ۳.۹) است. از این‌رو در (۷)،

$$\text{(۱۱)} \quad \iint_S u_3(x, y, z)\, dx\, dy$$

$$= \pm\iint_R u_3[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

علامت مثبت وقتی به‌کار می‌رود که S طوری جهت‌دار شده باشد که (۱۰ الف) برقرار باشد وعلامت منها درحالتی به‌کارمی‌رود که جهت S مخالف این جهت باشد. دراینجا R ناحیهٔ متناظر با S در صفحهٔ uv است.

مسائل بخش ۷.۹

بانمایش دادن S به صورت پارامتری و با استفاده از (۳)، $\iint_S f(x, y, z)\, dA$ را محاسبه کنید، هر گاه

۱. $f = x + 1, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 3$

۲. $f = 8x, \quad S: z = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2$

۳. $f = xy, \quad S: z = xy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

۴. $f = \arctan(y/x), \ S: z = x^2 + y^2, \ 1 \leqslant z \leqslant 4, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0$

۵. $f = 3x^3 \sin y, \quad S: z = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$

۶. $f = x + y + z, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2$

۷. $f = xy, \quad S: x^2 + y^2 = 4, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1$

۸. $f = \cos x + \sin y$، S: بخشی از $x + y + z = 1$ که در یک‌هشتم اول واقع است

۹. $f = x(z^2 + 12y - y^4), \quad S: z = y^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

۱۰. $f = (x^2 + y^2)^2, \quad S: z = (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$

۱۱. درستی فرمولهای زیر را درمورد جرم M و $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$، گرانیگاه پوستهٔ S، که چگالی (جرم بر واحد سطح) آن $\sigma(x, y, z)$ است تحقیق کنید:

$$M = \iint_S \sigma\, dA, \quad \bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\sigma\, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\sigma\, dA,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\sigma\, dA.$$

۱۲. درستی فرمولهای زیر را برای گشتاورهای لختی پوسته‌ای که در مسئلهٔ ۱۱ داشتیم به‌ترتیب حول محور x ها، y ها و z ها تحقیق کنید:

$$I_x=\iint_S (y^2+z^2)\,\sigma\,dA\,,\quad I_y=\iint_S (x^2+z^2)\,\sigma\,dA\,,$$

$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)\,\sigma\,dA\,.$$

گشتاور لختی پوستهٔ S را که چگالی آن ۱ است حول محور A بیابید، هرگاه

۱۳. $S:\ x^2+y^2=1$ ، $0\leqslant z\leqslant h$ ، A : محور z ها

۱۴. $S:\ z^2=x^2+y^2$ ، $0\leqslant z\leqslant h$ ، A : محور z ها

۱۵. S : چنبرهٔ مثال ۳، بخش ۶.۹، A : محور z ها

۱۶. S : مانند مسئلهٔ ۱۵، A : خط $x=a$ در صفحهٔ xz

۱۷. S : مانند مسئلهٔ ۱۵، A : خط $x=a+b$ در صفحهٔ xz

۱۸. **(قضیهٔ ۱ اشتاینر[1])** اگر I_A گشتاور لختی توزیع جرمی با جرم کل M نسبت به محوری مانند A که از گرانیگاه می‌گذرد باشد، نشان دهید که I_B گشتاور لختی همان توزیع جرم نسبت به محور B که موازی A است و به‌فاصلهٔ k از آن قرار دارد برابر است با

$$I_B=I_A+k^2M\,.$$

۱۹. با استفاده از قضیهٔ اشتاینر وجواب مسألهٔ ۱۵، مسائل ۱۶ و ۱۷ را حل کنید.

۲۰. مدلی کاغذی برای نوارموبیوس درست کنید. هرگاه آن را درطول منحنی C، شکل ۱۹۴، ببرید چه پیش می‌آید؟

۸.۹ انتگرالهای سه‌گانه. قضیهٔ دیورژانس گاوس

انتگرال سه گانه تعمیمی ازانتگرال دوگانه است که دربخش ۳.۹ باآن آشنا شدید. برای تعریف این انتگرال تابع $f(x, y, z)$ راکه درناحیهٔ بستهٔ کراندار[2] T ازفضا تعریف شده است در نظر می‌گیریم. T را توسط صفحاتی موازی بـا سه صفحهٔ مختصات تقسیم می‌کنیم. آنگاه متوازی‌السطوح‌های داخل T را از ۱ تا n شماره گذاری می‌کنیم. درهریك ازاین متوازی‌السطوح‌ها نقطهٔ دلخواهی، مثل (x_k, y_k, z_k) واقع در متوازی‌السطوح

---

۱. یاکوب اشتاینر (Jacob Steiner)، ۱۷۹۶ ـ ۱۸۶۳، هندسه‌دان سویسی.

۲. در پانوشت ۲ بخش ۳.۹ توضیح داده شده است (در این حالت بـه جای «دایره»، «کره» می‌گذاریم).

k ام اختیار می‌کنیم و مجموع

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right) \Delta V_k$$

را تشکیل می‌دهیم ΔV_k حجم متوازی‌السطوح k ام است. این‌کار را برای اعداد صحیح مثبت بزرگ n به‌روش‌دلخواه طوری انجام می‌دهیم که طول یالهای بزرگترین متوازی‌السطوح وقتی که n به‌سمت بینهایت میل می‌کند به‌سمت صفر میل کند. بدین‌طریق دنباله‌ای از اعداد حقیقی J_{n_1}، J_{n_2}، ... به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم که $f(x, y, z)$ در حوزه‌ای شامل T پیوسته بوده و T توسط تعدادی متناهی سطح هموار[1] محصور شده باشد، در این صورت می‌توان نشان داد (ر. ك. مرجع [A۳]) دنبالهٔ مذکور به حدی همگراست که مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط متناظر (x_k, y_k, z_k) است. این حد را **انتگرال سه‌گانه** $f(x, y, z)$ بر ناحیهٔ T می‌نامند و چنین نشان می‌دهند

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{یا} \qquad \iiint_T f(x, y, z)\, dV .$$

حال نشان می‌دهیم که انتگرال سه‌گانهٔ دیورژانس یك‌تابع‌برداری پیوستهٔ مشتق‌پذیر $\mathbf{u}$ روی ناحیه‌ای مانند T درفضارا می‌توان به‌انتگرال روی‌سطح مؤلفهٔ نرمال $\mathbf{u}$ برسطح S، کرانهٔ T، تبدیل کرد. این‌کار را می‌توان به‌کمك قضیهٔ دیورژانس انجام داد؛ این قضیه نظیر سه‌بعدی قضیهٔ گرین در صفحه (بخش ۴.۹) است. قضیهٔ دیورژانس در بسیاری اززمینه‌های عملی ونظری اهمیتی اساسی دارد.

قضیه دیورژانس‌گاوس (تبدیل انتگرال روی حجم به‌انتگرال روی سطح وبالعکس)

فرض می‌کنیم T ناحیه‌ای بسته و کراندار درفضا باشدکه کرانهٔ آن سطح‌جهت‌پذیر هموار تکه‌ای[2] S است. گیریم $\mathbf{u}(x, y, z)$ تابعی برداری باشد که در ناحیه‌ای شامل T پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته است. آنگاه داریم

$$\iiint_S \operatorname{div} \mathbf{u}\, dV=\iint_T u_n\, dA \qquad (۱)$$

که درآن

$$u_n=\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \qquad (۲)$$

مؤلفهٔ $\mathbf{u}$ درجهت‌نرمال خارجی S نسبت به T بوده و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی S است.

---

۱. ر. ك. بخش ۵.۹.

۲. ر. ك. بخش ۵.۹.

تبصره. هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{n}$ را برحسب مؤلفه‌هایشان بنویسیم، مثلاً اگر بنویسیم

$$\mathbf{n}=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$$

که درآن α ، β و γ به‌ترتیب زوایای بین $\mathbf{n}$ وجهت مثبت محور xها و y ها و z ها باشند فرمول (۱) به‌شکل

$$(3^*) \qquad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (u_1\cos\alpha+u_2\cos\beta+u_3\cos\gamma)\,dA$$

درمی‌آید. بنابر (۸) بخش قبل رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$(3) \qquad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (u_1\,dy\,dz+u_2\,dz\,dx+u_3\,dx\,dy)$$

اثبات قضیهٔ دیورژانس. بدیهی است که (۳*) درست‌است، هرگاه سه رابطهٔ زیر به‌طور همزمان برقرار باشند :

$$(4) \qquad \iiint_T \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S u_1\cos\alpha\,dA\,,$$

$$(5) \qquad \iiint_T \frac{\partial u_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S u_2\cos\beta\,dA\,,$$

$$(6) \qquad \iiint_T \frac{\partial u_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S u_3\cos\gamma\,dA.$$

نخست (۶) را برای ناحیهٔ خاص T ثابت می‌کنیم که با سطح جهت‌پذیر هموار تکه‌ای S محصورشده ودارای این خاصیت‌است که هرخط موازی با هریك ازمحورهای مختصات ومتقاطع با T حداکثر دارای یك پاره‌خط (یا تنها یك نقطهٔ) مشترك با T است. اگر شرایط بالا برقرار باشد، T را می‌توان به‌صورت

$$(7) \qquad g(x\,,\,y)\leqslant z\leqslant h(x\,,\,y)$$

نمایش داد، که در آن $(x\,,\,y)$ در $\bar{R}$ ، تصویر قائم T در صفحهٔ xy ، تغییر می‌کند. بدیهی‌است که $z=g(x\,,\,y)$ نمایش S_2 «قسمت تحتانی S» (شکل۱۹۶)و$z=h(x,y)$

نمایش S_1 «قسمت فوقانی S» است، حال تنها ممکن است یك تکهٔ قائم S_3 از S باقی بماند. (ممکن است S_3 یك منحنی باشد، مثلا درمورد کره چنین است.)

برای اثبات (۶) از (۷) استفاده می‌کنیم. چون $\mathbf{u}$ در حوزه‌ای شامل T پیوسته مشتقپذیر است، داریم

$$(8) \qquad \iiint_T \frac{\partial u_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\bar R} \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z}\, dz \right] dx\, dg\,.$$

انتگرال داخل کروشه را محاسبه می‌کنیم:

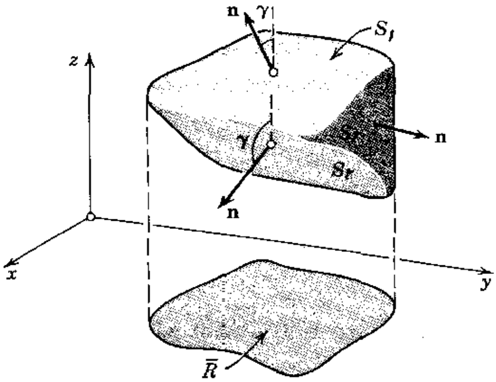
$$\int_g^h \frac{\partial u_3}{\partial z}\, dz = u_3(x, y, h) - u_3(x, y, g)\,.$$

از این‌رو طرف چپ (۸) برابر است با

$$(9) \quad \iint_{\bar R} u_3[x, y, h(x, y)]\, dx\, dy - \iint_{\bar R} u_3[x, y, g(x, y)]\, dx\, dy.$$

حال نشان‌می‌دهیم که عبارت‌بالا مساوی‌طرف راست (۶) است روی S_3، تکهٔقائم S (شکل ۱۹۶) داریم $\gamma = \pi/2$ و $\cos\gamma = 0$. درنتیجه این تکه اثری درمحاسبه انتگرال روی سطح (۶) ندارد، و

$$\iint_S u_3 \cos\gamma\, dA = \iint_{S_1} u_3 \cos\gamma\, dA + \iint_{S_2} u_3 \cos\gamma\, dA$$



شکل ۱۹۶. مثالی از ناحیهٔ خاص

(ر. ك. شکل ۱۹۶). در شکل ۱۹۶ زاویهٔ γ برای S_1 حاده است. پس بنابر ($10''$) انتهای بخش ۶.۹، به ازای $\delta = \gamma$، داریم $dA = \sec\gamma\, dx\, dy$. چون $\cos\gamma \sec\gamma = 1$، به‌دست می‌آوریم

$$\iint_{S_1} u_3 \cos\gamma \, dA = \iint_{\bar{R}} u_3 [x, y, h(x, y)] \, dx \, dy,$$

که برابر اولین انتگرال دوگانه (۹) است. زاویهٔ γ برای S_2 منفرجه است (شکل ۱۹۶)، بنابراین $\pi - \gamma$ متناظر با زاویهٔ حادهٔ δ در ($10''$) بخش ۶.۹ است، و از آنجا

$$dA = \sec(\pi - \gamma) \, dx \, dy = -\sec\gamma \, dx \, dy .$$

در نتیجه

$$\iint_{S_2} u_3 \cos\gamma \, dA = -\iint_{\bar{R}} u_3 [x, y, g(x, y)] \, dx \, dy,$$

که برابر جملهٔ آخر (۹) است. بدین ترتیب (۶) به‌اثبات می‌رسد.

روابط (۴) و (۵) تنها با عوض کردن اندیس متغیرها و فرض آنکه ناحیهٔ T دارای نمایشی مشابه (۷) است، به‌دست می‌آیند؛ این نمایشها عبارتند از

$$\tilde{g}(y, z) \leqslant x \leqslant \tilde{h}(y, z) \quad \text{و} \quad g^*(z, x) \leqslant y \leqslant h^*(z, x) .$$

بدین ترتیب قضیهٔ دیورژانس برای نواحی خاص به‌اثبات می‌رسد.

برای هر ناحیهٔ T که بتوان آن را به‌وسیلهٔ سطوح کمکی به تعدادی متناهی ناحیهٔ خاص تقسیم کرد، قضیه برقرار است زیرا می‌توان قضیه را به‌طور جداگانه در مورد هر قسمت به‌کار برد و نتایج حاصل را با هم جمع کرد؛ این شبیه همان‌کاری است که هنگام اثبات قضیهٔ گرین در بخش ۴.۹ انجام دادیم. انتگرالهای روی سطوح کمکی دوبه‌دو باهم حذف می‌شوند و آنچه باقی می‌ماند انتگرال روی S، کرانهٔ T، است؛ مجموع انتگرال روی حجم قسمتهای مختلف T برابر انتگرال روی حجم T است.

بدین ترتیب قضیهٔ دیورژانس درمورد هرناحیهٔ کراندار ثابت می‌شود؛ تا همینجای قضیه برای مسائل عملی اهمیت زیادی دارد، برای تعمیم قضیه به نحوی که در مورد هر ناحیهٔ دلخواه T صادق باشد، عمل حدگیری بخصوصی لازم است؛ این مطلب شبیه به‌تعمیم قضیهٔ گرین در بخش ۴.۹ است. ▲

قضیهٔ گرین درصفحه (بخش ۴.۹) را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال روی خط‌مورد استفاده قرار داد. همین‌طور، قضیهٔ دیورژانس برای محاسبهٔ انتگرال روی سطح مناسب است؛ مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۱. محاسبهٔ انتگرال روی سطح به‌کمک قضیهٔ دیورژانس

با تبدیل انتگرال زیر به‌انتگرال سه‌گانه، آن را محاسبه کنید:

$$I = \iint_S (x^3 dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy)$$

دراین انتگرال S سطح بسته‌ای است که از استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$ و قرصهای مستدیر $z = 0$ و $z = b$ $(x^2 + y^2 \leqslant a^2)$ تشکیل شده‌است.

با توجه به (۳) داریم

$$u_1 = x^3, \qquad u_2 = x^2 y, \qquad u_3 = x^2 z.$$

پس، هرگاه از تقارن ناحیهٔ T که با S محصور شده است استفاده کنیم، انتگرال سه‌گانهٔ طرف چپ (۳) چنین می‌شود

$$\iiint_T (3x^2 + x^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz = 4 \times 5 \int_0^b \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x^2 dx\, dy\, dz.$$

انتگرال نسبت به x برابر است با $(1/3)(a^2 - y^2)^{3/2}$. با قراردادن $y = a\cos t$ داریم

$$dy = -a \sin t\, dt, \qquad (a^2 - y^2)^{3/2} = a^3 \sin^3 t,$$

وانتگرال نسبت به y چنین می‌شود

$$\frac{1}{3}\int_0^a (a^2 - y^2)^{3/2}\, dy = -\frac{1}{3} a^4 \int_{\pi/2}^0 \sin^4 t\, dt = \frac{\pi}{16} a^4.$$

وحاصل انتگرال نسبت به z عبارت است از b؛ درنتیجه

$$I = 4 \times 5 \frac{\pi}{16} b a^4 = \frac{5\pi}{4} a^4 b.$$

▲

۹.۹ نتایج وکاربردهای قضیهٔ دیورژانس

قضیهٔ دیورژانس کاربردهای گوناگون و نتایج مهمی داردکه برخی از آنها را درمثالهای زیرتوضیح می‌دهیم. دراین مثالها فرض‌براین است که نواحی وتوابع درشرایطی که‌تحت آنها قضیهٔ دیورژانس برقرار است صدق می‌کنند و درهرمورد، مانند قبل، $\mathbf{n}$ عبارت از بردار یکهٔ نرمال خارجی برسطح کرانه‌ای ناحیه است.

مثال ۱. نمایش مستقل از مختصات دیورژاقس

با تقسیم طرفین رابطهٔ (۱) بخش ۸.۹ بر $V(T)$، حجم ناحیهٔ T، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{V(T)} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{u}\, dV = \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} u_n\, dA \qquad (1)$$

که درآن $S(T)$ سطح کرانه‌ای T است. خواص اساسی انتگرال سه‌گانه عمدتاً همان خواص انتگرال دوگانه هستندکه دربخش ۳.۹ بررسی شد. خصوصاً بنابه **قضیهٔ مقدار میانگین** در مورد ی سه‌گانه بـه ازای هر تابع پیوستهٔ $f(x, y, z)$ در ناحیهٔ مورد نظر T، نق د $Q: (x_0, y_0, z_0)$ در T موجود است به‌طوری که

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = f(x_0, y_0, z_0) V(T).$$

با قرار دادن $f = \operatorname{div}\mathbf{u}$ و با استفاده از (۱) داریم

$$\frac{1}{V(T)}\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{u}\,dV = \operatorname{div}\mathbf{u}(x_0, y_0, z_0) \cdot \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم $P : (x_1, y_1, z_1)$ نقطهٔ مشخصی در T باشد و فرض می‌کنیم ناحیهٔ T کوچك‌شده به سمت نقطهٔ P میل کند به طوری که $d(T)$، ماکزیمم فاصلهٔ نقاط T از P، به‌سمت صفر میل کند. در این صورت Q باید به‌سمت P میل کند و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دیورژانس $\mathbf{u}$ درنقطهٔ P عبارت است از

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T)\to 0}\frac{1}{V(T)}\iint_{S(T)} u_n\,dA \cdot \qquad (۳)$$

این فرمول گاهی برای تعریف دیورژانس مورد استفاده واقع می‌شود. باآنکه در تعریف دیورژانس بخش ۱۰.۸ مختصات دخالت دارد، فرمول (۳) مستقل از مختصات است. بنابراین از (۳) نتیجه می‌شود که دیورژانس مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی است.

مثال ۲. تعبیر فیزیکی دیورژانس

بـه وسیلهٔ قضیهٔ دیورژانس می‌توان تعبیری شهودی از دیورژانس بردار به دست آورد. بدین‌منظور جریان یك سیال تراکم‌ناپذیر (ر.ك. انتهای بخش ۱۰.۸) با چگالی ثابت $\rho = 1$ را درنظر می‌گیریم، به‌طوری که این جریان ایستور یا پایرجا باشد، یعنی به زمان بستگی نداشته باشد. چنین جریانی توسط میدان $\mathbf{v}(P)$، بردار سرعت، در هر نقطهٔ P تعیین می‌شود.

فرض می‌کنیم S سطح کرانه‌ای ناحیهٔ فضایی T باشد، وفرض می‌کنیم $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی S باشد. جرم سیالی که در واحد زمان ازقسمت کوچك ΔS به‌مساحت ΔA از داخل S به‌خارج جریان‌می‌یابد برابر $v_n \Delta A$ است که درآن[1] $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ مؤلفهٔ نرمال $\mathbf{v}$ درجهت $\mathbf{n}$ درنقطهٔ مناسبی از ΔS است. در نتیجه، جرم کل سیالی که در واحد زمان از طریق S از T خارج می‌شود با انتگرال روی سطح

$$\iint_S v_n\,dA$$

معین می‌شود. پس این انتگرال کل جریانی را که از T خارج می‌شود نمایش می‌دهد، و انتگرال

---

۱. توجه کنید که v_n می‌تواند درنقطهٔ معینی منفی باشد، و این بدان معنی است کـه سیال در چنین نقطه‌ای وارد ناحیهٔ فضایی محصور به S می‌شود.

$$\frac{1}{V}\iint_S v_n dA\,, \tag{۴}$$

که درآن V حجم T است، جریان میانگین خارج شده از T را نمایش می‌دهد. چون جریان پابرجا وسیال تراکم‌ناپذیر است، مقدار سیال خروجی باید به طور پیوسته جبران شود. از این‌رو هرگاه مقدار انتگرال (۴) مخالف صفر باشد، درآن صورت باید **چشمه‌هایی** (چشمه‌های مثبت وچشمه‌های منفی موسوم به **چاهك**)، یعنی نقاطی که درآنها سیال تولید یا ناپدید می‌شود در T وجود داشته باشند.

هرگاه فرض کنیم که T کوچك شده به‌سمت نقطه‌ای مانند P در T میل کند، آنگاه از (۴) شدت چشمه در P به‌دست می‌آید که برابرطرف راست (۳) (با u_n به‌جای v_n) است. ازاینجا واز(۳)نتیجه می‌شود که دیورژانس $\mathbf{v}$، بردار سرعت جریان تراکم‌ناپذیر پابرجا، برابرشدت چشمه جریان درنقطهٔ متناظر است. در T چشمه‌ای وجود ندارد اگر و تنها اگر $\operatorname{div}\mathbf{v}\equiv 0$؛ دراین حالت به‌ازای هرسطح بستهٔ S^* در T داریم

$$\iint_{S^*} v_n dA = 0\,.$$

مثال ۳. جریان‌گرما. معادلهٔ‌گرما

می‌دانیم که در هر جسم جریان گرما در جهت کاهش دما است. آزمایشهای فیزیکی نشان می‌دهند که نرخ‌جریان متناسب با گرادیان دماست. این‌بدان معنی‌است که $\mathbf{v}$، سرعت‌جریان گرما، درجسم به‌صورت

$$\mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U \tag{۵}$$

است که درآن $U(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)$ دما و t زمان است و K ضریب هدایت حرارتی جسم نامیده می‌شود؛ درشرایط عادی فیزیکی k ثابت است.

فرض می‌کنیم R ناحیه‌ای درجسم و S سطح کرانه‌ای‌آن باشد. آنگاه‌مقدار گرمایی که درواحد زمان از R خارج می‌شود برابر است با

$$\iint_S v_n dA\,,$$

که در آن $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ مؤلفهٔ $\mathbf{v}$ در جهت $\mathbf{n}$، بردار یکهٔ نرمال خارجی بر S، است. این عبارت با روشی شبیه آنچه در مثال قبل دیدیم بـه دست می‌آید. بنابر (۵) و قضیهٔ دیورژانس به‌دست می‌آوریم

$$\iint_S v_n dA = -K\iiint_R \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\,dx\,dy\,dz \tag{۶}$$

$$= -K\iiint_R \nabla^2 U\,dx\,dy\,dz\,;$$

ر. ك. (۵)، بخش ۱۰.۸.

از طرف دیگر، مقدار کل گرمای H در R عبارت است از

$$H=\iiint_R \sigma\rho U\,dx\,dy\,dz\,,$$

که درآن ثابت σ گرمای ویژهٔ جسم و ρ چگالی (= جرم واحد حجم) ماده است. از این‌رو نرخ زمانی‌کاهش H عبارت است از

$$-\frac{\partial H}{\partial t}=-\iiint_R \sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,,$$

واین مقدار باید برابر مقدار گرمای خارج شده از R باشد؛ پس بنابر (۶) داریم

$$-\iiint_R \sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,dx\,dy\,dx=-K\iiint_R \nabla^2 U\,dx\,dy\,dz$$

یا

$$\iiint_R\left(\sigma\rho\frac{\partial U}{\partial t}-K\nabla^2 U\right)dx\,dy\,dz=0\,.$$

چون‌این رابطه درمورد هرناحیهٔ R از جسم برقرار است، انتگران (درصورت‌پیوستگی) باید همه‌جا صفر باشد؛ یعنی

$$c^2=\frac{K}{\sigma\rho}\qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial t}=c^2\nabla^2 U \qquad\qquad (۷)$$

این معادلهٔ با مشتق جزئی را **معادلهٔ‌گرما** می‌نامند ؛ معادلهٔ (۷) معادلهٔ بنیادی هدایت گرمایی است . روشهای حل مسائل مربوط به هدایت گرمایی در فصل ۱۱ مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۴. یك خاصیت اساسی جوابهای معادلهٔ لاپلاس

فرمول قضیهٔ دیورژانس را درنظر می گیریم :

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{u}\,dV=\iint_S u_n\,dA\,. \qquad (۸^*)$$

فرض می کنیم $\mathbf{u}$ گرادیان یك تابع اسکالر باشد ، مثلا $\mathbf{u}=\operatorname{grad} f$. در آن صورت [ر. ك. (۵)، بخش ۱۰.۸]

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\nabla^2 f\,.$$

به‌علاوه

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} f,$$

و از (۵) ، بخش ۸.۸ ، مشاهده می‌کنیم که طرف راست برابر مشتق جهتی f در جهت نرمال خارجی بر S است. هرگاه این مشتق را با $\partial f/\partial n$ نشان دهیم ، فرمول (*۸) چنین می‌شود :

$$\iiint_T \nabla^2 f \, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dA \cdot \qquad (۸)$$

بدیهی است که این فرمول نظیر سه‌بعدی فرمول (۹)، بخش ۴.۹، است.

با در نظر گرفتن مفروضاتی که تحت آنها قضیهٔ دیورژانس برقرار است ، از (۸) قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱. (خاصیتی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس)

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ جواب معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

در ناحیه‌ای مانند D باشد و فرض کنیم که مشتقات جزئی مرتبه دوم f در D پیوسته باشد. آنگاه انتگرال مشتق نرمال f روی هر سطح جهت‌پذیر بستهٔ هموار تکه‌ای[1] S که در D قرار داشته باشد صفر است.

مثال ۵. قضیهٔ گرین

فرض می‌کنیم f و g توابعی اسکالر باشند به‌طوری‌که $\mathbf{u} = f \operatorname{grad} g$ درناحیهٔ T در مفروضات قضیهٔ دیورژانس صدق کنند. آنگاه

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$

(ر. ك. مسئلهٔ ۱۳، انتهای بخش ۱۰.۸). به‌علاوه

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot (f \operatorname{grad} g) = f(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} g) \cdot$$

عبارت $\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} g$ مشتق جهتی g درجهت بردار نرمال خارجی $\mathbf{n}$ برسطح S است. هرگاه این مشتق را با $\partial g/\partial n$ نشان دهیم، فرمول قضیهٔ دیورژانس چنین می‌شود :

$$\iiint_T (f \nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dA \cdot \qquad (۹)$$

---

۱. ر. ك. بخش ۵.۹

این فرمول به **فرمول اول گرین** یا (بـه انضمام مفروضات بالا) صورت اول قضیهٔ گرین موسوم است.

با تعویض f و g فرمول مشابهی به‌دست می‌آوریم. پس‌از کم‌کردن این فرمول از (۹) داریم

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA. \qquad (10)$$

این فرمول به **فرمول دوم گرین** یا (همراه با مفروضات مربوطه) صورت دوم قضیهٔ گرین موسوم است.

مثال ۶. یکتایی جوابهای معادلهٔ لاپلاس

فرض‌کنید f در مفروضات قضیهٔ ۱ صدق کند و در همه نقاط سطح جهت‌پذیر بستهٔ هموار تکه‌ای S در D صفر باشد. آنگاه، با قرار دادن $g=f$ در (۹) و نشان دادن داخل S با T ، به‌دست می‌آوریم

$$\iiint_T \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f\, dV = \iiint_T |\operatorname{grad} f|^2 dV = 0$$

چون بنابرفرض $|\operatorname{grad} f|$ در T و روی S پیوسته و غیرمنفی است بنابراین باید درتمام نقاط T صفر باشد. درنتیجه $f_x = f_y = f_z = 0$ و f در T ثابت است و ، به دلیل پیوستگی، برابر مقدارش روی S ، یعنی صفر، است. این ثابت می‌کند که

قضیهٔ ۲

هرگاه تابع $f(x, y, z)$ درمفروضات قضیهٔ ۱ صدق کند ودر همهٔ نقاط سطح‌جهت‌پذیر بستهٔ هموار تکه‌ای S در Dصفر باشد، آنگاه این تابع درناحیهٔ T هم‌که با S محصورشده متحد با صفر است.

این قضیه نتیجهٔ مهمی دارد. فرض می‌کنیم f_1 و f_2 توابعی باشندکه درمفروضات قضیهٔ ۱ صدق می‌کنند ومقادیرشان روی سطح S با هم مساوی است. آنگاه تفاضل آنها، $f_1 - f_2$ ، در مفروضات قضیهٔ ۱ صدق می‌کند و مقدارش در تمام نقاط S صفر است. بدین ترتیب، از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شودکه درتمام نقاط T داریم $f_1 - f_2 = 0$ ، وقضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۳. (قضیهٔ یکتایی جوابهای معادلهٔ لاپلاس)

فرض می‌کنیم f جوابی از معادلهٔ لاپلاس باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در حوزهٔ D است و فرض می‌کنیم T ناحیه‌ای در D باشدکه در مفروضات قضیهٔ دیورژانس

صدق می‌کند. دراین صورت f در T به‌طور یکتا با مقادیرش بر S، سطح‌کرانه‌ای T، مشخص می‌شود.

مسائل بخش ۹.۹

حجم نواحی زیر را با انتگرالگیری سه گانه پیدا کنید.

۱. یك چهاروجهی با رئوس $(0, 0, 0)$، $(2, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$، $(0, 0, 3)$

۲. ناحیه‌ای واقع دریك هشتم اول محدود به $y=x$، $y=x^2$ و $z=1-x$

۳. ناحیهٔ بین سهمی‌وار $z=1-x^2-y^2$ وصفحهٔ xy

۴. ناحیهٔ محدود به‌استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $y^2+z^2=1$

جرم کل توزیع جرمی به‌چگالی σ را درناحیهٔ T بیابید، هر گاه

۵. $\sigma=xyz$ ، T: مکعب $0\leqslant x\leqslant 1$ ، $0\leqslant y\leqslant 1$ ، $0\leqslant z\leqslant 1$

۶. $\sigma=x+y+2z$ ، T: یك چهاروجهی با رئوس $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$، $(0, 0, 1)$.

۷. $\sigma=xy$ ، T: ناحیه‌ای که درمسئلهٔ ۶ تشریح شد.

۸. $\sigma=z$ ، T: ناحیه‌ای واقع در یك‌هشتم اول که به $y=1-x^2$ و $z=x$ محدود است

گشتاور لختی جرمی به چگالی ۱،

$$I_z=\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

را درناحیهٔ T، حول محور z ها بیابید؛ T عبارت است از

۹. مکعب $0\leqslant x\leqslant c$ ، $0\leqslant y\leqslant c$ ، $0\leqslant z\leqslant c$.

۱۰. استوانهٔ $x^2+y^2\leqslant c^2$ ، $0\leqslant z\leqslant h$.

۱۱. مخروط $x^2+y^2\leqslant z^2$ ، $0\leqslant z\leqslant h$.

۱۲. داخل کرهٔ $x^2+y^2+z^2=c^2$.

۱۳. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس نشان دهید که V، حجم ناحیهٔ T ی محصور به سطح

S ، عبارت است از

$$V=\iint_S x\,dy\,dz=\iint_S y\,dz\,dx=\iint_S z\,dx\,dy$$
$$=\frac{1}{3}\iint_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$$

۱۴. درستی فرمولهای مسئلهٔ ۱۳ را درمورد مکعب تحقیق کنید.

۱۵. درستی فرمولهای مسئلهٔ ۱۳ را در مورد استوانهٔ $1 \leqslant x^2+y^2$ ، $0 \leqslant z \leqslant h$ تحقیق کنید.

۱۶. با استفاده از $\mathbf{u}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ در (۱)، بخش ۸.۹، نشان دهید حجم ناحیه‌ای مانند T که سطح کرانه‌ای آن S است عبارت است از

$$V=\frac{1}{3}\iint_S r\cos\theta\,dA$$

که در آن r فاصلهٔ نقطهٔ متغیر $P:(x\,,\,y\,,\,z)$ ، واقع بر S ، از مبدأ O و θ زاویهٔ بین خط جهت‌دار OP و نرمال خارجی بر S در P است.

۱۷. با استفاده از فرمولی که در مسئلهٔ ۱۶ داده شده است ، حجم کره‌ای به شعاع a را بیابید.

انتگرالهای روی سطح زیر را به کمك قضیهٔ دیورژانس محاسبه کنید ، فرض براین است که S به‌همان نحوی که در قضیه گفته شد جهت‌دار شده است.

۱۸. $$\iint_S [(x+z)\,dy\,dz+(y+z)\,dz\,dx+(x+y)\,dx\,dy]$$

$S: x^2+y^2+z^2=4$

۱۹. $\iint_S (x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy)$ ، S : سطح مکعبی که در مسئلهٔ ۵ معرفی شد

۲۰. $\iint_S (e^x dy\,dz-ye^x dz\,dx+3z\,dx\,dy)$ ، S : سطح استوانه‌ای که در مسئلهٔ ۱۰ معرفی شد.

۲۱. $\iint_S (yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy)$ ، S مانند مسئلهٔ ۱۸

۲۲. $\iint_S xyz\,dy\,dz$ ، S : متوازی‌السطوح $0 \leqslant x \leqslant 3$ و $0 \leqslant y \leqslant 2$ ، $0 \leqslant z \leqslant 1$

۲۳. $\iint_S [\sin x\,dy\,dz + (2 - \cos x)\,y\,dz\,dx]$ ، S مانند مسئلهٔ ۲۲

۲۴. $\iint_S [(y\cos x^2 + y^3)\,dz\,dx + z\,(\sin^2 x - 3y^2)\,dx\,dy]$ ، S مانند مسئلهٔ ۱۸

فرض کنید T ناحیهٔ کراندار بسته‌ای در فضا و S سطح کرانه‌ای آن باشد. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، احکام زیر را ثابت کنید.

۲۵. هرگاه g درحوزه‌ای شامل T **همساز**[1] باشد، آنگاه

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial n}\,dA = 0.$$

۲۶. هرگاه g درحوزه‌ای شامل T همساز باشد، آنگاه

$$\iint_S g\,\frac{\partial g}{\partial n}\,dA = \iiint_S |\text{grad } g|^2 dV \cdot$$

۲۷. هرگاه g در حوزه‌ای شامل T همساز باشد و در هر نقطه از S داشته باشیم $\partial g/\partial n = 0$ ، آنگاه g در T ثابت است.

۲۸. هرگاه f و g درحوزه‌ای شامل T همساز باشند و در هر نقطه از S داشته باشیم $\partial f/\partial n = \partial g/\partial n$ ، آنگاه در T داریم $f = g + c$ ، که درآن c مقداری ثابت است.

۲۹. هرگاه f و g درحوزه‌ای شامل T همساز باشند، آنگاه

$$\iint_S \left(f\,\frac{\partial g}{\partial n} - g\,\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA = 0.$$

۳۰. نشان دهید که لاپلاسی را می‌توان مستقل از تمامی دستگاههای مختصات به صورت

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n}\,dA$$

۱. یعنی g جواب معادلهٔ لاپلاس است ومشتقات جزئی مرتبه دوم آن در T پیوسته‌اند.

نمایش داد که در آن $d(T)$ ماکزیمم فاصلهٔ نقاط ناحیهٔ T ی محصور با $S(T)$، از نقطــه‌ای است کــه لاپلاسی در آن محاسبه می‌شود و $V(T)$ حجم T است. راهنمایی. در (۳) قرار دهید $\mathbf{u}=\operatorname{grad} f$ واز (۵) بخش ۸.۸، با این فرض که $\mathbf{b}=\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی بر S است استفاده کنید.

۱۰.۹ قضیهٔ استوکس

دربخش ۴.۹ نشان دادیم که انتگرال دوگانه روی‌یك ناحیهٔ صفحه‌ای‌را می‌توان‌به‌انتگرال روی خط، روی منحنی کرانه‌ای آن ناحیه، تبدیل کرد. اکنون با تعمیم این قضیه به‌بررسی مسئلهٔ متناظر درمورد انتگرال روی سطح می‌پردازیم.

قضیهٔ استوکس[1] (تبدیل انتگرالهای روی سطح به‌انتگرالهای روی خط و بالعکس)

فرض می‌کنیم S یك سطح جهت‌دار هموار تکه‌ای[2] در فضا باشد و C، کرانهٔ S، یك منحنی بستهٔ سادهٔ هموار تکه‌ای باشد. فرض‌می‌کنیم $\mathbf{v}(x, y, z)$ تابع برداری پیوسته‌ای باشدکه درحوزه‌ای شامل S درفضا دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه

$$\iint_S (\operatorname{culr} \mathbf{v})_n dA=\int_C v_t ds; \tag{۱}$$

دراینجا $(\operatorname{curl} \mathbf{v})_n=(\operatorname{curl} \mathbf{v})\cdot \mathbf{n}$ مؤلفهٔ $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ درامتداد $\mathbf{n}$، بردار یکهٔ نرمال بر S است، انتگرالگیری حول C در جهت نشان داده شده درشکل ۱۹۷ انجام می‌گیرد، و v_t مؤلفهٔ $\mathbf{v}$ درامتداد بردار مماس بر C در شکل ۱۹۷ است.

اثبات. نخست قضیهٔ استوکس رادرمورد سطح S که می‌توان آن‌رادرعین حال به‌صورتهای

$$\text{(الف)}\ z=f(x, y)\ ،\quad \text{(ب)}\ y=g(x, z)\ ،\quad \text{(پ)}\ x=h(y, z) \tag{۲}$$

نمایش داد، ثابت می‌کنیم. دراینجا f، g، و h نسبت به‌متغیرهای مربوطه پیوسته‌هستند ونسبت به‌آنها دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم

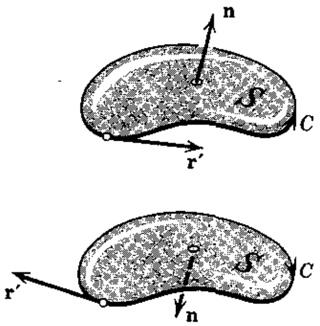
$$\mathbf{n}=\cos\alpha\, \mathbf{i}+\cos\beta\, \mathbf{j}+\cos\gamma\, \mathbf{k} \tag{۳*}$$

بردار یکهٔ نرمال «بالایی» S باشد (شکل ۱۹۸) وفرض می‌کنیم $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$. هرگاه C را به‌صورت $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ نمایش دهیم؛ (دراین معادله طول قوس s در جهت انتگرالگیری افزایش می‌یابد)؛ بردار یکهٔ مماس عبارت است از

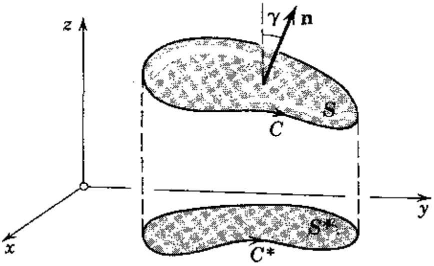
---

۱. جرج گبریل استوکس (George Gabriel Stokes)، ۱۸۱۹ـ۱۹۰۳، ریاضیدان و فیزیکدان‌ایرلندی‌که سهم بسزایی درپیشبرد نظریهٔ سریهای نامتناهی وبعضی شاخه‌های‌فیزیك نظری دارد.

۲. ر. ك. بخشهای ۱.۹ و ۵.۹.



شکل ۱۹۷. قضیهٔ استوکس



شکل ۱۹۸. اثبات قضیهٔ استوکس

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

بنا بر این

$$v_t=\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}=v_{۱}\frac{dx}{ds}+v_{۲}\frac{dy}{ds}+v_{۳}\frac{dz}{ds}\cdot$$

از اینجا داریم

$$v_t ds=\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}ds=v_{۱}dx+v_{۲}dy+v_{۳}dz\ .$$

درنتیجه ، هر گاه از نمایش تاو در دستگاه مختصات دکارتی راستگرد [د. ك. (۱)، بخش ۱۱.۸] استفاده کنیم، می‌توانیم فرمول قضیهٔ استوکس را به‌صورت زیر بنویسیم :

$$\iint_S\Big(\frac{\partial v_{۳}}{\partial y}-\frac{\partial v_{۲}}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\Big(\frac{\partial v_{۱}}{\partial z}-\frac{\partial v_{۳}}{\partial x}\Big)\cos\beta$$
$$(۳)\qquad +\Big(\frac{\partial v_{۲}}{\partial x}-\frac{\partial v_{۱}}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]dA=\int_C(v_{۱}dx+v_{۲}dy+v_{۳}dz),$$

که α ، β ، و γ به کمك (*۳) تعریف می‌شوند.

ثابت می‌کنیم که در (۳) انتگرالهای شامل $v_{۱}$ برابرند با

$$(۴)\qquad \iint_S\Big(\frac{\partial v_{۱}}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial v_{۱}}{\partial y}\cos\gamma\Big)dA=\int_C v_{۱}dx\ .$$

فرض می کنیم S^* تصویر قائم S در صفحهٔ xy و C^* کرانهٔ آن باشد که مطابق شکل ۱۹۸ جهت‌دار شده است. با استفاده از نمایش (۲ الف) برای S ، می‌توانیم انتگرال روی خط C را به‌صورت انتگرال روی خط C^* بنویسیم :

$$\int_C v_{۱}(x,y,z)\,dx=\int_{C^*}v_{۱}[x,y,f(x,y)]\,dx\ .$$

حال قضیهٔ گرین در صفحه (بخش ۴.۹) را روی توابع $v_1[x, y, f(x, y)]$ و 0 [به‌جای f و g دربخش ۴.۹] اعمال می‌کنیم. آنگاه

$$\int_{c^*} v_1[x, y, f(x, y)]\, dx = -\iint_{s^*} \frac{\partial v_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

در انتگرال طرف راست داریم

$$\frac{\partial v_1[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$[z = f(x, y)]$$

و بنابراین

$$(۵) \qquad \int_c v_1(x, y, z)\, dx = -\iint_{s^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

ثابت می‌کنیم که انتگرال طرف چپ (۴) برابر انتگرال طرف راست (۵) است. در انتگرال اخیر x و y را به‌عنوان متغیرهای انتگرالگیری درنظر می‌گیریم. با نوشتن (۲ الف) به‌صورت

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0,$$

به‌دست می‌آوریم

$$\text{grad}\, F = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

اگر طول $\text{grad}\, F$ را با a نشان دهیم، داریم

$$a = |\text{grad}\, F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

چون $\text{grad}\, F$ نرمال بر S است، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\text{grad}\, F}{a}.$$

که در آن $\mathbf{n}$ مانند قبل تعریف شده است. ولی مؤلفه‌های $\mathbf{n}$ و $\text{grad}\, F$ هردو درجهت مثبت محور z ها هستند، بنابراین

$$\mathbf{n} = +\frac{\text{grad}\, F}{a}.$$

پس با توجه به نمایشهای پیشین $\mathbf{n}$ و $\operatorname{grad} F$ برحسب مؤلفه‌هایشان نسبت به دستگاه مختصات xyz ، مشاهده می‌کنیم که

$$\cos\alpha = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \cos\beta = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{a}.$$

به‌علاوه، بنابر ($1\circ'$)، انتهای بخش ۶.۹، نتیجه می‌شود که در (۴) داریم $dA = a\,dx\,dy$. در نتیجه

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\right) dA$$

$$= \iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{1}{a}\right) a\,dx\,dy.$$

انتگرال سمت راست برابر طرف راست (۵) است و بدین ترتیب (۴) به اثبات می‌رسد.

هرگاه $\mathbf{n}-$ به‌عنوان جهت مثبت نرمال انتخاب شود، آنگاه بنابر فرض جهت انتگرالگیری در امتداد C عوض می‌شود و نتیجه همان نتیجهٔ قبلی خواهد بود. این موضوع نشان می‌دهد که (۴) مستقل از انتخاب هرجهت مثبتی برای نرمال بر S برقرار است.

با استفاده از نمایشهای (۲ ب) و (۲ پ) ی S و با استدلالی کاملا مشابه، به‌دست می‌آوریم

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\alpha\right) dA = \int_C v_2\,dy \tag{۶}$$

و

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x}\cos\beta\right) dA = \int_C v_3\,dz. \tag{۷}$$

با جمع کردن (۴)، (۶) و (۷) فرمول (۱) را به‌دست می‌آوریم. این S اثبات قضیهٔ استوکس است درمورد سطحی مانند S که می‌توان آن‌را همزمان به‌صورتهای (۲ الف)، (۲ ب) و (۲ پ) نمایش داد.

مانند آنچه دراثبات قضیهٔ دیورژانس دیدیم، قضیهٔ فوق را می‌توان به‌سطحی مانند S که قابل تبدیل است به‌تعدادی متناهی سطح، که دارای خواص گفته‌شده هستند، تعمیم داد؛ مواردی که درعمل پیش می‌آیند معمولا از این نوعند. اثبات قضیه درحالت کلی برای تمامی سطوحی که درمفروضات قضیه صدق می‌کنند نیاز به‌یك فرایند حدگیری دارد شبیه آنچه در قضیهٔ گرین بخش ۴.۹ به‌آن اشاره کردیم. ▲

۱۱.۹ نتایج و کاربردهای قضیهٔ استوکس

مثال ۱. قضیهٔ گرین در صفحه به‌عنوان حالت خاصی از قضیهٔ استوکس

فرض می کنیم $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$ تابعی‌برداری باشد که درحوزه‌ای از صفحهٔ xy که‌شامل ناحیهٔ بستهٔ همبند سادهٔ S که C، کرانهٔ آن، یك منحنی بسته وهموارتکه‌ای است، پیوسته مشتقپذیر باشد. آنگاه بنابر (۱)، بخش ۱۱.۸، داریم

$$(\operatorname{curl}\mathbf{v})_n=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\cdot$$

به‌علاوه، $v_t\,ds=v_1\,dx+v_2\,dy$، و (۱) بخش قبل به‌صورت

$$\iint_S\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)dA=\int_C(v_1\,dx+v_2\,dy)\,.$$

درمی‌آید، این نشان می‌دهد که قضیهٔ گرین در صفحه (بخش ۴.۹) حالت خاصی از قضیهٔ استوکس است.

مثال ۲. تعبیر فیزیکی تاو

فرض‌می‌کنیم S_r قرص مستدیری باشعاع r ومرکز P باشدکه با دایرهٔ C_r محصور شده است (شکل۱۹۹)، و فرض می کنیم $\mathbf{v}(Q)\equiv\mathbf{v}(x\,,\,y\,,\,z)$ تابع برداری پیوسته مشتقپذیری، درحوزه‌ای شامل S_r، باشد. آنگاه بنابرقضیهٔ استوکس وقضیهٔ مقدارمیانگین درمورد انتگرال روی سطح داریم

$$\int_{C_r}v_t\,ds=\iint_{S_r}(\operatorname{curl}\mathbf{v})_n\,dA=[\operatorname{curl}\mathbf{v}(P^*)]_n\,A_r$$

که در آن A_r مساحت S_r و P^* نقطهٔ مناسبی از S_r است. این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$[\operatorname{curl}\mathbf{v}(P^*)]_n=\frac{1}{A_r}\int_{C_r}v_t\,ds\,\cdot$$

درمورد حرکت سیالی که سرعت آن $\mathbf{v}$ است، انتگرال

$$\int_{C_r}v_t\,ds$$

به **گردش** جریان حول C_r موسوم است؛ این انتگرال محدوده‌ای را تعیین می کند که حرکت سیال متناظر به‌آن، دورانی حول دایرهٔ C_r است. حال اگر r را به سمت صفر

میل دهیم، خواهیم داشت

$$[\text{curl}\, \mathbf{v}(P)]_n = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_t\, ds; \qquad (1)$$

یعنی مؤلفهٔ تاو درجهت مثبت نرمال را می‌توان به‌صورت گردش خاص (گردش بر واحد سطح) جریان درسطح، در نقطهٔ متناظر، تصور کرد.

مثال ۳. محاسبهٔ انتگرال روی خط به‌کمك قضیهٔ استوکس

مطلوب است محاسبهٔ $\int_C v_t\, ds$ که در آن C دایرهٔ $x^2+y^2=4$ ، $z=-3$ است. دایرهٔ C ازنظر ناظری که در مبدأ ایستاده است در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است، و نسبت به‌دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

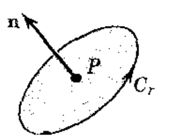
$$\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + xz^3\,\mathbf{j} - zy^3\,\mathbf{k}.$$

سطح S راکه باید به C محصور باشد می‌توان قرص مستدیر مسطح $x^2+y^2 \leqslant 4$ در صفحهٔ $z=-3$ درنظر گرفت. در این‌صورت بردار $\mathbf{n}$ ی‌که در قضیهٔ استوکس داشتیم درجهت مثبت محور zها خواهد بود، بنابراین $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ و $(\text{curl}\,\mathbf{v})_n$ مؤلفهٔ $\text{curl}\,\mathbf{v}$ در جهت مثبت محور zهاست. چون $\mathbf{v}$ به‌ازای $z=-3$ دارای مؤلفه‌های $v_1=y$ ، $v_2=-27x$ ، $v_3=3y^3$ است، بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$(\text{curl}\,\mathbf{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27-1=-28.$$

پس انتگرال روی S، (درقضیهٔ استوکس) -28 برابر 4π ، مساحت قرص S ، است. با توجه به‌این امر، جواب چنین است $-28 \times 4\pi = -112\pi \approx -352$.

برای صرفه‌جویی درمحاسبات، خواننده می‌تواند انتگرال را مستقیماً محاسبه کند،



شکل ۱۹۹. مثال۲

بدین‌ترتیب‌که ابتدا C را به‌صورت پارامتری نمایش دهد، بعد $v_t=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ را محاسبه کند وسپس نسبت به‌طول قوس s انتگرال بگیرد؛ در اینجا، $\mathbf{v}$ در نقاط C در نظر گرفته می‌شود و $\mathbf{u}$ بردار یکهٔ مماس بر C درجهت انتگرال‌گیری است.

مسائل بخش ۱۱.۹

مطلوب است محاسبهٔ $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{v})_n\, dA$ ، که در آن

۱. $\mathbf{v}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ ، S : مربع $\circ \leqslant x \leqslant ۱$ ، $\circ \leqslant y \leqslant ۱$ ، $z=۱$

۲. $\mathbf{v}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ ، S : مربعی که در مسئلهٔ ۱ معرفی شد

۳. $\mathbf{v}=-y^۳\mathbf{i}+x^۳\mathbf{j}$ ، S : قرص مستدیر $x^۲+y^۲ \leqslant ۱$ ، $z=\circ$

۴. درستی قضیهٔ استوکس را درمورد $\mathbf{v}$ و S ی که در مسئلهٔ ۱ داده شده‌اند تحقیق کنید.

۵. درستی قضیهٔ استوکس را درمورد $\mathbf{v}$ و S ی که در مسئلهٔ ۳ داده‌شده‌اند تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که اگر $\mathbf{v}$ و S در مفروضات قضیهٔ استوکس صدق کند و $\mathbf{v}=\text{grad}\,f$ ، آنگاه $\int_C v_t\, ds=\circ$ ، که در آن C کرانهٔ S است.

با توجه به‌قضیهٔ استوکس، مطلوب است محاسبهٔ $\int_C v_t\, ds$ ؛ اگر نسبت به‌دستگاه‌مختصات دکارتی راستگرد داشته باشیم

۷. $\mathbf{v}=۲y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+۳y\mathbf{k}$ ، C: اشتراك $x^۲+y^۲+z^۲=۶z$ و $z=x+۳$ ، که نسبت به‌ناظری که در مبدأ است درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت جهت‌دارشده

۸. $\mathbf{v}=-۳y\mathbf{i}+۳x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، C : دایرهٔ $x=\cos\alpha$ ، $y=\sin\alpha$ ، $z=۱$ $(\circ \leqslant \alpha \leqslant ۲\pi)$

۹. $\mathbf{v}=y^۲\mathbf{i}+x^۲\mathbf{j}-(x+z)\mathbf{k}$ ، C: کرانهٔ مثلثی با رئوس $(\circ\,,\circ\,,\circ)$ ، $(۱\,,\circ\,,\circ)$ ، $(\circ\,,۱\,,۱)$ ، (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۰. $\mathbf{v}=۴z\mathbf{i}-۲x\mathbf{j}+۲x\mathbf{k}$ ، C : اشتراك $x^۲+y^۲=۱$ و $z=y+۱$ ، که نسبت به‌ناظری که در مبدأ است درجهت حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده

۱۱. $\mathbf{v}=x^۲\mathbf{i}+y^۲\mathbf{j}+z^۲\mathbf{k}$ ، C : فصل مشترك $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ و $z=y^۲$

با استفاده از (۳)ی بخش قبل، هریك از انتگرالهای روی خط زیر را حول مرز دادهٔشدهٔ C ، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت (نسبت به‌ناظری که در مبدأ است)، محاسبه کنید.

۱۲. $\int_C (z\,dx+x\,dy+y\,dz)$ ، C : کرانهٔ مثلثی با رئوس $(۱\,,\circ\,,\circ)$ و $(\circ\,,۱\,,\circ)$ و $(\circ\,,\circ\,,۱)$

۱۳. $\int_C (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$ ، C: فصل مشترك $x^2+y^2=1$ و $z=y^2$

۱۴. $\int_C (\sin z\,dx - \cos x\,dy + \sin y\,dz)$ ، C: کرانهٔ مستطیل $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$ ، $z=3$

۱۵. $\int_C (e^x dx + 2y\,dy - dz)$ ، $C: x^2+y^2=4$ ، $z=2$

۱۲.۹ انتگرالهای روی خط مستقل از مسیر

دربخش ۲.۹ دیدیم که مقدار انتگرال روی خط

$$\int_C (f\,dx + g\,dy + h\,dz) \qquad (1)$$

درحالت کلی نه‌فقط به‌نقاط انتهایی P و Q ازمسیر C بلکه به خود C نیز بستگی دارد؛ یعنی، هر گاه از P تا Q درامتداد مسیرهای مختلف انتگرال بگیریم، درحالت کلی، مقادیر مختلفی برای انتگرال به‌دست خواهد آمد. حال می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی این مقدار فقط به P و Q بستگی دارد و به مسیر C از P تا Q بستگی ندارد. این مسأله بسیار بااهمیت است. نخست تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

فرض‌می کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ ، و $h(x, y, z)$ توابعی‌باشند که درحوزه‌ای مانند D از فضا تعریف شده وپیوسته‌اند. آنگاه انتگرال روی خط (۱) را در D **مستقل از مسیر** نامند هر گاه به‌ازای هرزوج‌نقطهٔ انتهایی P و Q در D مقدار انتگرال به‌ازای همهٔ مسیرهای C ی واقع در D که از P شروع وبه Q ختم می‌شوند یکسان باشد. بدین‌ترتیب این مقدار، در حالت کلی ، به‌انتخاب نقاط P و Q بستگی‌دارد ونه به‌مسیری که آنها را به‌هم وصل می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که بنا برتعریف، تابع رابطه‌ای‌است **تك مقداری**، یعنی یك‌تابع به‌هر نقطه ازحوزهٔ تعریفش تنها یك‌مقدار ازبرد خود مربوط می‌کند. این‌موضوع دربحث حاضر حائز اهمیت است.

برای فرمولبندی‌کردن نتایج، دومفهوم زیر مفید است.

عبارتی به‌صورت

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz , \qquad (2)$$

که درآن f ، g ، h توابعی هستندکه در حوزه‌ای مانند D درفضا تعریف شده‌اند، به **صورت دیفرانسیلی** مرتبهٔ اول سه‌متغیره موسوم است. این‌صورت را **کامل** یا یك‌دیفرانسیل کامل در D نامند، هر گاه درهمهٔ نقاط D مساوی دیفرانسیل

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{۳}$$

تابع مشتقپذیر $u(x, y, z)$ باشد؛ یعنی داشته باشیم

$$f\,dx+g\,dy+h\,dz=du\,. \tag{۴}$$

بامقایسهٔ (۳) و (۴) مشاهده می‌کنیم که صورت (۲) در D وقتی و فقط وقتی کامل است‌که‌تابع‌مشتقپذیری‌مانند $u(x, y, z)$ موجود باشد به‌طوری‌که همه‌جا در D داشته باشیم

$$f=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad g=\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad h=\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{۵}$$

به‌زبان برداری این بدان‌معنی است که صورت (۲) در D وقتی وفقط وقتی کامل است‌که تابع برداری

$$\mathbf{v}=f\,\mathbf{i}+g\,\mathbf{j}+h\,\mathbf{k}$$

برابر گرادیان تابع $u(x, y, z)$ در D باشد:

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\,. \tag{۵'}$$

حال ثابت می‌کنیم که‌کامل بودن، شرطی لازم وکافی است برای آنکه انتگرال از مسیر مستقل باشد.

قضیهٔ ۱ (کامل بودن و استقلال از مسیر)

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ و $h(x, y, z)$ در حوزه‌ای مانند D از فضا پیوسته باشند. آنگاه انتگرال روی خط

$$\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz) \tag{۶}$$

در D مستقل‌ازمسیراست اگر وتنها‌اگر صورت‌دیفرانسیلی‌زیر علامت‌انتگرال در D کامل‌باشد.

تبصره. توجه کنید که (۶) را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \tag{۶'}$$

که در آن $\mathbf{v}=f\mathbf{i}+g\,\mathbf{j}+h\mathbf{k}$ و $d\mathbf{r}=dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}$.

اثبات قضیه. (الف) فرض می‌کنیم انتگرال مورد نظر در D مستقل از مسیر باشد. نقطهٔ ثابت‌دلخواه $P: (x_0, y_0, z_0)$ ونقطه‌ای‌مانند $Q: (x, y, z)$ را در D انتخاب می‌کنیم. سپس تابع $u(x, y, z)$ را با فرمول

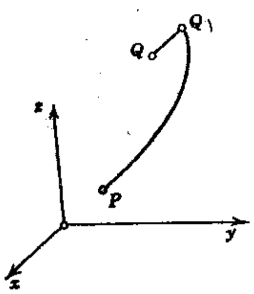
$$u(x, y, z) = u_0 + \int_P^Q (f\,dx^* + g\,dy^* + h\,dz^*) \qquad (۷)$$

که در آن u_0 مقداری است ثابت، تعریف می‌کنیم و در D در امتداد مسیری دلخواه از P تا Q انتگرال می‌گیریم، چون انتگرال مستقل‌ازمسیر و P نقطه‌ای‌ثابت‌است، بنابراین انتگرال مزبور فقط به‌مختصات x ، y ، z نقطهٔ انتهایی ، Q ، بستگی دارد و تابعی مانند $u(x, y, z)$ در D تعریف می‌کند. حالا کافی است نشان دهیم که روابط (۵) از (۷) نتیجه می‌شوند. یعنی نشان دهیم که $f\,dx + g\,dy + h\,dz$ در D کامل است. نخست به‌اثبات‌اولین‌رابطه ازاین‌روابط می‌پردازیم؛ چون انتگرال مستقل از مسیراست، می‌توانیم از P تا نقطه‌ای مانند $Q_1: (x_1, y, z)$ و سپس بـه موازات محور x ها در امتداد پاره‌خطی از Q_1 تا Q انتگرال بگیریم (شکل ۲۰۰)؛ دراینجا Q_1 طوری اختیار می‌شود که تمامی پاره خط Q_1Q در D واقع شود. آنگاه

$$u(x, y, z) = u_0 + \int_P^{Q_1} (f\,dx^* + g\,dy^* + h\,dz^*) + \int_{Q_1}^{Q} (f\,dx^* + g\,dy^* + h\,dz^*).$$

از طرفین نسبت‌به x مشتق جزئی می‌گیریم. چون P و Q_1 به x بستگی ندارند، مشتق انتگرال اول صفراست. چون روی پاره خط Q_1Q هم y و هم z ثابت هستند، انتگرال آخر را می‌توان به‌صورت انتگرال معین زیر نوشت:

$$\int_{x_1}^{x} f(x^*, y, z)\,dx^*.$$



شکل ۲۰۰. اثبات قضیهٔ ۱

از این‌رو مشتق جزئی انتگرال نسبت به x برابر $f(x, y, z)$ است، و بدین‌ترتیب رابطهٔ اول از روابط (۵) به اثبات می‌رسد. دو رابطهٔ دیگر را می‌توان بــه همین طریق ثابت کرد.

(ب) برعکس، فرض کنید که $f\,dx+g\,dy+h\,dz$ در D کامل باشد. آنگاه (۵) به‌ازای تابعی مانند u در D برقرار است. گیریم C مسیری دلخواه از P تا Q در D باشد و

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$$

نمایشی پارامتری از C باشد به‌طوری‌که در آن P متناظر با $t=t_0$ و Q متناظر بــا $t=t_1$ باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}\int_P^Q (f\,dx+g\,dy+h\,dz) &= \int_P^Q \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt}dt = u\Big[x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t)\Big]_{t=t_0}^{t=t_1}\\ &= u(Q)-u(P).\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که مقدار انتگرال عبارت است از تفاضل مقادیر u در دو نقطهٔ انتهایی C، وبنابراین، مستقل از C است. بدین‌طریق قضیهٔ ۱ ثابت می‌شود. ▲

آخرین فرمولی که دراثبات دیدیم:

$$\int_P^Q (f\,dx+g\,dy+h\,dz)=u(Q)-u(P)\,, \tag{۸}$$

شبیه فرمول متداول

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad [\text{که در آن } F'(x)=f(x)]$$

برای محاسبهٔ انتگرالهای معین است که درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی باآن آشنا شده‌ایم. فرمول (۸) وقتی به‌کار می‌رود که انتگرال روی خط مستقل از مسیر باشد. مورد استفادهٔ عملی این فرمول در انتهای همین بخش، درمثال ۳، تشریح شده است.

یادآوری می‌کنیم کار W که توسط نیروی (متغیر) $\mathbf{p}=f\,\mathbf{i}+g\,\mathbf{j}+h\,\mathbf{k}$، برای جابه‌جا کردن ذره‌ای در امتداد مسیر C در فضا انجام می‌شود با انتگرال روی خط (۷) بخش ۲.۹ معین می‌شود:

$$W=\int_C \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r}=\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz),$$

انتگرالگیری درجهت جابه‌جایی انجام می گیرد. ازقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شودکه شرط لازم و کافی برای آنکه W فقط به P و Q، نقاط انتهایی مسیر C، بستگی داشته باشد آن است‌که صورت دیفرانسیلی زیـر علامت انتگرال کامل باشد؛ و این‌صورت وقتی و فقط وقتی‌کامل است‌کـه $\mathbf{p}$ برابر گرادیان تابع اسکالری مانند u باشد. دراین حالت میدان نیروی $\mathbf{p}$ را **پایستار** می‌نامند (انتهای بخش ۸.۸ را نیز ببینید).

مثال ۱. کاری‌که نیروی متغیر انجام می‌دهد

مطلوب است محاسبهٔ W کاری که نیروی $\mathbf{p}=yz\,\mathbf{i}+xz\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k}$ برای جابه‌جا ـ کردن یك ذره درامتداد پاره‌خط مستقیم C از $P:(۱,۱,۱)$ تا $Q:(۳,۳,۲)$ انجام می‌دهد. این‌کار با انتگرال زیر داده می‌شود:

$$W=\int_C (yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz).$$

این انتگرال به‌صورت (۱) است و درآن

$$f=yz\,,\qquad g=xz\,,\qquad h=xy\,,$$

یعنی (۵) به‌ازای $u=xyz$ برقرار است. پس W مستقل از مسیر است و می‌توانیم از (۸) استفاده‌کنیم، درنتیجه

$$W=u(Q)-u(P)=u(۳,۳,۲)-u(۱,۱,۱)=۱۸-۱=۱۷$$

▲

از قضیهٔ ۱، بلافاصله می‌توان نتیجهٔ مهم زیر را گرفت.

قضیهٔ ۲ (استقلال از مسیر)

فرض می‌کنیم f ، g ، h درحوزه‌ای‌مانند D از فضا پیوسته باشند. آنگاه انتگرال‌روی‌خط

$$\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz)$$

در D مستقل از مسیر است اگر وتنها اگراین انتگرال‌روی هرمسیربستهٔ ساده در D صفرباشد.

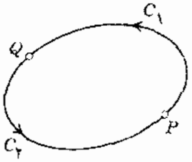
اثبات. (الف) فرض می کنیم C مسیر بستهٔ ساده‌ای در D باشد و انتگرال مزبور در D مستقل ازمسیر باشد. C را به‌دوقوس $C_۱$ و $C_۲$ تقسیم می کنیم (شکل۲۰۱). آنگاه

$$\oint_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz)=\int_{C_۱}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)+\int_{C_۲}(f\,dx+g\,dy+h\,dz). \tag{۹}$$

به‌دلیل مستقل بودن انتگرال از مسیر، خواهیم داشت

$$\int_{C_2}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)=\int_{C_1^*}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)$$
$$=-\int_{C_1}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)\,,$$

که درآن C_1^* همان C_1 است منتهی با جهت معکوس. از اینجا نتیجه می‌شود که طرف چپ (۹) برابر صفر است.



شکل ۲۰۱. اثبات قضیهٔ ۲

(ب) برعکس، فرض می‌کنیم که انتگرال مورد نظر روی هرمسیر بستهٔ ساده در D صفر باشد. گیریم P و Q دونقطه دلخواه از D، و C_1 و C_2 دومسیر در D باشند که P و Q را به‌هم وصل می‌کنند و متقاطع نیستند (شکل ۲۰۱). C_1 و C_2 با هم مرز بستهٔ سادهٔ C را تشکیل می‌دهند. بنابراین،

$$\int_{C_1}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)+\int_{C_2}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)$$
$$=\oint_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz)=0\,.$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$\int_{C_2}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)=-\int_{C_1}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)$$
$$=\int_{C_1^*}(f\,dx+g\,dy+h\,dz)\,.$$

وبدین ترتیب اثبات قضیهٔ ۲ به‌اتمام می‌رسد. ▲

تعمیم این قضیه به مسیرهای بسته‌ای که به دفعات محدودی خود را قطع می‌کنند به‌سادگی صورت می‌پذیرد.

برای اینکه در عمل بتوانیم از قضیهٔ سادهٔ ۱ به‌طور مؤثری استفاده کنیم به معیاری نیاز داریم که بتوانیم توسط آن کامل بودن صورت دیفرانسیلی زیرعلامت انتگرال را تحقیق کنیم. چنین معیاری درقضیهٔ ۳ی زیر ارائه شده است. برای فرمولبندی کردن این قضیه به مفهوم زیر نیاز داریم.

حوزهٔ D را **همبند ساده** می‌نامند هرگاه هر منحنی بسته در D را بتوان به طور پیوسته بدون اینکه از D خارج شود، دریك نقطهٔ دلخواه D جمع کرد.

مثلا داخل یك کره یا یك مکعب، داخل کره‌ای که تعدادی متناهی از نقاط آن برداشته شده و ناحیهٔ بین دو کرهٔ متحدالمرکز همبند ساده‌اند ولی داخل یك چنبره (ر. ك. بخش ۶.۹) و داخل مکعبی که یك قطر فضایی آن برداشته شده باشد، همبند ساده نیستند.

قضیهٔ ۳. (معیارکامل بودن و استقلال از مسیر)

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ و $h(x, y, z)$ توابعی پیوسته، با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته، درحوزه‌ای مانند D از فضا باشند. هرگاه انتگرال روی خط

$$\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz) \qquad (۱۰)$$

در D مستقل از مسیر باشد (ودرنتیجه $f\,dx+g\,dy+h\,dz$ در D کامل باشد)، آنگاه

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (۱۱)$$

یا به‌زبان برداری، درتمام نقاط D

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}=0 \qquad (\mathbf{v}=f\mathbf{i}+g\mathbf{j}+h\mathbf{k}) \qquad (۱۱')$$

برعکس، هرگاه D همبند ساده باشد و (۱۱) درهمهٔ نقاط D برقرار؛ آنگاه انتگرال (۱۰) در D مستقل ازمسیر است (درنتیجه، صورت دیفرانسیلی $f\,dx+g\,dy+h\,dz$ در D کامل است).

اثبات. (الف) فرض می‌کنیم که (۱۰) در D مستقل از مسیر باشد. آنگاه، با توجه به‌قضیهٔ ۱، صورت $f\,dx+g\,dy+h\,dz$ در D کامل است وتابعی مانند u وجود دارد به‌طوری که، با توجه به (۵′)، در D داریم

$$\mathbf{v}=f\mathbf{i}+g\mathbf{j}+h\mathbf{k}=\operatorname{grad} u$$

از این رابطه واز (۳)ی بخش ۱۱.۸ به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}=\operatorname{curl}(\operatorname{grad} u)=0.$$

(ب) برعکس، فرض می‌کنیم که D همبند ساده است و (′۱۱) درهمهٔ نقاط D برقرار. فرض‌می‌کنیم C مسیر بستهٔ سادهٔ دلخواهی در D باشد. چون D همبند ساده‌است، می‌توان در D سطحی مانند S یافت که با C محصور شده باشد؛ با استفاده از قضیهٔ استوکس (بخش ۱۰.۹)، وبا انتخاب جهت مناسبی برای C ونرمال $\mathbf{n}$ بر S، به‌دست می‌آوریم

$$\int_C (f\,dx+g\,dy+h\,dz)=\int_C v_t\,ds=\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{v})_n\,dA=0\,.$$

از اینجا واز قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که انتگرال (۱۰) در D مستقل از مسیر است وبدین‌ترتیب اثبات به‌اتمام می‌رسد. ▲

مشاهده می‌کنیم که درمورد انتگرال روی خط

$$\int_C (f\,dx+g\,dy)$$

درصفحهٔ xy، روابط (۱۱) به‌رابطهٔ

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (۱۱^*)$$

بدل می‌شوند.

این فرض که D همبندساده باشد فرضی ضروری است ونمی‌توان آن راحذف کرد. این مطلب را می‌توان با مثال زیر روشن کرد.

مثال ۲. دربارهٔ فرض همبند ساده بودن درقضیهٔ ۳

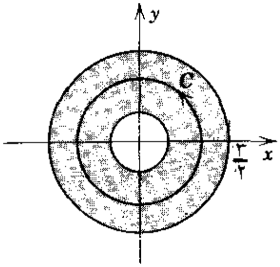
فرض می‌کنیم

$$f=-\frac{y}{x^2+y^2}\,,\quad g=\frac{x}{x^2+y^2}\,,\qquad h=0\,.$$

مشتقگیری نشان می‌دهد که (*۱۱) درهرحوزه‌ای از صفحهٔ xy که شامل مبدأ نباشدصادق است، مثلا درحوزهٔ $D:\ 1/2<\sqrt{x^2+y^2}<3/2$ که درشکل۲۰۲ نشان داده شده است. بدیهی است که D همبند ساده نیست. هرگاه انتگرال

$$I=\int_C (f\,dx+g\,dy)=\int_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$$

در D مستقل از مسیر باشد، آنگاه روی هر منحنی بستهٔ واقع در D، مثلا بر دایرهٔ



شکل ۲۰۲. مثال ۲

$x^2+y^2=1$ ، داریم $I=0$. اما با قرار دادن $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ و با توجه به‌اینکه دایره با $r=1$ نمایش داده می‌شود، به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$I=\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi ,$$

انتگرالگیری یك دور حول دایره، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، انجام شده است. درواقع، چون D همبند ساده نیست ، نمی‌توانیم قضیهٔ ۳ را به‌کار بریم و استنتاج کنیم که I در D مستقل از مسیر است. به‌علاوه مشاهده می‌کنیم که

$$f\,dx+g\,dy=du \quad \text{که درآن} \quad u=\arc\tan\frac{y}{x}=\theta ،$$

اما u در D تك‌مقداری نیست. از طرف دیگر ، هر گاه «مقدار اصلی» u را که با $-\pi\leqslant u\leqslant\pi$ تعریف می‌شود درنظربگیریم، آنگاه u درنقاط واقع برقسمت منفی‌محور x ها در D مشتقپذیر (وحتی پیوسته) نیست؛ ذکراین مطالب درارتباط باکامل بودن‌صورت دیفرانسیلی، لازم بود. ▲

هر گاه انتگرال روی خط مستقل از مسیر باشد ، آن را می‌توان به وسیلهٔ فرمول (۸) محاسبه کرد.

مثال ۳. محاسبهٔ انتگرال روی خط درحالتی‌که این انتگرال مستقل از مسیر است

مطلوب است محاسبهٔ

$$I=\int_c [2xyz^2dx+(x^2z^2+z\cos yz)\,dy+(2x^2yz+y\cos yz)\,dz]$$

روی مسیر دلخواهی از $P:(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$ تا $Q:(1\ ,\ \pi/4\ ,\ 2)$.

ازقضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که انتگرال ازمسیر مستقل درفضاست. چون $f=2xyz^2$ ، از رابطهٔ اول (۵) به‌دست می‌آوریم

$$u=\int f\,dx=x^2yz^2+a(y\,,\,z)\,, \tag{۱۲}$$

از این رابطه ورابطهٔ دوم (۵) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2z^2+\frac{\partial a}{\partial y}=g=x^2z^2+2\cos yz\,.$$

پس باید داشته باشیم

$$\frac{\partial a}{\partial y}=z\cos yz\,,\qquad a=\sin yz+c(z)\,.$$

از رابطهٔ اخیر، رابطهٔ سوم (۵)، و (۱۲) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2x^2yz+y\cos yz+\frac{dc}{dz}=h=2x^2yz+y\cos yz\,.$$

درنتیجه $dc/dz=0$، ثابت $=c$، وبنابراین

$$u(x\,,\,y\,,\,z)=x^2yz^2+a=x^2yz^2+\sin yz+c\,.$$

خواننده می‌تواند با نگاهی دوباره به انتگرال سعی کند که این u را با حدس و بررسی پیدا کند. سرانجام از فرمول (۸) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$I=[x^2yz^2+\sin yz+c]\Big|_P^Q=\pi+\sin\frac{\pi}{2}=\pi+1\,.$$

مسائل بخش ۱۲.۹

آیا صورتهای دیفرانسیلی زیر کا هستند؟

۱. $x\,dx-y\,dy+z\,dz$

۲. $x^2dx+2xy\,dy+y^2dz$

۳. $e^ydx+e^xdy+e^zdz$

۴. $(y+z\cos x)\,dx+x\,dy+\sin x\,dz$

۵. $z\cos yz\,dy+y\cos yz\,dz$

۶. $y^3dx+z^3dy+x^3dz$

۷. $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$

۸. $y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$

درهریك از مسائل زیر نشان دهید که صورت دیفرانسیلی داده شده کامل است و تابعی مانند u پیدا کنید به‌طوری که صورت داده شده برابر du باشد.

۹. $x\,dx - y\,dy - z\,dz$

۱۰. $dx + dy + dz$

۱۱. $dx + z\,dy + y\,dz$

۱۲. $(z^2 - 2xy)\,dx - x^2dy + 2xz\,dz$

۱۳. $\cos x\,dx - 2yz\,dy - y^2dz$

۱۴. $6xy\,dx + 3x^2dy - 4z\,dz$

نشان دهید که صورت زیر علامت انتگرال، کامل است وسپس انتگرال را محاسبه کنید:

۱۵. $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x\,dx + y\,dy - z\,dz)$

۱۶. $\int_{(1,0,0)}^{(2,1,4)} [yz\,dx + (xz+1)\,dy + xy\,dz]$

۱۷. $\int_{(0,-1,-1)}^{(\pi,3,2)} (\cos x\,dx + z\,dy + y\,dz)$

۱۸. $\int_{(1,3,2)}^{(4,0,1)} [z\,dx - z\,dy + (x-y)\,dz]$

۱۹. $\int_{(0,2,1)}^{(2,0,1)} [ze^x dx + 2yz\,dy + (e^x + y^2)\,dz]$

۲۰. $\int_{(0,0,0)}^{(1,4,2)} (3y^2e^z dy + y^3e^z dz)$